



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.1.2>

УДК 517.548+517.956
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 14.01.2026
Дата принятия статьи: 25.03.2026

ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЕВА ТИПА ДЛЯ ТРУБЧАТЫХ $\mathcal{A}$ -ПОВЕРХНОСТЕЙ

Александр Николаевич Кондрашов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-1614-0393>
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Цитирование: Кондрашов А. Н. Теоремы лиувиллева типа для трубчатых $\mathcal{A}$ -поверхностей
// Математическая физика и компьютерное моделирование. 2026. Т. 29, № 1. С. 13–25.
DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.1.2>

Citation: Kondrashov A.N. Liouville-Type Theorems for Tubular $\mathcal{A}$ -Surfaces. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2026, vol. 29, no. 1, pp. 13-25.
DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.1.2>

Аннотация. Данная работа продолжает классические исследования В.М. Миклюкова и его учеников (В.Г. Ткачева, В.А. Клячина, А.Н. Кондрашова), посвященные геометрическим версиям теорем Лиувилля и Фрагмена — Линделефа для целых и полужелых минимальных трубок в евклидовом пространстве, а также максимальных трубок в пространстве Минковского. В центре внимания аналогии классических утверждений, но уже не для минимальных или максимальных трубок, а для трубок, задаваемых решениями некоторых специальных систем уравнений дивергентного вида. Если говорить более конкретно, то речь идет о функциях $f(x) = (f_1, \dots, f_N) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) которые задают собственное вложение области D в $\mathbb{R}^N$ и являются решениями вышеупомянутых систем. С каждым таким решением связывается двумерная поверхность $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^N$. Такие поверхности называются $\mathcal{A}$ -поверхностями. Оказывается, что по своим свойствам такие поверхности напоминают поверхности нулевой средней кривизны с положительно определенной метрикой в общем псевдоевклидовом пространстве (частным случаем которого является евклидово!). По аналогии с классическими трубчатыми минимальными поверхностями вводится понятие трубчатой $\mathcal{A}$ -поверхности ($\mathcal{A}$ -трубки) относительно заданного направления. Изучаются их глобальные геометрические характеристики, для $\mathcal{A}$ -трубок получены две теоремы. Первая теорема (аналог теоремы Лиувилля) утверждает, что если целая $\mathcal{A}$ -трубка целиком

лежит по одну сторону от некоторой гиперплоскости, то она обязательно содержится в гиперплоскости, параллельной данной. Вторая теорема (аналог теоремы Фрагмена — Линделефа) касается $\mathcal{A}$ -трубок с полубесконечной проекцией и дает оценку роста ширины поверхности. Доказательства этих теорем опираются на емкостную технику, развитую в работах В.М. Миклюкова.

Ключевые слова: системы типа нулевой средней кривизны, теоремы типа Лиувилля, $\mathcal{A}$ -поверхность, $\mathcal{A}$ -трубчатые поверхности, δ -гармонические функции, весовая емкость, принцип Фрагмена — Линделефа.

1. Системы уравнений типа нулевой средней кривизны

1.1. Данная работа посвящена получению аналогов геометрических версий теорем Лиувилля и Фрагмена — Линделефа, известных из работ В.М. Миклюкова [7] и его учеников (В.Г. Ткачев [8], В.А. Клячин [3]) для целых минимальных трубок в евклидовом пространстве и максимальных в пространстве-времени Минковского. А именно, получены две теоремы, которые являются такими аналогами для некоторых систем дифференциальных уравнений дивергентного вида. Если говорить более точно, то с решениями $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2)$, $N \geq 3$ упомянутой системы, задающими собственное вложение D в $\mathbb{R}^N$, связывается двумерная поверхность $\mathcal{M}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Свойства некоторых видов таких поверхностей оказываются такими же, как и свойства поверхностей нулевой средней кривизны с положительно определенной метрикой, в общем случае, в псевдоевклидовом пространстве. Такие поверхности $\mathcal{M}$ названы $\mathcal{A}$ -поверхностями.

По аналогии с трубчатыми минимальными поверхностями в евклидовом пространстве нами вводится понятие трубчатых $\mathcal{A}$ -поверхностей ($\mathcal{A}$ -трубок) относительно заданного направления и исследуются их глобальные геометрические свойства. Для $\mathcal{A}$ -трубок установлены две теоремы. Первая утверждает, что если целая $\mathcal{A}$ -трубка лежит по одну сторону некоторой гиперплоскости, то она должна содержаться в некоторой гиперплоскости, параллельной данной. Вторая теорема касается $\mathcal{A}$ -трубок с полубесконечной проекцией. В ней описывается оценка роста ширины поверхности.

Доказательства основаны на применении емкостных методов, развитых в упомянутых работах В.М. Миклюкова [7; 8].

1.2. Пусть в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{3N+2}$, пространства переменных $(x, y, \xi, \zeta) = (x_1, x_2, y_1, \dots, y_N, \xi_1, \dots, \xi_N, \zeta_1, \dots, \zeta_N)$, заданы вещественные функции

$$A_{ij}(x, y, \xi, \zeta) \in C^2(\mathcal{D}), \quad (i, j = 1, 2, \quad A_{ij} = A_{ji})$$

и с ними связана система дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{d}{dx_i} (A_{ij}(x, f, f_{x_1}, f_{x_2}) f_{x_j}) = 0, \quad (1)$$

где $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, $f = f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)) \in C^2(D)$, $x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Разумеется, чтобы это имело смысл для любого $x \in D$, необходимо требовать, чтобы $(x, f(x), f_{x_1}(x), f_{x_2}(x)) \in \mathcal{D}$.

Поверхности $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^N$, заданные собственными погружениями вида

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

где $f(x)$ — C^2 -решение системы (1) будем называть далее « $\mathcal{A}$ -поверхностями». Свойства « $\mathcal{A}$ -поверхностей» подобны свойствам поверхностей нулевой средней кривизны (НСК-поверхностям) в псевдоевклидовых пространствах [4], которые, в свою очередь, описываются некоторыми частными случаями систем вида (1) (см. приводимый ниже пример 1). В соответствии с этим системы уравнений (1) мы называем «системами уравнений типа НСК». Сказанное иллюстрируется следующим примером.

Пример 1. Важным частным случаем системы вида (1) является система с

$$A_{11} = \frac{\zeta^2}{\sqrt{\xi^2 \zeta^2 - \langle \xi, \zeta \rangle^2}}, \quad A_{12} = \frac{-\langle \xi, \zeta \rangle}{\sqrt{\xi^2 \zeta^2 - \langle \xi, \zeta \rangle^2}}, \quad A_{22} = \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 \zeta^2 - \langle \xi, \zeta \rangle^2}},$$

где $\xi^2, \zeta^2, \langle \xi, \zeta \rangle$ берутся в смысле псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_k^N$, $0 \leq k \leq N$, ассоциированного с $\mathbb{R}^N$ (см., например, [10]). Такие системы описывают двумерные поверхности нулевой средней кривизны (НСК-поверхности) в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{E}_k^N$ (см., например, [2; 4]).

Замечание 1. Под скалярным произведением двух векторов $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ в смысле $\mathbb{E}_k^N$ понимается билинейная форма

$$\langle \xi, \zeta \rangle = -\xi_1 \zeta_1 - \dots - \xi_k \zeta_k + \xi_{k+1} \zeta_{k+1} + \dots + \xi_N \zeta_N$$

при $0 < k < N$, стандартное евклидово произведение при $k = 0$

$$\langle \xi, \zeta \rangle = \xi_1 \zeta_1 + \dots + \xi_N \zeta_N$$

и антиевклидово при $k = N$

$$\langle \xi, \zeta \rangle = -\xi_1 \zeta_1 - \dots - \xi_N \zeta_N.$$

1.3. Для дальнейших целей нам потребуются некоторые известные геометрические величины — градиент функции и дивергенция векторного поля, заданные на римановом многообразии $(\mathcal{H}, g)$. Напомним формулы для их нахождения (см., например, [11, с. 356–357]). Пусть $\dim \mathcal{H} = m \geq 2$. В локальных координатах $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ на $\mathcal{H}$ имеем:

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m g^{ij}(x) f_{x_j} e_i, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|} X^i \right), \quad (3)$$

где $\{g^{ij}(x)\}_{i,j=1}^m$ — матрица, обратная к матрице коэффициентов метрического тензора $\{g_{ij}(x)\}_{i,j=1}^m = \{\langle e_i, e_j \rangle\}_{i,j=1}^m$ метрики g , $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $|g| = \det\{g_{ij}(x)\}$, $X = \sum_{i=1}^m X^i(x) e_i$. Пусть $\delta(x) > 0$ — C^2 -гладкая функция, заданная на $\mathcal{H}$. Нам также потребуется дифференциальный оператор

$$\Delta_\delta f(x) = \operatorname{div} (\delta(x) \nabla f(x)) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\delta(x) \sqrt{|g|} g^{ij}(x) f_{x_j} \right). \quad (4)$$

Этот оператор $\Delta_\delta f(x)$ называем далее весовым оператором Лапласа (весовым лапласианом) с весом $\delta(x)$. Функции $f \in C^2$, удовлетворяющие уравнению $\Delta_\delta f(x) = 0$, будем называть δ -гармоническими.

Иногда в частном случае, когда $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^m$ — область евклидова пространства, а метрика g задана квадратом элемента длины

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x) dx_i dx_j,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathcal{H}$, а $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ функции, пару $(\mathcal{H}, ds^2)$ называют абстрактной поверхностью (см., например, [9]).

Нам будет в дальнейшем необходим следующий простой факт.

Лемма 1. Пусть $(\mathcal{H}, g)$ — риманово многообразие; $\delta(x) > 0$ — весовая функция. Предположим, что на $\mathcal{H}$ задана δ -гармоническая в метрике g функция $u(x)$, такая, что при любых $t, t_1, t_2 \in (a, b)$ ($t_1 < t_2$) множества

$$\begin{aligned}\Sigma_t(u) &= \{x : x \in \mathcal{H}, u(x) = t\}, \\ M_{t_1, t_2} &= \{x : x \in \mathcal{H}, t_1 \leq u(x) \leq t_2\}\end{aligned}$$

компактны в $(\mathcal{H}, g)$.

Пусть $v(x)$ — другая δ -гармоническая в метрике g функция. Тогда функция $\bar{v}(t) = \max_{x \in \Sigma_t(x)} v(x)$ выпукла вниз на (a, b) .

Доказательство этого утверждения не отличается от доказательства соответствующего утверждения для гармонических функций (см., например, [8]), а потому опускается. Отметим лишь, что это доказательство основано на элементарном использовании принципа максимума-минимума и несложно.

1.4. Введем в рассмотрение функцию

$$\mathcal{A}(x, y, \xi, \zeta)(\omega_1, \omega_2) = A_{22}\omega_1^2 - 2A_{12}\omega_1\omega_2 + A_{11}\omega_2^2,$$

представляющую собой квадратичную форму относительно ω_1, ω_2 .

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область и $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)) : D \rightarrow \mathbb{R}^N \in C^2(D)$. Тогда можно определить квадратичную форму

$$\begin{aligned}ds_f^2 &= \mathcal{A}(x, f, f_{x_1}, f_{x_2})(dx_1, dx_2) = \\ &= A_{22}(x, f, f_{x_1}, f_{x_2})dx_1^2 - 2A_{12}(x, f, f_{x_1}, f_{x_2})dx_1 dx_2 + A_{11}(x, f, f_{x_1}, f_{x_2})dx_2^2.\end{aligned}\quad (5)$$

Если эта квадратичная форма невырождена всюду в D , то она может быть либо положительно (отрицательно) определена при всех $x \in D$, либо быть индефинитной (то есть иметь сигнатуру $(-1, 1)$ или $(1, -1)$). Также эта форма может быть всюду вырожденной или менять характер поведения на разных подмножествах D .

Мы будем предполагать, что всюду далее рассматриваются такие решения системы (1), для которых форма (5) положительно определена. В соответствии с этим, будем говорить, что решение

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (6)$$

этой системы порождает $\mathcal{A}$ -метрику (5). Тем самым $\mathcal{A}$ -поверхность $\mathcal{M}$ отождествляется с абстрактной поверхностью (D, ds_f^2) .

Определим следующую функцию

$$\delta(x) = \sqrt{A_{11}(x, f(x, f_{x_1}(x), f_{x_2}(x)))A_{22}(x, f_{x_1}(x), f_{x_2}(x)) - (A_{12}(x, f_{x_1}(x), f_{x_2}(x)))^2}. \quad (7)$$

Используя равенства (2), (3), (4), нетрудно видеть, что (1) означает условие δ -гармоничности в метрике (5) каждой компоненты $f_i(x)$ вектор-функции (6).

Всюду далее будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ стандартное скалярное произведение в евклидовой метрике $\mathbb{R}^N$, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в касательном пространстве $T_{f(x)}\mathcal{M}$, порожденном $\mathcal{A}$ -метрикой ds_f^2 . Кроме того, договоримся, что всюду далее обозначения операций ∇ , div и Δ_δ будут относиться к $\mathcal{A}$ -метрике ds_f^2 поверхности $\mathcal{M}$ и весовой функции (7).

Определение 1. Пусть $\Delta \subset D$ — произвольная подобласть области D , и $P, Q \subset \Delta$ — непустые, замкнутые относительно Δ , непересекающиеся множества. Тройка множеств $(P, Q; \Delta)$ такого вида называется конденсатором.

Договоримся называть любую функцию $\varphi(x) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, класса $\operatorname{Lip} \Delta$, обращающуюся в 1 на P и в 0 на Q , удовлетворяющую неравенству $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ всюду в D , допустимой для конденсатора $(P, Q; \Delta)$.

Для произвольного конденсатора $(P, Q; \Delta)$ можно определить следующую числовую характеристику

$$\operatorname{cap}_\delta(P, Q; \Delta) = \inf_{\varphi} \int_{\Delta} \delta(x) |\nabla \varphi|^2 d\sigma, \quad (8)$$

где $|\nabla \varphi|$ — модуль градиента в метрике ds_f^2 , $d\sigma = \delta(x) dx_1 dx_2$ — элемент площади в этой метрике, а точная нижняя грань берется по всевозможным функциям, допустимым для конденсатора $(P, Q; \Delta)$. Число $\operatorname{cap}_\delta(P, Q; \Delta)$ называется *весовой емкостью* конденсатора.

Замечание 2. Случай $\Delta = D$ допустим. При этом интеграл (8) в общем случае понимается в несобственном смысле.

Емкость обладает свойством монотонности: если $(P_1, Q_1; \Delta)$ еще один конденсатор такой, что $P_1 \subset P$, $Q_1 \subset Q$, то

$$\operatorname{cap}_\delta(P_1, Q_1; \Delta) \leq \operatorname{cap}_\delta(P, Q; \Delta). \quad (9)$$

2. $\mathcal{A}$ -трубки

2.1. Введем класс $\mathcal{A}$ -поверхностей в $\mathbb{R}^N$, которые, следуя [8], будем называть $\mathcal{A}$ -трубчатыми или просто $\mathcal{A}$ -трубками.

Пусть e — фиксированный вектор единичной длины в $\mathbb{R}^N$. Для произвольного вещественного числа t через $\Pi(t)$ обозначим гиперплоскость $\{y : \langle y, e \rangle_E = t\} \subset \mathbb{R}^N$.

Определение 2. $\mathcal{A}$ -поверхность $\mathcal{M}$ называется $\mathcal{A}$ -трубкой относительно направления e с проекцией (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$), если выполняются условия:

- 1) погружение $y = f(x)$ собственно, то есть прообраз $f^{-1}(K)$ любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^N$ компакт в D ;
- 2) множество $\Sigma_t = \Pi(t) \cap \mathcal{M}$ компактно в $\mathcal{M}$, не пусто и не содержит точек края $\partial \mathcal{M}$;
- 3) всякая порция поверхности $\mathcal{M}$, заключенная между гиперплоскостями $\Pi(t_1)$ и $\Pi(t_2)$, где $t_1, t_2 \in (a, b)$, компактное множество в $\mathcal{M}$.

Будем говорить, что $\mathcal{A}$ -поверхность $\mathcal{M}$, *трубчатая в целом* или *целая $\mathcal{A}$ -трубка*, если $(a, b) = (-\infty, +\infty)$.

Введем в рассмотрение функцию $t = f_e(x) = \langle f(x), e \rangle_E$. Функция $f_e(x) = \langle f(x), e \rangle_E$ является линейной комбинацией δ -гармонических функций, а потому сама является δ -гармонической.

Для произвольных $t, t_1, t_2 \in (a, b)$, $t_1 < t_2$, введем обозначения:

$$\begin{aligned} P_t &= \{x : x \in D, f_e(x) < t\}, \\ Q_t &= \{x : x \in D, f_e(x) > t\}, \\ E_t &= \{x : x \in D, f_e(x) = t\}, \\ D_{t_1, t_2} &= \{x : x \in D, t_1 < f_e(x) < t_2\}. \end{aligned}$$

Замечание 3. Отметим два очевидных момента. Во-первых, из топологических соображений ясно, что если отображение $y = f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ задает $\mathcal{A}$ -трубку, то D двусвязная область в $\mathbb{R}^2$. Во-вторых, в силу предположения 1), множество E_t компактно в D , поскольку $E_t = f^{-1}(\Sigma_t)$, а D_{t_1, t_2} — кольцевая область в D , ограниченная E_{t_1} и E_{t_2} .

2.2. Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{M}$ — $\mathcal{A}$ -трубка с проекцией (a, b) . Тогда для произвольной пары чисел $t_1, t_2 \in (a, b)$, $t_1 < t_2$, выполняется равенство

$$\text{cap}_\delta(\overline{P}_{t_1}, \overline{Q}_{t_2}; D) = \frac{J}{t_2 - t_1},$$

где $J > 0$ — некоторая константа.

Доказательство леммы 2. Покажем сначала, что интеграл

$$J = \int_{E_t} \delta(x) |\nabla f_e| ds_f > 0,$$

где $|\nabla f_e|$ — модуль градиента в метрике ds_f^2 , не зависит от t .

Возьмем произвольно пару чисел $\tau_1, \tau_2 \in (a, b)$, для определенности считая $\tau_1 < \tau_2$. Тогда с учетом δ -гармоничности $f_e(x)$ в $\mathcal{A}$ -метрике ds_f^2 , по формуле Стокса получаем равенство

$$\int_{D_{\tau_1, \tau_2}} \text{div}(\delta(x) \nabla f_e) d\sigma = \int_{\partial D_{\tau_1, \tau_2}} \delta(x) \langle \nabla f_e, \vec{\nu} \rangle ds_f = 0, \quad (10)$$

в котором $\vec{\nu}$ и $d\sigma$ соответственно единичная внешняя нормаль и элемент площади в метрике ds_f^2 к $\partial D_{\tau_1, \tau_2}$.

Очевидно, $\partial D_{\tau_1, \tau_2} = E_{\tau_1} \cup E_{\tau_2}$. Поскольку E_t суть линии уровня функции $t = f_e(x)$, то, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\vec{\nu} = \frac{\nabla f_e(x)}{|\nabla f_e(x)|} \text{ на } E_{\tau_2} \text{ и } \vec{\nu} = -\frac{\nabla f_e(x)}{|\nabla f_e(x)|} \text{ на } E_{\tau_1}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в правую часть (10), выводим равенство

$$\int_{E_{\tau_1}} \delta(x) |\nabla f_e| ds_f = \int_{E_{\tau_2}} \delta(x) |\nabla f_e| ds_f.$$

В вариационной задаче

$$\text{cap}_\delta(\overline{P}_{t_1}, \overline{Q}_{t_2}; D) = \inf_{\varphi} \int_D \delta(x) |\nabla \varphi(x)|^2 d\sigma, \quad (12)$$

положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{P}_{t_1}, \\ \frac{t_2 - f_e(x)}{t_2 - t_1}, & x \in D_{t_1, t_2}, \\ 0, & x \in \overline{Q}_{t_2}. \end{cases}$$

Тогда при $x \in D_{t_1, t_2}$ будем иметь $|\nabla \varphi|^2 = \frac{|\nabla f_e|^2}{(t_2 - t_1)^2}$ и, следовательно, будет справедливо неравенство

$$\text{cap}_\delta(\overline{P}_{t_1}, \overline{Q}_{t_2}; D) \leq \frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \int_{D_{t_1, t_2}} \delta(x) |\nabla f_e|^2 d\sigma.$$

Воспользовавшись формулой Кронрода — Федерера [1]

$$\frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \int_{D_{t_1, t_2}} \delta(x) |\nabla f_e|^2 d\sigma = \frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{E_t} \delta(x) |\nabla f_e| ds_f = \frac{J}{t_2 - t_1},$$

получим оценку

$$\text{cap}_\delta(\overline{P}_{t_1}, \overline{Q}_{t_2}; D) \leq \frac{J}{t_2 - t_1}.$$

Чтобы убедиться в наличии равенства, достаточно заметить, что функция $\varphi(x)$ является δ -гармоничной в метрике ds_f^2 и, следовательно, доставляет минимум в вариационной задаче (12). Лемма доказана.

Для целых $\mathcal{A}$ -трубок можно аналогичными рассуждениями установить следующую «двустороннюю» версию предыдущего утверждения.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{M}$ — целая $\mathcal{A}$ -трубка, и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ($t_1 < t_2$) — произвольная пара положительных чисел. Тогда

$$\text{cap}_\delta(\overline{D}_{-t_1, t_1}, \overline{D} \setminus D_{-t_2, t_2}; D) = \frac{2J}{t_2 - t_1},$$

где $J > 0$ — некоторая константа.

3. Основной результат

3.1. Следующие теоремы описывают геометрическое строение $\mathcal{A}$ -трубок. Их доказательства базируются на методе, развитом в работах [7; 8].

Теорема 1. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ — целая $\mathcal{A}$ -трубка, $N > 3$. Если существует гиперплоскость Π , не пересекающая $\mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ содержится в некоторой гиперплоскости Π_1 , параллельной Π .

Замечание 4. Заметим, что при $N = 3$ утверждение не имеет содержательного смысла ввиду двумерности M . С другой стороны, известные теоремы Хофмана и Микса о полупространстве [14] для минимальных поверхностей дают основание предполагать, что в трехмерном случае для целых $\mathcal{A}$ -трубок могут быть установлены теоремы с несколькими формулировками.

Доказательство. Пусть гиперплоскость Π задается уравнением

$$\langle y, p \rangle_E = c,$$

где $p \in \mathbb{R}^N$ ($p \neq 0$) — фиксированный вектор, а c — постоянное число.

Предположим для определенности, что поверхность M расположена в полупространстве $\langle y, p \rangle_E < c$, и рассмотрим δ -гармоническую в метрике ds_f^2 функцию $f_p(x) = \langle f(x), p \rangle_E$.

Зафиксируем произвольным образом точку $x^{(0)} \in D$ и зададим произвольную постоянную $c_1 < f_p(x^{(0)})$. Обозначим через U компоненту связности открытого множества $\{x : f_p(x) > c_1\}$, содержащую точку $x^{(0)}$. Очевидно, $U \neq \emptyset$, а функция $f_p(x) - c_1$ ограничена на U и обращается в 0 на ∂U .

Пусть $K \subset U$ — произвольное компактное множество. Зафиксируем t_0 так, чтобы $K \subset D_{-t_0, t_0}$, и будем рассматривать $t > t_0$.

Зададим локально липшицеву функцию $\varphi(x)$, допустимую при вычислении емкости конденсатора $(K, D \setminus D_{-t, t}; D)$. Тогда функция

$$g(x) = (f_p(x) - c_1)\varphi^2(x)$$

будет обращаться в 0 всюду на границе множества $U \cap D_{-t, t}$.

Воспользовавшись формулой Стокса, нетрудно получить равенство

$$\int_{U \cap D_{-t, t}} \langle \nabla g, \delta(x) \nabla f_p \rangle d\sigma = - \int_{U \cap D_{-t, t}} g \operatorname{div}(\delta(x) \nabla f_p) d\sigma.$$

Поскольку $\operatorname{div}(\delta(x) \nabla f_p) = 0$, то из последнего соотношения следует, что

$$\int_{U \cap D_{-t, t}} \varphi^2 \delta(x) |\nabla f_p|^2 d\sigma = -2 \int_{U \cap D_{-t, t}} \varphi (f_p - c_1) \langle \nabla \varphi, \delta(x) \nabla f_p \rangle d\sigma. \quad (13)$$

Замечая, что $|\langle \nabla \varphi, \nabla f_p \rangle| \leq |\nabla \varphi| |\nabla f_p|$, и применяя к правой части (13) интегральное неравенство Коши, получим

$$\begin{aligned} & \int_{U \cap D_{-t, t}} \varphi^2 \delta(x) |\nabla f_p|^2 d\sigma \leq \\ & \leq 2 \left(\int_{U \cap D_{-t, t}} (f_p - c_1)^2 \delta(x) |\nabla \varphi|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{U \cap D_{-t, t}} \varphi^2 \delta(x) |\nabla f_p|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Откуда нетрудно видеть, что

$$\int_{U \cap D_{-t, t}} \varphi^2 \delta(x) |\nabla f_p|^2 d\sigma \leq 4(c - c_1)^2 \int_{U \cap D_{-t, t}} \delta(x) |\nabla \varphi|^2 d\sigma \leq$$

$$\leq 4(c - c_1)^2 \int_D \delta(x) |\nabla \varphi|^2 d\sigma.$$

Учитывая, что $\varphi(x) = 1$ при $x \in K$, и переходя к точной нижней грани по всем $\varphi(x)$, допустимым для вычисления емкости конденсатора $(K, D \setminus \overline{D}_{-t,t}; D)$, будем иметь

$$\int_K \delta(x) |\nabla f_p|^2 d\sigma \leq 4(c - c_1)^2 \operatorname{cap}_\delta(K, D \setminus \overline{D}_{-t,t}; D).$$

Откуда в силу свойства монотонности емкости (9) и леммы 3 получаем

$$\int_K \delta(x) |\nabla f_p|^2 d\sigma \leq \frac{8(c - c_1)^2 J}{t - t_0}.$$

Устремляя t к $+\infty$, делаем вывод, что $|\nabla f_p| \equiv 0$ на K . В силу произвола в выборе $K \subset U$ заключаем, что $f_p(x) \equiv f_p(x^{(0)})$ при всех $x \in U$, а в силу произвола в выборе константы c_1 и всюду в D . Это означает, что M расположена в гиперплоскости $(y, p) = f_p(x^{(0)})$. Теорема доказана.

3.2. Требование, чтобы $\mathcal{A}$ -трубка M лежала в полупространстве, можно несколько ослабить, что вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть M — трубчатая относительно вектора $e \in \mathbb{R}^N$ $\mathcal{A}$ -поверхность с проекцией $(a, +\infty)$. Пусть $p \in \mathbb{R}^N$ — некоторый фиксированный вектор, и пусть $\mu(t) = \max_{E_t} \langle y, p \rangle_E$. Предположим, что $\mu(t_0) \leq \mu_0 < \infty$ при некотором $t_0 \in (a, +\infty)$. Тогда либо $\mu(t) \leq \mu_0$ при $t > t_0$, либо

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu(t)}{t} > 0. \quad (14)$$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим, как и в предыдущей теореме, δ -гармонические функции

$$f_p(x) = \langle f(x), p \rangle_E, \quad f_e(x) = \langle f(x), e \rangle_E.$$

Допустим, что $\mu(t) > \mu_0$ при некотором $t > t_0$. Выберем точку $x^{(1)} \in D$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$f_p(x^{(1)}) > \mu_0, \quad f_e(x^{(1)}) > t_0.$$

Обозначим через U компоненту связности множества $\{x : f_p(x) > \mu_0\}$, содержащую точку $x^{(1)}$, и зададим произвольно компакт $K \subset U$.

Положим $t' = \max_{x \in K} f_e(x)$ и возьмем произвольно число $t > t'$. Зададим локально липшицеву функцию $\varphi(x)$, допустимую при вычислении емкости конденсатора $(\overline{P}_{t'}, \overline{Q}_t; D)$. Тогда функция

$$g(x) = \varphi^2(x)(f_p(x) - \mu_0)$$

будет иметь компактный носитель, содержащийся в U .

По формуле Стокса нетрудно получить равенство

$$\int_U \langle \nabla g, \delta(x) \nabla f_p \rangle d\sigma = - \int_U g \operatorname{div}(\delta(x) \nabla f_p) d\sigma.$$

Далее, воспользовавшись δ -гармоничностью $f_p(x)$ в метрике ds_f^2 и рассуждениями как при доказательстве предыдущей теоремы, приходим к неравенству

$$\int_U \varphi^2 \delta(x) |\nabla f_p|^2 d\sigma \leq 4 \int_U (f_p - \mu_0)^2 \delta(x) |\nabla \varphi|^2 d\sigma,$$

из которого, в свою очередь, получаем

$$\int_K \delta(x) |\nabla f_p|^2 d\sigma \leq 4 \int_{U \setminus (\overline{P}_{t'} \cup \overline{Q}_t)} (f_p - \mu_0)^2 \delta(x) |\nabla \varphi|^2 d\sigma. \quad (15)$$

По принципу максимума для любого $x \in U \setminus (\overline{P}_{t'} \cup \overline{Q}_t)$ выполнено неравенство

$$(f_p(x) - \mu_0)^2 \leq (\mu(t) - \mu_0)^2.$$

Тогда из (15) и свойства монотонности емкости вытекает оценка

$$\int_K \delta(x) |\nabla f_p|^2 d\sigma \leq (\mu(t) - \mu_0)^2 \operatorname{cap}_\delta(\overline{P}_{t'}, \overline{Q}_t; D),$$

и, согласно результату леммы 2,

$$\int_K \delta(x) |\nabla f_p|^2 d\sigma \leq (\mu(t) - \mu_0)^2 \frac{J}{t - t'}, \quad (16)$$

где J — некоторая константа.

Из последнего неравенства получаем, что

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu(t)}{\sqrt{t}} > 0. \quad (17)$$

Действительно, если соотношение (17) не выполняется, то из неравенства (16) следует, что всюду на K

$$|\nabla f_p(x)| = 0.$$

Пользуясь произволом в выборе $K \subset U$, заключаем, что $f_p \equiv \text{const}$ на U . Это противоречит выбору точки $x^{(1)} \in U$, в которой $f_p(x^{(1)}) > \mu_0$.

Таким образом, с учетом леммы 1, $\mu(t)$ неограниченная выпуклая вниз на $[t_0, +\infty)$ функция. Тем самым ее порядок не меньше 1 и, значит, выполнено неравенство (14). Теорема доказана.

Доказанные теоремы 1, 2 можно рассматривать как геометрические версии теорем Лиувилля и Фрагмена — Линделефа, аналогичные соответствующим теоремам работ [7; 8] для минимальных трубок в евклидовом пространстве. Как и в указанных работах, результаты теорем основаны на параболичности типа граничных множеств (см., например, [6; 9]). В нашей работе мы не вводили этого понятия явно, однако неявно свойство параболичности дают леммы 2, 3. Следует также отметить, что ранее системы (1) были рассмотрены в работе автора [5] при ограничении

$$A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 \equiv 1,$$

$A_{ij} = A_{ij}(x, y, \xi, \zeta)$. Основной сферой приложения систем вида (1) автор видит в их использовании для изучения поверхностей с положительно определенной метрикой в псевдоевклидовых пространствах при ограничениях на среднюю кривизну (из недавних работ см. по этому поводу, например, [12; 13; 15]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бураго, Ю. Д. Геометрические неравенства / Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер. — Л. : Наука, 1980. — 288 с.
2. Клячин, В. А. Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 1. — С. 206–217. — DOI: <https://doi.org/10.1070/IM1992v038n01ABEH002194>
3. Клячин, В. А. Максимальные трубчатые поверхности произвольной коразмерности в пространстве Минковского / В. А. Клячин // Изв. РАН. Сер. матем. — 1993. — Т. 57, № 4. — С. 118–131. — DOI: <https://doi.org/10.1070/IM1994v043n01ABEH001551>
4. Кондрашов, А. Н. Двумерные поверхности нулевой средней кривизны в псевдоевклидовом пространстве / А. Н. Кондрашов // Научные школы Волгоградского государственного университета. Геометрический анализ и его приложения. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 1999. — С. 244–268.
5. Кондрашов, А. Н. Системы уравнений типа нулевой средней кривизны / А. Н. Кондрашов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2006. — Т. 10. — С. 22–39.
6. Кондрашов, А. Н. Некоторые дифференциальные соотношения, обеспечивающие параболичность типа / А. Н. Кондрашов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2025. — Т. 28, № 4. — С. 5–23. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.3.8>
7. Миклюков, В. М. О некоторых свойствах трубчатых минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ / В. М. Миклюков // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 3. — С. 549–552.
8. Миклюков, В. М. Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности / В. М. Миклюков, В. Г. Ткачев // Мат. сб. — 1989. — Т. 180, № 222. — С. 1278–1295. — DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1991v068n01ABEH002101>
9. Миклюков, В. М. Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей / В. М. Миклюков // Изв. РАН. Сер. мат. — 1996. — Т. 60, № 4. — С. 111–158. — DOI: <https://doi.org/10.4213/im80>
10. Постников, М. М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра / М. М. Постников. — М. : Наука, 1986. — 400 с.
11. Позняк, Э. Г. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин. — М. : Изд-во МГУ, 1990. — 384 с.
12. Fernández, I. The Space of Complete Embedded Maximal Surfaces with Isolated Singularities in the 3-Dimensional Lorentz-Minkowski Space / I. Fernández, F. J. López, R. Souam // Math. Ann. — 2005. — Vol. 332. — P. 605–643. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s00208-005-0642-6>
13. Gao, Y. A Stability Result for Translating Spacelike Graphs in Lorentz Manifolds / Y. Gao, J. Mao, C. Wu // Acta Math. Sci. — 2024. — Vol. 44. — P. 474–483. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s10473-024-0206-z>
14. Hoffman, D. The Strong Halfspace Theorem for Minimal Surfaces / D. Hoffman, W. H. Meeks // Invent. Math. — 1990. — Vol. 101. — P. 373–377. — DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01231506>
15. Soria, A. Spacelike Hypersurfaces in Twisted Product Spacetimes with Complete Fiber and Calabi – Bernstein-Type Problems / A. Soria // J. Geom. — 2023. — Vol. 114, № 16. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s00022-023-00677-3>

REFERENCES

1. Burago Yu.D., Zalgaller V.A. *Geometric Inequalities*. Leningrad, Nauka Publ., 1980. 288 p.

2. Klyachin V.A., Miklyukov V.M. Maximal Tubular Hypersurfaces in Minkowski Space. *Izv. AN SSSR. Ser. matem.* [Math. USSR-Izv.], 1992, vol. 38, no. 1, pp. 203-213. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM1992v038n01ABEH002194>
3. Klyachin V.A. Maximal Tubular Surfaces of Arbitrary Codimension in the Minkowski Space. *Izv. RAN. Ser. matem.* [Russian Acad. Sci. Izv. Math.], 1994, vol. 43, no. 1, pp. 105-118. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM1994v043n01ABEH001551>
4. Kondrashov A.N. Two-Dimensional Surfaces of Zero Mean Curvature in Pseudo-Euclidean Space. *Nauchnye shkoly Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Geometricheskii analiz i ego prilozheniya* [Scientific Schools of Volgograd State University. Geometric Analysis and Its Applications]. Volgograd, VolGU, 1999, pp. 244-268.
5. Kondrashov A.N. Systems of Zero Mean Curvature Type. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. 1, Matematika. Fizika* [Volgograd State University. Series 1: Math. Phys.], 2006, vol. 10, pp. 22-39.
6. Kondrashov A.N. Some Relations That Ensure the Parabolicity of the Type. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2025, vol. 28, no. 4, pp. 5-23. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.3.8>
7. Miklyukov V.M. On Some Properties of Tubular Minimal Surfaces in $\mathbb{R}^n$. *DAN SSSR* [Dokl. Akad. Nauk SSSR], 1979, vol. 247, no. 3, pp. 549-552.
8. Miklyukov V.M., Tkachev V.G. Some Properties of the Tubular Minimal Surfaces of Arbitrary Codimension. *Mat. sb.* [Math. USSR-Sb.], 1991, vol. 68, no. 1, pp. 133-150. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1991v068n01ABEH002101>
9. Miklyukov V.M. Some Criteria of Parabolicity and Hyperbolicity for Boundary Sets of Surfaces. *Izv. RAN. Ser. mat.* [Izvestiya: Mathematics], 1996, vol. 60, no. 4, pp. 111-158. DOI: <https://doi.org/10.4213/im80>
10. Postnikov M.M. *Lectures on Geometry. Semester II. Linear Algebra*. Moscow, Nauka Publ., 1986. 400 p.
11. Poznyak E.G., Shikin E.V. *Differential Geometry. The First Acquaintance*. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, 1990. 384 p.
12. Fernández I., López F.J., Souam R. The Space of Complete Embedded Maximal Surfaces with Isolated Singularities in the 3-Dimensional Lorentz-Minkowski Space. *Math. Ann.*, 2005, vol. 332, pp. 605-643. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00208-005-0642-6>
13. Gao Y., Mao J., Wu C. A Stability Result for Translating Spacelike Graphs in Lorentz Manifolds. *Acta Math. Sci.*, 2024, vol. 44, pp. 474-483. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10473-024-0206-z>
14. Hoffman D., Meeks W.H. The Strong Halfspace Theorem for Minimal Surfaces. *Invent. Math.*, 1990, vol. 101, pp. 373-377. DOI: [10.1007/BF01231506](https://doi.org/10.1007/BF01231506)
15. Soria A. Spacelike Hypersurfaces in Twisted Product Spacetimes with Complete Fiber and Calabi -- Bernstein-Type Problems. *J. Geom.*, 2023, vol. 114, no. 16. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00022-023-00677-3>

LIOUVILLE-TYPE THEOREMS FOR TUBULAR $\mathcal{A}$ -SURFACES

Alexander N. Kondrashov

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
 Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
 Volgograd State University
 ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-1614-0393>
 Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. This paper is devoted to establishing analogs of the geometric versions of the Liouville and Phragmén – Lindelöf theorems, known from the works of V.M. Miklyukov and his students (V.G. Tkachev, V.A. Klyachin, A.N. Kondrashov), for entire minimal tubes in Euclidean space and maximal ones in Minkowski space-time. Specifically, we obtain two theorems that serve as such analogs for certain systems of divergence-type differential equations. More precisely, consider solutions $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2)$, $N \geq 3$ of the above system, which define an proper immersion of D in $\mathbb{R}^N$. To each such solution we associate a two-dimensional surface $\mathcal{M}$ in the Euclidean space $\mathbb{R}^N$. The properties of some types of such surfaces are the same as those of surfaces of zero mean curvature with a positive-definite metric, in general, in pseudo-Euclidean space. Such surfaces $\mathcal{M}$ are called $\mathcal{A}$ -surfaces. By analogy with tubular minimal surfaces in Euclidean space, we introduce the concept of tubular $\mathcal{A}$ -surfaces ($\mathcal{A}$ -tubes) with respect to a given direction and study their global geometric properties. The two theorems have been established for $\mathcal{A}$ -tubes. The first theorem (a Liouville-type result) states that if an entire $\mathcal{A}$ -tube lies entirely in one of the two closed half-spaces into which a hyperplane divides the space $\mathbb{R}^N$, then the tube must in fact be a subset of a hyperplane parallel to the bounding one. The second theorem concerns $\mathcal{A}$ -tubes with a semi-infinite projection and provides an estimate for the growth of the surface width. It represents a geometric version of the Phragmén – Lindelöf theorem. The proofs are based on capacity methods developed in the aforementioned works of V.M. Miklyukov.

Key words: zero mean curvature type systems, Liouville-type theorems, $\mathcal{A}$ -surface, $\mathcal{A}$ -tubular surfaces, δ -harmonic functions, weighted capacity, Phragmén – Lindelöf principle.