



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.1.1>



УДК 517.954
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 12.12.2025
Дата принятия статьи: 12.02.2026

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Гусен Эльдерханович Абдурагимов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики,
Дагестанский государственный университет
gusen_e@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0001-7095-932X>
ул. Дзержинского, 12, 367025 г. Махачкала, Российская Федерация

Цитирование: Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения задачи Дирихле для одного нелинейного дифференциального уравнения // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2026. Т. 29, № 1. С. 5–12.
DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.1.1>

Citation: Abduragimov G.E. On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to the Dirichlet Problem for One Nonlinear Differential Equation. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2026, vol. 29, no. 1, pp. 5-12.
DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.1.1>

Аннотация. В статье рассматривается задача Дирихле в многомерном единичном шаре для нелинейного дифференциального уравнения. В случае однородности нелинейной компоненты уравнения доказано существование единственного положительного радиально-симметричного решения. Предложен неитерационный численный алгоритм построения такого решения и приведен соответствующий пример, демонстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: задача Дирихле, задача Коши, положительное решение, радиально-симметричное решение, дифференциальное уравнение.

Введение

В настоящей статье в n -мерном единичном шаре S рассматривается задача Дирихле

$$\Delta u + f(|x|, u) = 0, \quad x \in S, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где Γ — граница S , $f : [0, +\infty) \times R \rightarrow R$ — неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая одному из условий:

$$(H_1) : f(\lambda_1 v, \lambda_2 w) = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} f(v, w), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0, \text{ где } m_1 \geq 0, \quad m_2 > 1 \text{ или}$$

$$(H_2) : f(\lambda v, \lambda w) = \lambda^{m_1+m_2} f(v, w), \quad \forall \lambda > 0, \text{ где } m_1 \geq 0, \quad m_2 > 1.$$

Кроме того, предполагается, что

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \min_{r \in [0,1]} \frac{f(r, u)}{u} = +\infty. \quad (3)$$

Вопросам качественного поведения радиально-симметрических решений граничных задач для уравнения вида (1) посвящено достаточно большое число работ (например, [10; 11]). В [12] были получены достаточные условия единственности положительного радиально-симметрического решения уравнения вида (1), убывающего на бесконечности, и доказана единственность положительного радиально-симметрического решения задачи Дирихле в шаре. Кроме того, отметим еще ряд работ [8; 9; 21] в этом направлении. В [4; 14–16; 20] с помощью различных топологических методов, основанных на теореме Красносельского, доказаны аналогичные результаты. В [13] результаты о существовании решений были получены с помощью метода горного перевала. На основе методов вариационного исчисления в [17–19] было доказано существование радиально-симметрических решений задачи Дирихле для уравнения (1). В частном надлиннейном случае в [6] доказана единственность положительного решения задачи (1)–(2). В более общей постановке единственность положительного решения Дирихле изучалась и другими авторами. В частности, в [3], используя априорные оценки, была доказана единственность положительного решения задачи Дирихле для функции $f(x, u) = p(x)u^k$ с граничным условием на бесконечности. Кроме того, отметим здесь работу [7], в которой была установлена единственность положительного решения задачи Дирихле в кольце. Близкой к настоящей работе постановке задачи соответствующие результаты были получены в [1; 2], где с помощью преобразования Ц. На [5] доказано существование единственного положительного радиально-симметричного решения задачи Дирихле для частного случая уравнения (1) с нелинейной степенной составляющей и предложен численный алгоритм нахождения этого решения.

В данной работе для доказательства существования единственного положительного радиально-симметричного решения краевой задачи (1)–(2) с обобщенной однородной нелинейной надбавкой был взят на вооружение метод преобразований Ц. На, отличающийся своей простотой и эффективностью. Более того, с помощью данного метода получен алгоритм численного нахождения решения рассматриваемой задачи. Полученные в статье результаты в определенной степени расширяют и дополняют обозначенные выше исследования.

1. Основные результаты

Определение 1. Под положительным решением задачи (1)–(2) будем подразумевать функцию $u \in C^2(\bar{S})$, положительную в S и удовлетворяющую граничному условию (2).

Хорошо известно, что радиально-симметричное решение задачи (1)–(2) удовлетворяет краевой задаче

$$u'' + \frac{n-1}{r}u' + f(r, u) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (4)$$

$$u'(0) = 0, \quad (5)$$

$$u(1) = 0, \quad (6)$$

где $r = |x|$.

Для доказательства существования положительного радиально-симметричного решения исследуемой краевой задачи воспользуемся группой линейных преобразований Ц. На [5]

$$\begin{cases} r = A^\alpha \tilde{r}, \\ u = A^\beta \tilde{u}, \end{cases} \quad (7)$$

где α, β – произвольные постоянные; A – положительный параметр. После подстановки (7) в уравнение (4) получим

$$A^{\beta-2\alpha} \tilde{u}'' + \frac{n-1}{\tilde{r}} A^{\beta-2\alpha} \tilde{u}' + A^{\alpha m_1 + \beta m_2} f(\tilde{r}, \tilde{u}) = 0. \quad (8)$$

Исключим параметр A из уравнения (8). Для этого достаточно взять

$$\beta - 2\alpha = \alpha m_1 + \beta m_2 \quad (9)$$

и соответственно (8) примет вид

$$\tilde{u}'' + \frac{n-1}{\tilde{r}} \tilde{u}' + f(\tilde{r}, \tilde{u}) = 0.$$

Параметр преобразования A выберем равным значению положительного решения задачи (1)–(2) в начальной точке отрезка $[0, 1]$

$$u(0) = A.$$

В новых координатах это условие запишется так

$$A^\beta \tilde{u}(0) = A.$$

Взяв теперь $\beta = 1$, исключим зависимость этого соотношения от A . В свою очередь, из (9) следует, что $\alpha = \frac{1-m_2}{2+m_1}$.

Итак, заменой (7) задача Дирихле (1)–(2) сведена к задаче Коши

$$\tilde{u}'' + \frac{n-1}{\tilde{r}} \tilde{u}' + f(\tilde{r}, \tilde{u}) = 0, \quad \tilde{r} > 0, \quad (10)$$

$$\tilde{u}(0) = 1, \quad (11)$$

$$\tilde{u}'(0) = 0. \quad (12)$$

Лемма 1. Можно указать число $\tilde{r}_* > 0$ такое, что задача Коши (10)–(12) имеет единственное решение $\tilde{u}(\tilde{r}) \in C^2_{[0,+\infty)}$, причем $\tilde{u}(\tilde{r}) > 0$ при $\tilde{r} \in [0, \tilde{r}_*)$ и $\tilde{u}(\tilde{r}_*) = 0$.

Доказательство. Представим уравнение (10) в виде

$$(\tilde{r}^{n-1}\tilde{u}')' = -\tilde{r}^{n-1}f(\tilde{r}, \tilde{u}).$$

Проинтегрировав это уравнение в границах от 0 до $\tilde{r}$, имеем

$$\tilde{u}'(\tilde{r}) = -\frac{1}{\tilde{r}^{n-1}} \int_0^{\tilde{r}} s^{n-1} f(s, \tilde{u}) ds \leq 0. \quad (13)$$

Отсюда, с учетом начального условия (11), получим

$$\tilde{u}(\tilde{r}) = 1 - \int_0^{\tilde{r}} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} f(s, \tilde{u}) ds dt.$$

Ввиду условия (3) существует число $L > 0$ такое, что

$$\min_{0 \leq s \leq A^{-\alpha}} f(s, u) \geq \xi u, \quad u \geq L,$$

где $\xi > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\tilde{r}) &= 1 - \int_0^{\tilde{r}} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} f(s, \tilde{u}) ds dt \leq 1 - \xi \int_0^{\tilde{r}} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} \tilde{u}(s) ds dt \leq \\ &\leq 1 - \xi L \int_0^{\tilde{r}} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} ds dt = 1 - \frac{\xi L}{n(n+1)} \tilde{r}^{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что всегда найдется точка $\tilde{r}_* > 0$, в которой $\tilde{u}(\tilde{r})$ обратится в нуль, и поскольку в силу (13) функция $\tilde{u}(\tilde{r})$ убывает, то точка $\tilde{r}_*$ единственная, причем $\tilde{u}(\tilde{r}) > 0$ при $\tilde{r} \in [0, \tilde{r}_*)$ и $\tilde{u}(\tilde{r}) < 0$ при $\tilde{r} \in (\tilde{r}_*, \infty)$.

Из леммы 1 вытекает, что задача Коши для уравнения (4) с начальными условиями

$$u(0) = A, \quad u'(0) = 0$$

имеет единственное решение $u \in C^2_{[0, r_*]}$, где $r_* = A^\alpha \tilde{r}_*$ — единственная точка, в которой это решение обращается в нуль. Очевидно

$$A^\alpha \tilde{r}_* = 1, \quad (14)$$

откуда параметр A определяется однозначно.

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. Существует единственное положительное радиально-симметричное решение задачи Дирихле (1)–(2).

Опираясь на метод Ц. На, на котором собственно основывается доказательство теоремы 1, мы можем сформулировать алгоритм численного нахождения положительного радиально-симметричного решения задачи (1)–(2):

- 1) С помощью какого-либо численного алгоритма, например, методом Рунге-Кутты четвертого порядка решаем задачу Коши (10)–(12) на полуоси $[0, \infty)$ до тех пор, пока не будет найдена точка $\tilde{r}_*$, в которой с заданной точностью решение данной задачи не обратится в нуль. Существование единственной такой точки гарантирует лемма 1.
- 2) Находим A из уравнения (14):

$$A = (\tilde{r}_*)^{\frac{m_1+2}{m_2-1}}.$$

- 3) По формулам (7) восстанавливаем решение задачи (1)–(2).

Приведем пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

Пример 1. Рассмотрим при $n = 3$ задачу

$$\begin{aligned} \Delta u + r^2 + u^2 &= 0, \quad x \in S, \\ u|_{r=1} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь, очевидно, $f(r, u) = r^2 + u^2$, $m_1 + m_2 = 2$. В соответствии с приведенным выше алгоритмом, численно разрешив задачу Коши (10)–(12) на Python методом Рунге-Кутты четвертого порядка с точностью 10^{-4} , получим следующую таблицу приближенных значений положительного решения данной задачи.

r	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
u	12,625	12,537	12,322	11,918	11,287	10,428	9,254	7,714	5,719	3,169	0,000

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдурагимов, Э. И. Единственность положительного решения задачи Дирихле в шаре для квазилинейного уравнения с p -лапласианом / Э. И. Абдурагимов // Изв. вузов. Матем. — 2011. — Т. 10. — С. 3–11.
2. Абдурагимов, Э. И. Положительное радиально-симметричное решение задачи Дирихле для одной нелинейной эллиптической системы с p -лапласианом / Э. И. Абдурагимов // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, вып. 5. — С. 643–655.
3. Кондратьев, В. А. О единственности сингулярной краевой задачи для полулинейных эллиптических уравнений / В. А. Кондратьев, В. А. Никишкин // Применение новых методов анализа в теории краевых задач. — Воронеж, 1990. — С. 52–58.
4. Кондрашов, А. Н. О единственности решений уравнения Бельтрами с заданной вещественной частью на границе / А. Н. Кондрашов // Математ. физика и компьютер. моделирование. — 2024. — Т. 27, № 1. — С. 5–16. — DOI: <http://dx.doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.1>
5. На, Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / Ц. На. — М.: Мир, 1982. — 296 с.
6. Похожаев, С. И. Об одной задаче Л.В. Овсянникова / С. И. Похожаев // Журн. прикл. механ. и техн. физ. — 1989. — Т. 2. — С. 5–10.
7. Bandl, C. Semilinear Elliptic Problems in Annular Domains / C. Bandl, M. K. Kwong // J. of Appl. Math. and Phys. — 1989. — Vol. 40. — P. 245–257.
8. Benedict, J. Asymptotics for the Principal Eigenvalue of the p -Laplacian on the Ball as p Approaches 1 / J. Benedict, P. Drabek // Nonlinear Anal. — 2013. — Vol. 93. — P. 23–29.
9. Cabre, X. Regularity of Radial Minimizers of Reaction Equations Involving the p -Laplacian / X. Cabre, A. Capella, M. Sanchon // Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 2009. — Vol. 34, iss. 4. — P. 475–494.

10. Franca, M. Radial Ground States and Singular Ground States for a Spatial-Dependent p -Laplace Equation / M. Franca // J. Differ. Equ. — 2010. — Vol. 218. — P. 2629–2656.
11. Franchi, B. Existence and Uniqueness of Nonnegative Solutions of Quasilinear Equations in $\mathbb{R}^n$ / B. Franchi, E. Lanconelli, J. Serrin // Adv. Math. — 1996. — Vol. 118. — P. 177–243.
12. Garcia-Huidobro, M. On the Uniqueness of Positive Solutions of a Quasilinear Equation Containing a Weighted p -Laplacian, the Superlinear Case / M. Garcia-Huidobro, H. Duvaan // Commun. Contemp. Math. — 2008. — Vol. 10, iss. 3. — P. 405–432.
13. Gupta, S. An Existence Result for p -Laplace Equation with Gradient Nonlinearity in $\mathbb{R}^N$ / S. Gupta, G. Dwivedi // Commun. Math. — 2022. — Vol. 30, iss. 1. — P. 149–159.
14. Li, J. Existence of Positive Solutions for the p -Laplacian with p -Gradient Term / J. Li, J. Yin, Y. Ke // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — Vol. 383, iss. 1. — P. 147–158.
15. Positive Solutions for the p -Laplacian with Dependence on the Gradient / H. Bueno, G. Ercole, W. M. Ferreira, A. Zumpano // Nonlinearity. — 2010. — Vol. 25, iss. 4. — P. 1211–1234.
16. Ruiz, D. A Priori Estimates and Existence of Positive Solutions for Strongly Nonlinear Problems / D. Ruiz // J. Differ. Equations. — 2004. — Vol. 199, iss. 1. — P. 96–114.
17. Tersenov, Ar. S. Influence of Gradient Terms on the Existence of Solutions to the Dirichlet Problem for p -Laplacian / Ar. S. Tersenov // J. Math. Sci. — 2018. — Vol. 228, iss. 4. — P. 463–474.
18. Tersenov, Ar. S. Radially Symmetric Solutions of the p -Laplace Equation with Gradient Terms / Ar. S. Tersenov // J. Appl. Ind. Math. — 2018. — Vol. 12, iss. 4. — P. 770–784.
19. Tersenov, Ar. S. On the Existence of Radially Symmetric Solutions for an Elliptic Equation with p -Laplacian and with Strong Gradient Nonlinearities / Ar. S. Tersenov // Siberian Math. J. — 2023. — Vol. 64, iss. 6. — P. 1332–1345.
20. Zou, H. H. A Priori Estimates and Existence for Quasilinear Elliptic Equations / H. H. Zou // Calculus Var. Partial Differ. Equations. — 2008. — Iss. 4. — P. 417–437.
21. Zhang, Zh. A Universal Bound for Radial Solutions of the Quasilinear Parabolic Equation with p -Laplace Operator / Zh. Zhang, Zh. Li // J. Math. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 385. — P. 125–134.

REFERENCES

1. Abduragimov E.I. Uniqueness of a Positive Solution to the Dirichlet Problem in a Ball for a Quasilinear Equation with a $\mathbf{P}$ -Laplacian. *Izv. vuzov. Matem.*, 2011, vol. 10, pp. 3–11.
2. Abduragimov E.I. A Positive Radially Symmetric Solution of the Dirichlet Problem for a Nonlinear Elliptic System with a $\mathbf{P}$ -Laplacian. *Matem. zametki*, 2016, vol. 100, iss. 5, pp. 643–655.
3. Kondratyev V.A., Nikishkin V.A. On the Uniqueness of a Singular Boundary Value Problem for Semilinear Elliptic Equations. *Primenenie novykh metodov analiza v teorii kraevykh zadach.*. Voronezh, 1990, pp. 52–58.
4. Kondrashov A.N. On the Uniqueness of Solutions of the Beltrami Equation with a Given Real Part on the Boundary. *Matemat. fizika i komyuter. modelirovanie*, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 5–16. DOI: <http://dx.doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.1>
5. Na Ts. *Computational Methods for Solving Applied Boundary Value Problems*. Moscow, Mir, 1982. 296 p.
6. Pokhozhaev S.I. About One Problem of L.V. Ovsiyannikov. *Zhurn. prikl. mekhan. i tekhn. fiz.*, 1989, vol. 2, pp. 5–10.
7. Bandl S., Kwong M.K. Semilinear Elliptic Problems in Annular Domains. *J. of Appl. Math. and Phys.*, 1989, vol. 40, pp. 245–257.
8. Benedict J., Drabek P. Asymptotics for the Principal Eigenvalue of the p -Laplacian on the Ball as p Approaches 1. *Nonlinear Anal.*, 2013, vol. 93, pp. 23–29.

9. Cabre X., Capella A., Sanchon M. Regularity of Radial Minimizers of Reaction Equations Involving the p -Laplacian. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2009, vol. 34, iss. 4, pp. 475-494.
10. Franca M. Radial Ground States and Singular Ground States for a Spatial-Dependent p -Laplace Equation. *J. Differ. Equ.*, 2010, vol. 218, pp. 2629-2656.
11. Franchi B., Lanconelli E., Serrin J. Existence and Uniqueness of Nonnegative Solutions of Quasilinear Equations in $\mathbb{R}^n$. *Adv. Math.*, 1996, vol. 118, pp. 177-243.
12. Garcia-Huidobro M., Duvaň H. On the Uniqueness of Positive Solutions of a Quasilinear Equation Containing a Weighted p -Laplacian, the Superlinear Case. *Commun. Contemp. Math.*, 2008, vol. 10, iss. 3, pp. 405-432.
13. Gupta S., Dwivedi G. An Existence Result for p -Laplace Equation with Gradient Nonlinearity in $\mathbb{R}^N$. *Commun. Math.*, 2022, vol. 30, iss. 1, pp. 149-159.
14. Li J., Yin J., Ke Y. Existence of Positive Solutions for the p -Laplacian with p -Gradient Term. *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, vol. 383, iss. 1, pp. 147-158.
15. Bueno H., Ercole G., Ferreira W.M., Zumpano A. Positive Solutions for the p -Laplacian with Dependence on the Gradient. *Nonlinearity*, 2010, vol. 25, iss. 4, pp. 1211-1234.
16. Ruiz D. A Priori Estimates and Existence of Positive Solutions for Strongly Nonlinear Problems. *J. Differ. Equations.*, 2004, vol. 199, iss. 1, pp. 96-114.
17. Tersenov Ar.S. Influence of Gradient Terms on the Existence of Solutions to the Dirichlet Problem for p -Laplacian. *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 228, iss. 4, pp. 463-474.
18. Tersenov Ar.S. Radially Symmetric Solutions of the p -Laplace Equation with Gradient Terms. *J. Appl. Ind. Math.*, 2018, vol. 12, iss. 4, pp. 770-784.
19. Tersenov Ar.S. On the Existence of Radially Symmetric Solutions for an Elliptic Equation with p -Laplacian and with Strong Gradient Nonlinearities. *Siberian Math. J.*, 2023, vol. 64, iss. 6, pp. 1332-1345.
20. Zou H.H. A Priori Estimates and Existence for Quasilinear Elliptic Equations. *Calculus Var. Partial Differ. Equations*, 2008, iss. 4, pp. 417-437.
21. Zhang Zh., Li Zh. A Universal Bound for Radial Solutions of the Quasilinear Parabolic Equation with p -Laplace Operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 385, pp. 125-134.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR ONE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Gusen E. Abduragimov

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Applied Mathematics,
Dagestan State University
gusen_e@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0001-7095-932X>
Dzerzhinsky St, 12, 367025 Makhachkala, Russian Federation

Abstract. The article deals with the boundary value problem

$$\begin{aligned}\Delta u + f(|x|, u) &= 0, \quad x \in S, \\ u|_{\Gamma} &= 0,\end{aligned}$$

where Γ is the bound of S , and f a non-negative continuous function that satisfies one of the conditions:

$$\begin{aligned}(H_1) : f(\lambda_1 v, \lambda_2 w) &= \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} f(v, w), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0, \text{ где } m_1 \geq 0, \quad m_2 > 1 \text{ or} \\ (H_2) : f(\lambda v, \lambda w) &= \lambda^{m_1+m_2} f(v, w), \quad \forall \lambda > 0, \text{ где } m_1 \geq 0, \quad m_2 > 1.\end{aligned}$$

In addition, it is assumed that

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \min_{r \in [0,1]} \frac{f(r, u)}{u} = +\infty.$$

Under the assumption of non-negativity, continuity and homogeneity of the nonlinear component of the equation, using the linear group of transformations of C. Na, the existence of a unique positive radially symmetric solution to the problem under consideration was proven. Furthermore, a constructive non-iterative numerical algorithm for constructing such a solution is proposed. An example is provided to illustrate the results obtained.

Key words: Dirichlet problem, Cauchy problem, positive solution, radially symmetric solution, differential equation.