



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.1.6>

УДК 519.63

ББК 22.193

Дата поступления статьи: 19.11.2025

Дата принятия статьи: 03.02.2026

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СПЛАЙН-СХЕМА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФфуЗИОННО-КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Алексей Юрьевич Рахманов

Аспирант физико-математического института,
Пермский государственный национальный исследовательский университет
alx.rakhmanov@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0001-3332-2124>
ул. Букирева, 15, 614990 г. Пермь, Российская Федерация

Сергей Владимирович Русаков

Доктор физико-математических наук, профессор центра
прикладной математики и физики,
Пермский государственный национальный исследовательский университет
rusakov@psu.ru
<https://orcid.org/0000-0001-6862-1100>
ул. Букирева, 15, 614990 г. Пермь, Российская Федерация

Цитирование: Рахманов А. Ю., Русаков С. В. Локально-одномерная сплайн-схема четвертого порядка для квазилинейного диффузионно-кинетического уравнения с подвижной границей // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2026. Т. 29, № 1. С. 66–76. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.1.6>

Citation: Rakhmanov A.Y., Rusakov S.V. Locally One-Dimensional Fourth-Order Spline Scheme for a Quasilinear Diffusion-Kinetic Equation in Polar Coordinates with a Moving Boundary. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2026, vol. 29, no. 1, pp. 66-76. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.1.6>

Аннотация. Рассматривается обобщение компактной разностной сплайн-схемы для интегрирования двумерного параболического дифференциального уравнения диффузионно-кинетического типа, обеспечивающей 4-й порядок пространственной аппроксимации, в случае зависимости подвижной границы $s(\varphi, t) = r_0 + \delta(\varphi, t)$ от угла и времени. Задача рассматривается в полярных координатах. Построение разностной схемы реализовано с помощью последовательного применения одномерного интерполяционного кубического сплайна по пространственным переменным. Контрольный объем разностной схемы по радиальной переменной составляет $2h_r$.

Ключевые слова: численные методы, сплайн-аппроксимация, кубический сплайн, параболические уравнения, полярные координаты, подвижная граница.

Введение

Начально-краевые задачи для нестационарных неоднородных параболических уравнений (или систем уравнений), удовлетворяющих заданным начальным и граничным условиям, применяются для описания широкого класса физико-химических процессов. К таким постановкам, в частности, относятся различные задачи теплопроводности, а также моделирования диффузионно-кинетических процессов. Задача моделирования отверждения эпоксидного полимера, представленная в работе [5], приводит к необходимости решения системы диффузионно-кинетических уравнений. В работе [3] предложена компактная разностная схема для одномерного варианта задачи полимеризации эпоксидного связующего. В ходе дальнейшего исследования необходимость учета пространственной неоднородности процесса выявила потребность в обобщении разностной схемы на двумерный случай [1]. Модификация схемы для случая движения границы $x_L(t)$, обусловленного частичным уносом вещества на границе, представлена в работе [2].

При моделировании реального физического процесса отверждения слоя эпоксидного полимера на продольной поверхности разворачиваемой конструкции также требуется учитывать неравномерность нагрева поверхности конструкции из-за ее вращения [6], вследствие этого происходит неравномерный унос части вещества. В данной статье рассматривается разностная схема численного интегрирования задачи отверждения эпоксидного связующего при условии нестационарного уноса вещества, зависящего от угла поворота, приводящего к неравномерному смещению внешней границы задачи. Рассматривается двумерная постановка в полярных координатах (r, φ) для поперечного сечения тела вращения, образованного плоскостью, перпендикулярной оси вращения.

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим смешанную начально-краевую задачу для двумерного параболического уравнения диффузионно-кинетического типа относительно функции $u(r, \varphi, t)$ в области $P_u = \{(r, \varphi, t) : r_0 \leq r \leq r_0 + \delta(\varphi, t), 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq t \leq T\}$, где правая граница $s(\varphi, t) = r_0 + \delta(\varphi, t)$ может зависеть от угла и времени (рис. 1). Основное уравнение имеет вид

$$u_t = \frac{1}{r} \partial_r(r D(u) \partial_r u) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi(D(u) \partial_\varphi u) + K(u, r, \varphi, t) u. \quad (1)$$

Начальные условия задаются выражениями

$$u(r, \varphi, 0) = u^0(r, \varphi), \quad \delta(\varphi, 0) = \delta^0(\varphi). \quad (2)$$

Также заданы угловые условия периодичности

$$u(r, \varphi_0, t) = u(r, \varphi_N, t), \quad u(r, \varphi_0 + h_\varphi, t) = u(r, \varphi_N + h_\varphi, t) \quad (3)$$

и интегральные условия согласования

$$\int_{\varphi_0}^{h_\varphi} u(r, \theta, t) d\theta = \int_{\varphi_N}^{\varphi_N + h_\varphi} u(r, \theta, t) d\theta. \quad (4)$$

Граничные условия по радиальной переменной r имеют вид:

$$\partial_r u|_{r=r_0} = 0, \quad D(u) \partial_r u|_{r=r_0 + \delta(\varphi, t)} = -\alpha_1(\varphi, t) u(r_0 + \delta(\varphi, t), \varphi, t). \quad (5)$$

При этом закон движения внешней границы определяется следующим выражением:

$$\partial_t \delta(\varphi, t) = \lambda \left(\partial_r u|_{r=r_0 + \delta(\varphi, t)} - \partial_r u|_{r=r_0} \right). \quad (6)$$

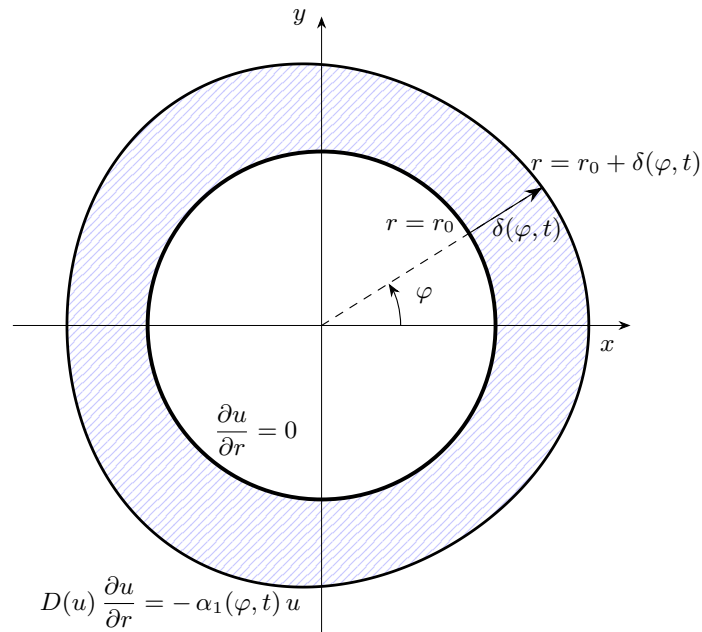
Здесь $r \in [r_0, r_0 + \delta(\varphi, t)]$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_N = 2\pi$, при этом шаг h_φ выбирается так, что $\varphi_0 < h_\varphi < \varphi_N$.

Применим метод выпрямления фронта [4], сделав замену переменных типа Ландау – Лифшица. Пусть $\xi = (r - r_0)/\delta(\varphi, t)$, $v(\xi, \varphi, t) = u(r, \varphi, t) = u(r_0 + \xi\delta(\varphi, t), \varphi, t)$. Тогда производные в (1) примут вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u(r, \varphi, t)}{\partial t} &= \frac{\partial v(\xi, \varphi, t)}{\partial t} - \frac{\xi}{\delta(\varphi, t)} \frac{\partial \delta(\varphi, t)}{\partial t} \frac{\partial v(\xi, \varphi, t)}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u(r, \varphi, t)}{\partial r} &= \frac{1}{\delta(\varphi, t)} \frac{\partial v(\xi, \varphi, t)}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} &= \frac{\partial v(\xi, \varphi, t)}{\partial \varphi} - \frac{\xi}{\delta(\varphi, t)} \frac{\partial \delta(\varphi, t)}{\partial \varphi} \frac{\partial v(\xi, \varphi, t)}{\partial \xi}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

В результате начально-краевая задача (1)–(6) после замены переменных примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\xi}{\delta(\varphi, t)} \frac{\partial \delta}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{r_0 + \xi\delta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(r_0 + \xi\delta) D(v) \frac{1}{\delta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] + \\ &+ \frac{1}{(r_0 + \xi\delta)^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[D(v) \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\xi}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right] + K(v, r_0 + \xi\delta, \varphi, t) v, \\ &v(\xi, \varphi, 0) = u^0(r_0 + \xi\delta(\varphi, 0), \varphi), \quad \delta(\varphi, 0) = \delta^0(\varphi), \\ &\frac{\partial v(0, \varphi, t)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{D(v(1, \varphi, t))}{\delta(\varphi, t)} \frac{\partial v(1, \varphi, t)}{\partial \xi} = -\alpha_1(\varphi, t) v(1, \varphi, t), \\ &v(\xi, \varphi_0 + h_\varphi, t) = v(\xi, \varphi_N + h_\varphi, t), \quad \int_{\varphi_0}^{h_\varphi} v(\xi, \theta, t) d\theta = \int_{\varphi_N}^{\varphi_N + h_\varphi} v(\xi, \theta, t) d\theta, \\ &\frac{\partial \delta(\varphi, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\delta(\varphi, t)} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \right), \\ &\xi \in [0, 1], \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_N = 2\pi, \quad \varphi_0 < h_\varphi < \varphi_N. \end{aligned} \right. \quad (8)$$


 Рис. 1. Геометрия задачи в полярных координатах (r, φ)

2. Численный метод

Будем проводить построение конечно-разностной схемы на сетке $\Omega_{h_\xi, h_\varphi, \tau} = \{t_k, 0 \leq k \leq K, t_0 = 0, t_K = T\} \times \omega_\xi \times \omega_\varphi$, где $\omega_\xi = \{\xi_i = ih_\xi, i = \overline{0, N_\xi}, h_\xi = \delta(\varphi, t)/N_\xi\}$, $\omega_\varphi = \{\varphi_j = jh_\varphi, j = \overline{0, N_\varphi}, h_\varphi = (\varphi_N - \varphi_0)/N_\varphi\}$. Поскольку целью работы является построение схемы высокого порядка точности по пространству, для лаконичности рассмотрим схему с производной первого порядка по времени $\partial_t \tilde{v}_{i+1/2, j+1/2}^{(n)} = (\tilde{v}_{i+1/2, j+1/2}^{(n+1)} - \tilde{v}_{i+1/2, j+1/2}^{(n)})/\Delta\tau$ в левой части основного уравнения разностной схемы (8). Проинтегрируем по контрольному объему $[\xi_i, \xi_{i+1}] \cdot [\varphi_j, \varphi_{j+1}]$ основное уравнение в новых координатах (8) и сформулируем разностную схему (рис. 2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{v}_{i+1/2, j+1/2}^{(n)}}{\partial t} = \frac{I_1^{(num)} + I_2^{(num)} + I_3^{(num)} + I_4^{(num)}}{h_\xi h_\varphi}, \\ \tilde{v}_{i+1/2, j+1/2}^{(0)} = \frac{1}{h_r h_\varphi} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} u(r, \varphi, 0) d\varphi dr, \\ J_{0,j}^{\xi, (n)} = 0, \quad D(v_{N_\xi, j}^{(n)}) J_{N_\xi, j}^{\xi, (n)} = -\alpha_1(\varphi, t) \delta(\varphi, t) v_{N_\xi, j}^{(n)}, \\ \tilde{v}_{i+1/2, 1/2}^{(n)} = \tilde{v}_{i+1/2, N_\varphi+1/2}^{(n)}, \quad \tilde{v}_{i+1/2, 0}^{(n)} = \tilde{v}_{i+1/2, N_\varphi}^{(n)}, \\ v_{i, 1/2}^{(n)} = v_{i, N_y+1/2}^{(n)}, \quad v_{i, 0}^{(n)} = v_{i, N_y}^{(n)}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Для каждого члена правой части уравнения (9) введем аналитические выражения R_k , сохраняющие полную структуру подынтегральных выражений исходной задачи.

Численные аналоги $I_k^{(num)}$ определяются как выражения, полученные из R_k заме-

ной всех содержащихся в них интегралов на их аппроксимации по формуле Симпсона четвертого порядка:

$$I_k^{(\text{num})} = R_k|_{f \rightarrow S_4}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

Здесь $S_4[\cdot]$ обозначает оператор численного интегрирования по формуле Симпсона четвертого порядка.

Подробно рассмотрим аналитический вид слагаемых R_k .

Компонент R_1 – интегральное среднее для слагаемого, содержащего временную производную $\delta'_t(\varphi, t)$:

$$\begin{aligned} R_1 = & \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \frac{\delta'_t(\varphi, t)}{\delta(\varphi, t)} [\xi_{i+1} v(\xi_{i+1}, \varphi, t) - \xi_i v(\xi_i, \varphi, t)] d\varphi - \\ & - \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{\delta'_t(\varphi, t)}{\delta(\varphi, t)} v(\xi, \varphi, t) d\xi d\varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Компонент R_2 – интегральное среднее для слагаемого, описывающего радиальную составляющую диффузии:

$$\begin{aligned} R_2 = & \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \left(\frac{G'_\xi}{\delta(\varphi, t)} \Big|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} + \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{G'_\xi}{r_0 + \xi \delta(\varphi, t)} d\xi \right) d\varphi = \\ = & \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \left(\frac{G'_\xi}{\delta} \Big|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} + \frac{G}{r_0 + \xi \delta} \Big|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} + \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{\delta G}{(r_0 + \xi \delta)^2} d\xi \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Компонент R_3 – интегральное среднее для слагаемого, описывающего угловую составляющую диффузии:

$$\begin{aligned} R_3 = & \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{G'_\varphi}{(r_0 + \xi \delta)^2} \Big|_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} d\xi - \left(\frac{G \xi \delta'_\varphi}{\delta (r_0 + \xi \delta)^2} \Big|_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \right) \Big|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} + \\ & + \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \left[\frac{G \delta'_\varphi (r_0 - \xi \delta)}{\delta (r_0 + \xi \delta)^3} \right]_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} d\xi + \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \frac{2 G'_\varphi \xi \delta'_\varphi}{(r_0 + \xi \delta)^3} d\varphi d\xi - \\ & - \left(\int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \frac{2 G (\xi \delta'_\varphi)^2}{\delta (r_0 + \xi \delta)^3} d\varphi \right) \Big|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} + \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \frac{2 G \xi (\delta'_\varphi)^2 (2r_0 - \xi \delta)}{\delta (r_0 + \xi \delta)^4} d\varphi d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Компонент R_4 – интегральное среднее для слагаемого, описывающего влияние источника $K(v)v$:

$$R_4 = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} K(v(\xi, \varphi, t), r_0 + \xi \delta(\varphi, t), \varphi, t) v(\xi, \varphi, t) d\varphi d\xi. \quad (14)$$

Таким образом, правая часть основного уравнения (9) содержит сумму четырех выражений $I_k^{(\text{num})} = R_k|_{f \rightarrow S_4}$ ($k = 1, 2, 3, 4$), что обеспечивает четвертый порядок точности аппроксимации по обеим переменным ξ и φ .

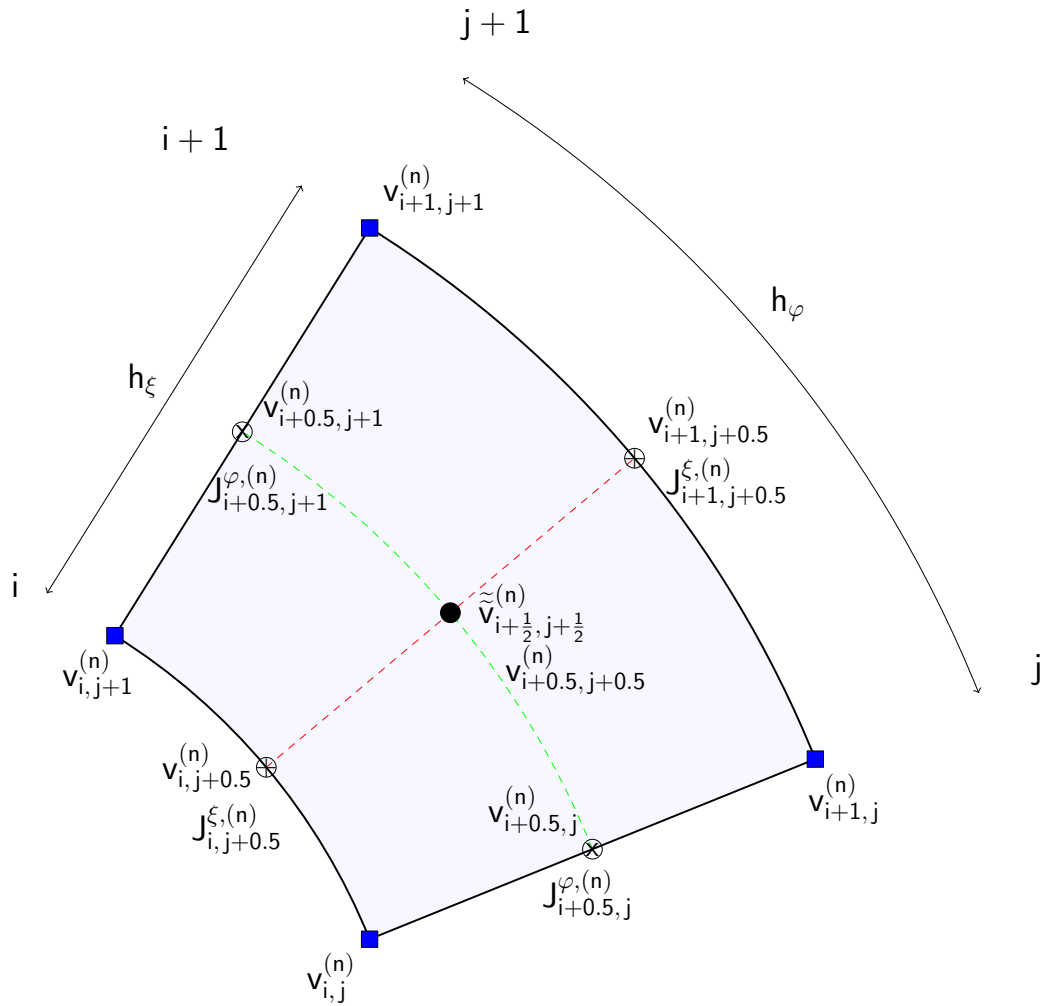


Рис. 2. Аппроксимация значений функции $v(\xi, \varphi, t)$ и ее частных производных в целых и полуцелых узлах расчетной сетки для шага $t = t_n$

Сформулируем основные разностные операторы задачи (9) (рис. 2):

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{i,j}^{(n)} \cong v(\xi_i, \varphi_j, t_n) + O(h_{\xi}^4 + h_{\varphi}^4), \\ \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n)} \cong \frac{1}{h_{\varphi}} \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} v(\xi_i, \varphi, t_n) d\varphi + O(h_{\xi}^4 + h_{\varphi}^4), \\ \tilde{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)} \cong \frac{1}{h_{\xi}} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} v(\xi, \varphi_j, t_n) d\xi + O(h_{\xi}^4 + h_{\varphi}^4), \\ v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{(n)} \cong v(\xi_i + \frac{1}{2}h_{\xi}, \varphi_j + \frac{1}{2}h_{\varphi}, t_n) + O(h_{\xi}^4 + h_{\varphi}^4), \\ v_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)} \cong v(\xi_i + \frac{1}{2}h_{\xi}, \varphi_j, t_n) + O(h_{\xi}^4 + h_{\varphi}^4), \\ v_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n)} \cong v(\xi_i, \varphi_j + \frac{1}{2}h_{\varphi}, t_n) + O(h_{\xi}^4 + h_{\varphi}^4). \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{i,j}^{\xi,(n)} \cong \frac{\partial v(\xi_i, \varphi_j, t_n)}{\partial \xi} + O(h_\xi^4 + h_\varphi^4), \\ J_{i,j}^{\varphi,(n)} \cong \frac{\partial v(\xi_i, \varphi_j, t_n)}{\partial \varphi} + O(h_\xi^4 + h_\varphi^4), \\ \tilde{J}_{i,j+\frac{1}{2}}^{\xi,(n)} \cong \frac{1}{h_\varphi} \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \frac{\partial v(\xi_i, \varphi, t_n)}{\partial \xi} d\varphi + O(h_\xi^4 + h_\varphi^4), \\ \tilde{J}_{i+\frac{1}{2},j}^{\varphi,(n)} \cong \frac{1}{h_\xi} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{\partial v(\xi, \varphi_j, t_n)}{\partial \varphi} d\xi + O(h_\xi^4 + h_\varphi^4), \\ J_{i+\frac{1}{2},j}^{\varphi,(n)} \cong \frac{\partial v(\xi_i + \frac{1}{2}h_\xi, \varphi_j, t_n)}{\partial \varphi} + O(h_\xi^4 + h_\varphi^4), \\ J_{i,j+\frac{1}{2}}^{\xi,(n)} \cong \frac{\partial v(\xi_i, \varphi_j + \frac{1}{2}h_\varphi, t_n)}{\partial \xi} + O(h_\xi^4 + h_\varphi^4). \end{array} \right. \quad (16)$$

Последовательность нахождения разностных операторов (15)–(16) соответствует алгоритму, описанному в [1]. Аналитический вид интегралов (11)–(14) позволяет обеспечить компактность (контрольный объем, равный $2h_\xi$) разностной схемы по радиальной переменной.

3. Результаты вычислительных экспериментов

Исследуем порядок пространственной аппроксимации разностной схемы (9) методом Рунге. Введем вспомогательные обозначения ошибок аппроксимаций для точечных и интегральных средних значений:

$$\begin{aligned} \text{Err}_{i,j}^{(n)}(h) &= \|v_{i,j}^{(n)} - u(r_i, \varphi_j, t^{(n)})\|_{L_2}, \\ p_{i,j}^{(n)}(h) &= \log_2 \left(\frac{\text{Err}_{i,j}^{(n)}(h)}{\text{Err}_{i,j}^{(n)}(h/2)} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Первоначально применим метод Рунге для сравнения полученных с помощью разностной схемы (9) численных и известных точных значений для заранее известных аналитических функций:

$$\begin{aligned} \delta(\varphi, t) &= (a_0 + a_1 e^{-\gamma t})(1 + a_2 \cos(k\varphi)), \\ a_0 &= 0.4, \quad a_1 = 0.35, \quad \gamma = 0.5, \quad a_2 = 0.05, \quad k = \frac{2\pi}{\varphi_N - \varphi_0}, \\ v(\xi, \varphi, t) &= \left(V_0(1 - \alpha \xi^4) + \frac{V_1}{1 + \beta \xi^2} \right) \cos(k\varphi) e^{-\Phi t}, \\ V_0 &= 10, \quad \alpha = 0.25, \quad V_1 = 2, \quad \beta = 0.25, \quad \Phi = 0.3. \end{aligned} \quad (18)$$

В первом случае зафиксируем шаг по времени на уровне значения, которое удовлетворяет условию устойчивости разностной схемы для минимального из рассматриваемых шагов по пространству для оценки изолированного вклада пространственного шага в погрешность аппроксимации схемы (см. табл. 1).

Таблица 1

Оценка порядка аппроксимации, шаг по времени всегда соответствует минимальному h из серии ($\tau \sim (h_{\min})^4$)

N_ξ	N_φ	h	h_ξ	h_φ	$\text{Err}_{i,j}^{(n)}$	$p_{i,j}^{(n)}(h)$	$\Delta\tau$
8	8	1,25E-01	1,25E-01	1,25E-01	7,65E-02	–	1,53E-10
16	16	6,25E-02	6,25E-02	6,25E-02	4,41E-03	4,1179	1,53E-10
32	32	3,13E-02	3,13E-02	3,13E-02	2,68E-04	4,0397	1,53E-10
64	64	1,56E-02	1,56E-02	1,56E-02	1,66E-05	4,0161	1,53E-10
128	128	7,81E-03	7,81E-03	7,81E-03	1,02E-06	4,0256	1,53E-10
256	256	3,91E-03	3,91E-03	3,91E-03	4,97E-08	4,3551	1,53E-10

Во втором случае будем варьировать значение $\Delta\tau$ вместе с шагом по пространству $h(h_\xi, h_\varphi)$, также при этом оставаясь в области устойчивости схемы по начальным данным (табл. 2).

Таблица 2

Оценка порядка аппроксимации, шаг по времени соответствует текущему h из серии ($\tau \sim (h)^4$)

N_ξ	N_φ	h	h_ξ	h_φ	$\text{Err}_{i,j}^{(n)}$	$p_{i,j}^{(n)}(h)$	$\Delta\tau$
8	8	1,25E-01	1,25E-01	1,25E-01	7,04E-02	–	6,10E-05
16	16	6,25E-02	6,25E-02	6,25E-02	4,03E-03	4,1251	3,81E-06
32	32	3,13E-02	3,13E-02	3,13E-02	2,45E-04	4,0415	2,38E-07
64	64	1,56E-02	1,56E-02	1,56E-02	1,51E-05	4,0154	1,49E-08
128	128	7,81E-03	7,81E-03	7,81E-03	9,42E-07	4,0064	9,31E-10
256	256	3,91E-03	3,91E-03	3,91E-03	5,88E-08	4,0029	5,82E-11

Также проведем тестирование методом Рунге на основе измерения ошибок в процессе сгущения пространственной сетки, без известных аналитических функций (табл. 3).

Таблица 3

Оценка порядка аппроксимации методом Рунге, шаг по времени всегда соответствует минимальному h из серии ($\tau \sim (h_{\min})^4$)

N_ξ	N_φ	h	h_ξ	h_φ	$p_{i,j}^{(n)}(h)$	$\Delta\tau$
8	8	1,25E-01	1,25E-01	1,25E-01	–	1,53E-06
16	16	6,25E-02	6,25E-02	6,25E-02	–	1,53E-06
32	32	3,13E-02	3,13E-02	3,13E-02	4,006	1,53E-06
64	64	1,56E-02	1,56E-02	1,56E-02	4,2444	1,53E-06
128	128	7,81E-03	7,81E-03	7,81E-03	4,0558	1,53E-06
256	256	3,91E-03	3,91E-03	3,91E-03	3,5247	1,53E-06

Как видно из результатов вычислительных экспериментов, значение параметра Рунге $p_{i,j}^{(n)}(h) \sim 4$ соответствует теоретически ожидаемому [1] значению.

Заключение

В работе предложен численный метод, обобщающий двумерную разностную схему [1; 2] для случая полярных координат, а также эволюции геометрии задачи с подвижной внешней границей $s(\varphi, t)$, движение которой зависит как от времени, так и от угловой координаты. Рассмотренная модификация сохраняет четвертый порядок пространственной аппроксимации при сохранении компактности разностного шаблона для радиальной переменной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рахманов, А. Ю. Высокоточная компактная локально-одномерная консервативная сплайн-схема для двумерного уравнения диффузии в квазилинейной постановке / А. Ю. Рахманов, С. В. Русаков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2025. — № 3 (70). — С. 80–101.
2. Рахманов, А. Ю. Сплайн-схема повышенного порядка точности для решения двумерного диффузионно-кинетического уравнения в квазилинейной постановке с подвижной границей / А. Ю. Рахманов, С. В. Русаков // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2025. — № 5. — С. 13–17. — DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-80-101
3. Русаков, С. В. Сплайн-схема повышенного порядка точности для интегрирования диффузионно-кинетических уравнений / С. В. Русаков, А. Ю. Рахманов // Математические методы в технологиях и технике. — 2024. — № 2. — С. 13–16.
4. Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 347–349 с.
5. Diffusion-Kinetic Model for Curing of Epoxy Polymer / S. V. Rusakov, V. G. Gilev, A. Y. Rakhmanov, A. Domoshnitsky, A. Rasin, S. Padhi // Functional Differential Equations and Applications. FDEA 2019, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2021. — Vol. 379. — P. 83–93.
6. Curing of Large Prepreg Shell in Solar Synchronous Low Earth Orbit: Precession Flight Regimes / V. M. Pestrenin, I. V. Pestrenina, S. V. Rusakov, A. V. Kondyurin // Acta Astronautica. — 2018. — Vol. 151. — P. 342–347.

REFERENCES

1. Rakhmanov A.Yu., Rusakov S.V. High-Accuracy Compact Locally One-Dimensional Conservative Spline Scheme for The Two-Dimensional Diffusion Equation in a Quasi-Linear Formulation. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2025, no. 3 (70), pp. 80-101.
2. Rakhmanov A.Yu., Rusakov S.V. Spline Scheme of Increased Accuracy for Solving The Two-Dimensional Diffusion-Kinetic Equation in a Quasi-Linear Formulation with a Moving Boundary. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Modeling], 2025, no. 5, pp. 13-17. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-80-101
3. Rusakov S.V., Rakhmanov A.Yu. Spline Scheme of Increased Accuracy for Integration of Diffusion-Kinetic Equations. *Matematicheskie metody v tekhnologiyakh i tekhnike* [Mathematical Methods in Technologies and Engineering], 2024, no. 2, pp. 13-16.
4. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Computational Heat Transfer*. Moscow, Editorial URSS, 2003. 347-349 p.

5. Rusakov S.V., Gilev V.G., Rakhmanov A.Y., Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S. Diffusion-Kinetic Model for Curing of Epoxy Polymer. *Functional Differential Equations and Applications. FDEA 2019, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 2021, vol. 379, pp. 83-93.

6. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Rusakov S.V., Kondyurin A.V. Curing of Large Prepreg Shell in Solar Synchronous Low Earth Orbit: Precession Flight Regimes. *Acta Astronautica*, 2018, vol. 151, pp. 342-347.

LOCALLY ONE-DIMENSIONAL FOURTH-ORDER SPLINE SCHEME FOR A QUASILINEAR DIFFUSION-KINETIC EQUATION IN POLAR COORDINATES WITH A MOVING BOUNDARY

Alexey Y. Rakhmanov

Postgraduate Student, Institute of Physics and Mathematics,
Perm State University
alx.rakhmanov@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0001-3332-2124>
Bukireva St, 15, 614068 Perm, Russian Federation

Sergey V. Rusakov

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Center of Applied
Mathematics and Physics,
Perm State University
rusakov@psu.ru
<https://orcid.org/0000-0001-6862-1100>
Bukireva St, 15, 614068 Perm, Russian Federation

Abstract. We present an extension of our earlier compact spline finite-difference scheme to the case of polar coordinates for a two-dimensional quasilinear parabolic diffusion-kinetic equation with a time- and angle-dependent moving boundary $s(\varphi, t) = r_0 + \delta(\varphi, t)$. The formulation uses a locally one-dimensional (LOD) construction and a coordinate mapping $\xi = (r - r_0)/\delta(\varphi, t)$ to a fixed reference domain, which preserves conservation and consistently accounts for boundary motion. The discrete stencil is compact in the radial direction: control volumes have width $2h_r$. The scheme is constructed in a locally one-dimensional manner by applying one-dimensional cubic splines successively along the angular and then the radial coordinate. The overall spatial accuracy of the scheme is fourth order in both coordinates, the truncation error is $\mathcal{O}(h_r^4 + h_\varphi^4)$. The boundary flux at $r = s(\varphi, t)$ is incorporated in a conservative form and is compatible with mixed 2nd and 3rd-type boundary laws. Computational experiments confirm these properties. For manufactured (analytic) test problems we observe the design fourth-order convergence in both L_2 norms. For problems without a closed-form solution we estimate the order by Runge's refinement rule; the measured Runge indices satisfy $p_{i,j}^{(n)}(h) \approx 4$ across grid refinements, which empirically verifies fourth-order spatial accuracy. The method remains robust on nonuniform meshes with $h_r \neq h_\varphi$ and for time- and angle-dependent boundary deformations, while keeping a small stencil (radial width $2h_r$) and low memory footprint. These features make the scheme suitable for diffusion-kinetic applications where the geometry evolves due to surface-loss mechanisms.

Key words: numerical methods, spline approximation, cubic spline, parabolic equations, polar coordinates, moving boundary.