



УДК 532.516.5; 532.546
ББК 22.253

РАСТЕКАНИЕ КАПЛИ ЖИДКОСТИ ПО НЕОДНОРОДНОМУ НАСЫЩЕННОМУ ПОРИСТОМУ СЛОЮ¹

А.А. Колтунов, И.В. Чернышев

Рассмотрена двумерная задача о растекании и впитывании жидкой капли, расположенной на поверхности пористого слоя. Математическая модель учитывает неоднородность пористой среды и возможное скольжение на границе жидкость — пористая среда. Проведены расчеты эволюции формы капли во времени для некоторых видов распределения проницаемости слоя.

Ключевые слова: *неоднородный пористый слой, капля, растекание, впитывание, приближение теории смазки.*

Введение

Во многих природных и технологических процессах жидкость растекается по поверхности пористого материала и одновременно поглощается этой поверхностью. Причем пористая среда может быть сухой, насыщенной, или частично насыщенной той же или другой жидкостью [1; 2]. Решение таких задач важно, например, для анализа растекания и впитывания жидкости по различным тканям, бумаге или порошкам, в процессах окраски, фильтрации или очистки, где надо подбирать оптимальную стратегию растекания и впитывания. В настоящей работе рассмотрена задача о распространении тонкой капли вязкой жидкости по плоскому пористому слою. Предложенная математическая модель динамики растекания и впитывания капли обобщает работу [6], учитывается скольжение жидкости по границе пористого слоя, а проницаемость пористого основания предполагается неоднородной в поперечном направлении.

1. Постановка задачи

Имеется бесконечный горизонтальный пористый слой толщиной d' . В начальный момент времени слой заполнен жидкостью, и капля той же жидкости помещена на его

поверхность (рис. 1). Необходимо проследить эволюцию формы капли во времени. Задача рассматривается в двумерной постановке. Форма капли симметрична относительно оси z' и задается функцией $h'(x', t')$, a' — ее полуширина. Капля предполагается достаточно тонкой, $h' \ll a'$, это позволяет использовать приближение теории смазки [7], что приводит к уравнению

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\partial Q'}{\partial x'} = W'(x', 0), \quad (1)$$

где $U'(x', z')$, $W'(x', z')$ — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости в капле; $Q'(x')$ — расход через поперечное сечение капли.

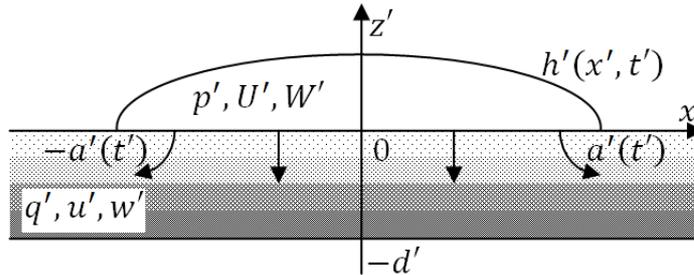


Рис. 1. Капля жидкости на неоднородной пористой поверхности

Течение жидкости в узком слое капли определяется уравнением

$$\mu \frac{\partial^2 U'}{\partial z'^2} = \frac{\partial p'}{\partial x'}, \quad (2)$$

где μ — динамическая вязкость жидкости; p' — давление.

На границе жидкость — пористая среда предполагается скольжение, горизонтальная компонента скорости терпит разрыв, пропорциональный величине ее вертикальной производной [5; 8]

$$U'(x', 0) - u'(x', 0) = \lambda \sqrt{k'} \frac{\partial U'}{\partial z'} \Big|_{z'=0}, \quad (3)$$

где $k'(z')$ — проницаемость неоднородного пористого слоя; $u'(x', z')$ — горизонтальная компонента фильтрационной скорости жидкости в пористом слое; λ — безразмерная постоянная, которая зависит от физической природы пористости материала и топологии порового пространства. Краевое условие для верхней свободной границы капли

$$\frac{\partial U'}{\partial z'} \Big|_{z'=h'} = 0. \quad (4)$$

Решив краевую задачу (2)–(4), находим распределение скорости $U'(x', z')$ в капле. Расход жидкости в сечении капли x' будет

$$Q' = \int_0^{h'} U'(x', z') dz' = \frac{1}{\mu} \left(-\frac{1}{3} h'^3 + \lambda \sqrt{k'} h'^2 \right) \frac{\partial p'}{\partial x'} + u'(x', 0) h'. \quad (5)$$

Избыточное давление в капле определяется как

$$p' = -\sigma \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2} + \rho g h', \quad (6)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения.

Подставляя (5), (6) в (1), получим уравнение эволюции формы капли, учитывающее как неоднородность пористого слоя, так и скольжение жидкости на границе жидкость — пористая среда [3; 4].

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} \left[\left(\frac{1}{3} h'^3 - \lambda \sqrt{k'} h'^2 \right) \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2} - \rho g h' \right) + u'(x', 0) h' \right] = W'(x', 0).$$

Чтобы исследовать влияние главным образом свойств пористой среды на характер растекания и впитывания, начальная форма капли задавалась в виде

$$h'(x', 0) = \alpha a_0 \left[\frac{\operatorname{ch} \sqrt{B} - \operatorname{ch} \sqrt{B}(x'/a_0)}{\sqrt{B} \operatorname{sh} \sqrt{B}} \right],$$

где $B = \rho g a_0^2 / \sigma$ — число Бонда, характеризующее соотношение сил тяжести и поверхностного натяжения; α — краевой угол контакта. Это равновесная форма капли на непроницаемом основании, при котором гравитационные силы уравновешивают капиллярные. Учитывая осевую симметрию задачи, можно рассматривать только половину капли, при этом на оси $x' = 0$ выполняются условия симметрии

$$\frac{\partial h'}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial^3 h'}{\partial x'^3} = 0.$$

Предполагается, что пористый слой изначально насыщен жидкостью, а ее фильтрационное течение подчиняется закону Дарси, горизонтальная u' и вертикальная w' компоненты скорости определяются уравнениями

$$u' = -\frac{k'(z')}{\mu} \frac{\partial q'}{\partial x'}, \quad w' = -\frac{k'(z')}{\mu} \frac{\partial q'}{\partial z'},$$

где $q'(x', z')$ — распределение давления в пористой среде.

Поскольку жидкость считается несжимаемой, то поле давления в пористой среде удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 q'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 q'}{\partial z'^2} = -\frac{1}{k'(z')} \frac{dk'}{dz'} \frac{\partial q'}{\partial z'}.$$

Нижнее основание пористого слоя $z' = -d'$ непроницаемо, $\frac{\partial q'}{\partial z'} = 0$, а на линии $x' = 0$

выполнено условие симметрии $\frac{\partial q'}{\partial x'} = 0$, $\frac{\partial^3 q'}{\partial x'^3} = 0$.

На верхней границе пористой среды ставятся условия непрерывности давления и нормальной компоненты скорости [6]

$$\begin{aligned} q' &= p', & w' &= W', & \text{при } z' &= 0, & h' &\geq 0, \\ q' &= 0, & \frac{\partial h'}{\partial t'} &= w', & \text{при } z' &= 0, & h' &< 0. \end{aligned}$$

Эти условия учитывают тот факт, что при впитывании капли могут возникать области, в которых уровень жидкости будет расположен ниже поверхности пористого слоя.

Введем новые безразмерные переменные следующим образом:

$$x' = a_0 x, \quad a' = a_0 a, \quad z' = a_0 z, \quad h' = a_0 h, \quad d' = a_0 d, \quad t' = \frac{\mu a_0}{\sigma} \left(\frac{a_0}{h_0} \right)^3 t, \quad k' = h_0^2 k,$$

$$p' = \frac{\sigma h_0}{a_0^2} p, \quad q' = \frac{\sigma h_0}{a_0^2} q, \quad w' = \frac{\sigma}{\mu} \left(\frac{h_0}{a_0} \right)^3 w, \quad u' = \frac{\sigma}{\mu} \left(\frac{h_0}{a_0} \right)^3 u, \quad W' = \frac{\sigma}{\mu} \left(\frac{h_0}{a_0} \right)^3 W.$$

В безразмерном виде описанная выше краевая задача примет следующий вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{3} h^3 - \lambda \sqrt{k(0)h^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - B h \right) + u(x, 0) h \right] = \left(\frac{a_0}{h_0} \right) W(x, 0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = 0, \quad (8)$$

$$h|_{t=0} = \frac{(\operatorname{ch} \sqrt{B} - \operatorname{ch} \sqrt{B} x)}{\sqrt{B} \operatorname{sh} \sqrt{B}}, \quad \text{при } x < 1; \quad h = 0, \quad \text{при } x \geq 1, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = -\frac{1}{k} \frac{dk}{dz} \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=-d} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} q = p, \quad W = w, \quad z = 0, \quad \text{при } h \geq 0, \\ q = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = w, \quad z = 0, \quad \text{при } h < 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$u = -k(z) \frac{\partial q}{\partial x}, \quad w = -k(z) \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (13)$$

2. Численная реализация

Сформулированная в предыдущем разделе краевая задача (7)–(13) далее решалась численно. Учитывая осевую симметрию, расчеты проводятся в прямоугольнике $(x, z) \in [0, X_B] \times [-d, 0]$. Искусственная граница X_B берется достаточно далеко от края капли, на ней ставятся условия свободной границы и четной периодичности

$$\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x=X_B} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=X_B} = 0, \quad \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \Big|_{x=X_B} = 0. \quad (14)$$

Вводятся две пространственные сетки: двумерная Π для расчета распределения давления в пористой среде по уравнению (10), и одномерная — для расчета эволюции капли во времени, по уравнению (7). Для двумерной сетки с левого и правого краев добавляется по два дополнительных фиктивных вертикальных слоя и один горизонтальный слой узлов для центральной аппроксимации граничных условий (8), (11). Координаты узлов сетки определяются соотношениями

$$x_i = (i - 2)\Delta x, \quad \Delta x = x_B / (N - 5), \quad i = 0, \dots, N - 1,$$

$$z_j = (j - 1)\Delta z, \quad \Delta z = d/(M - 2), \quad j = 0, \dots, M - 1,$$

где N и M — число узлов разбиения по x и z соответственно.

Для разностного представления производных в уравнениях и граничных условиях использовались центральные шаблоны, что обеспечивало второй порядок аппроксимации для всех дифференциальных операторов.

Первый этап решения задачи заключается в нахождении поля давления в пористой среде (10), для чего используется пятиточечная схема

$$\frac{q_{i+1,j}^n - 2q_{i,j}^n + q_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{q_{i,j+1}^n - 2q_{i,j}^n + q_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} = -\frac{1}{k_i} \frac{k_{j+1} - k_{j-1}}{2\Delta z} \frac{q_{i,j+1}^n - q_{i,j-1}^n}{2\Delta z},$$

$$i = 2, \dots, N - 3, \quad j = 1, \dots, M - 2.$$

Разностное представление для граничных условий (11), (12) и (14) имеет вид:

$$q_{i,0}^n = q_{i,2}^n, \quad q_{3,j}^n = q_{1,j}^n, \quad q_{N-4,j}^n = q_{N-2,j}^n, \quad j = 0, \dots, M - 1,$$

$$q_{i,M-1}^n = p_i, \quad W_i = w_{i,M-1}, \quad \text{при } h_j^n \geq 0,$$

$$q_{i,M-1}^n = 0, \quad h_i^{n+1} = h_i^n + \tau w_{i,M-1}, \quad \text{при } h_i^n < 0, \quad i = 2, \dots, N - 3.$$

Эта эллиптическая задача решалась итерационно методом релаксации. По найденному распределению давления в пористой среде определяются вертикальные и горизонтальные компоненты скорости жидкости на поверхности пористого слоя $u_{i,M-1}$, $w_{i,M-1}$, $i = 2, \dots, N - 3$.

Далее производится расчет формы капли (7), (8), (14) на основе явной разностной схемы

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\tau} + h_i^n \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} (h_i^n - 2\lambda\sqrt{k_{M-1}}) \left(\frac{-h_{i-2}^n + 2h_{i-1}^n - 2h_{i+1}^n + h_{i+2}^n}{2(\Delta x)^3} - \right.$$

$$\left. - B \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) + (h_i^n)^2 \left(\frac{1}{3} h_i^n - \lambda\sqrt{k_{M-1}} \right) \left(\frac{h_{i+2}^n - 4h_{i+1}^n + 6h_i^n - 4h_{i-1}^n + h_{i-2}^n}{(\Delta x)^4} - \right.$$

$$\left. - B \frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) + u_{i,M-1}^n \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} + h_i^n \frac{u_{i+1,M-1}^n - u_{i-1,M-1}^n}{2\Delta x} = \left(\frac{a_0}{h_0} \right) W_i,$$

$$i = 2, \dots, N - 3.$$

$$h_1^{n+1} = h_3^{n+1}, \quad h_0^{n+1} = h_4^{n+1}, \quad h_{N-4}^{n+1} = h_{N-2}^{n+1}, \quad h_{N-5}^{n+1} = h_{N-1}^{n+1}.$$

Присутствие производных по x высокого порядка сильно ограничивает шаг по времени, тем не менее, при достаточно малых значениях $\tau/(\Delta x)^4$ в ходе численных экспериментов всегда удавалось добиться устойчивости явной схемы.

3. Двумерная капля на неоднородном пористом слое

В настоящей работе численно моделировалось растекание тонких капель по пористому слою. Целью исследования было оценить влияние проницаемости пористого слоя на динамику распространения капли и ее впитывания в слой. Проведены расчеты для различных вариантов неоднородного в вертикальном направлении распределения проницаемости пористой среды. Безразмерная проницаемость моделировалась функцией

$$k(z) = k_0(1 + Cz), \quad z \in [-1, 0], \tag{15}$$

где k_0 — проницаемость на верхней границе пористого слоя; C — некая константа. Варьирование значения коэффициентов k_0 и C позволяет задавать неоднородные пористые слои с убывающей или возрастающей проницаемостью, с хорошо или плохо проницаемой верхней поверхностью.

Расчеты в пористом слое проводились в области $[0; 2, 0] \times [0; -1, 0]$ на сетке 205×102 . Нестационарное уравнение для $h(x, t)$ решалось численно с безразмерным шагом по времени $\tau = 10^{-8}$ до момента пока край капли не приблизится достаточно близко к правой границе расчетной области. Соотношения геометрических и физических параметров в приводимых ниже численных экспериментах брались следующие: $B = 1, 21$; $h_0/a_0 = 0, 1$; $\lambda = 0, 1$. В качестве демонстрации приведены результаты для двух предельных случаев: слой с сильно проницаемой и плохо проницаемой поверхностью.

Неоднородный пористый слой со слабо проницаемой поверхностью. Распределение проницаемости пористого слоя (15) задавалось параметрами: $k_0 = 0, 1$; $C = -0, 5$. В этом случае поверхность пористого слоя плохо проницаема, а вглубь слоя проницаемость возрастает. Слабо проницаемая «корка» ограничивает впитывание капли внутрь пористого слоя, а также задерживает вытекание из него, в то время как жидкость в нижних слоях, в силу высокой проницаемости, движется более свободно в горизонтальном направлении. На рисунке 2 показана форма капли для двух моментов времени: близкого к начальному и достаточно большого. Оттенками серого отражено изменение давления в пористом слое, от темного к светлому значение безразмерного давления изменяется, соответственно, от 0 до 1, 3.

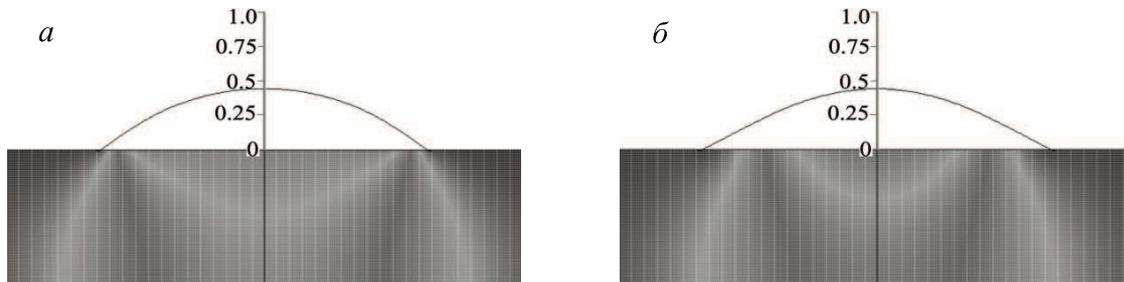


Рис. 2. Плохо проницаемая поверхность. Время t : а) 0,0003; б) 0,01

Начальная форма капли соответствует равновесной форме для твердого непроницаемого основания. Поскольку поверхность является пористой и обладает проницаемостью, то за счет впитывания и вытеснения капля начинает двигаться. Но так как основание пористого слоя плохо проницаемо, движение капли происходит очень медленно, давление внутри пористого слоя почти не изменяется, а высота капли уменьшается тоже очень медленно. Неоднородность же проницаемости внутри слоя, а также варьирование коэффициента скольжения, как показали численные эксперименты, мало влияют на качественный характер распространения капли.

Неоднородный пористый слой с сильно проницаемой поверхностью. Распределение проницаемости пористого слоя (15) задавалось параметрами: $k_0 = 0, 6$; $C = 1, 0$. Наибольшей проницаемостью обладает верхняя часть пористого слоя, далее проницаемость убывает до нуля при стремлении к нижней границе. Благодаря такой структуре пористой среды, жидкость свободно впитывается в центральной части слоя, при этом такое же количество жидкости вытесняется на периферии. В отличие от предыдущего случая, хорошо проницаемая поверхность пористого слоя обеспечивает интенсивный обмен жидкости на границе капля — пористая среда, и как следствие, быстрый про-

цесс растекания капли, значительное изменение распределения давления внутри самого слоя, а также падение уровня жидкости. В то же время из-за слабой проницаемости нижних слоев основное движение жидкости происходит вблизи поверхности пористого слоя. Эволюция формы капли для некоторых моментов времени показана на рисунке 3.

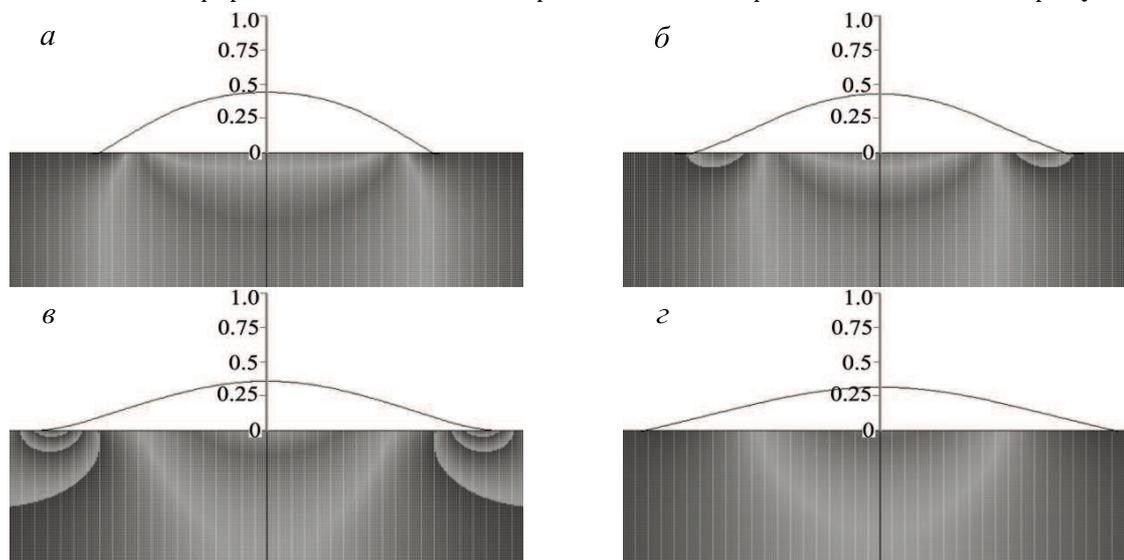


Рис. 3. Сильно проницаемая поверхность. Время t : а) 0,0003; б) 0,0015; в) 0,006; г) 0,01

Скорость растекания капли находилась численно для различных законов распределения проницаемости пористого слоя. На рисунке 4 приведены графики зависимости высоты капли в центре $h(0, t)$ от времени. Видно, что наиболее существенное влияние на характер распространения капли оказывает поверхностная проницаемость пористого слоя и уже во вторую очередь характер изменения проницаемости внутри слоя. При большом коэффициенте проницаемости верхней границы пористого слоя капля распространяется быстрее за счет процессов впитывания и вытеснения, чем при плохо проницаемой границе.

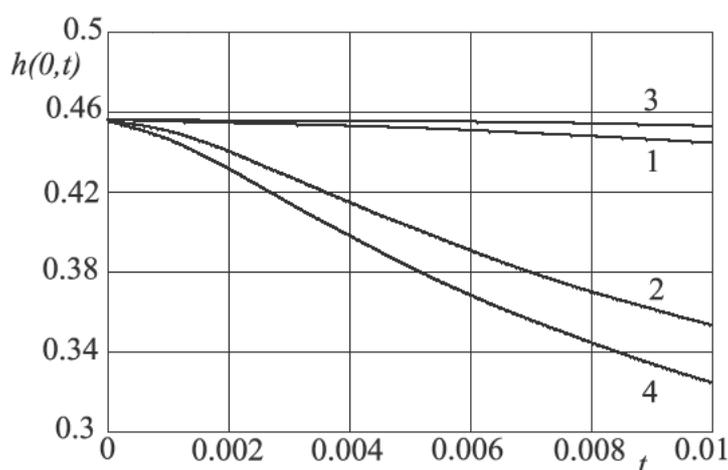


Рис. 4. Изменение высоты капли со временем. Однородный слой: 1 — $k_0 = 0, 1; C = 0$; 2 — $k_0 = 0, 6; C = 0$. Неоднородный слой: 3 — $k_0 = 0, 1; C = -0, 5$; 4 — $k_0 = 0, 6; C = 1, 0$

В случае слабо проницаемого однородного пористого слоя основное движение капли происходит за счет скольжения, а высота капли в этом случае убывает немного быстрее, чем в случае неоднородного слоя со слабо проницаемой поверхностью. По-видимому, это объясняется тем, что поглощение жидкости в нижних слоях пористой среды происходит более свободно, но для вытеснения жидкости и перемещения границ капли требуется больше времени (кривые 1, 3). В случае же сильно проницаемой поверхности пористого слоя наблюдается обратный эффект, пока происходит перераспределение жидкости по всему однородному хорошо проницаемому пористому слою, в неоднородном слое жидкость может свободно перемещаться лишь в верхних слоях, что ускоряет процесс растекания капли и приводит к меньшей высоте капли в те же моменты времени, чем в однородном случае (кривая 4).

Заключение

В ходе исследования было выявлено, что когда гравитационные силы примерно компенсируют капиллярные, то основное влияние на характер распространения капли оказывает поверхностная проницаемость пористого слоя, в то время как варьирование внутреннего неоднородного распределения проницаемости влияет не так серьезно на скорость растекания капли. Однако неоднородность проницаемости слоя сказывается на характере перераспределения жидкости из капли, в частности, определяет, будет ли она растекаться только за счет скольжения по поверхности, или же еще за счет процессов впитывания и вытеснения жидкости в удаленных частях слоя, и как следствие, это может приводить как к увеличению скорости убывания высоты капли, так и к уменьшению.

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-03-97035-р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. де Жен, П. Ж. Смачивание: статика и динамика / П. Ж. де Жен // УФН. — 1987. — Т. 151, № 4. — С. 619–681.
2. Калинин, В. В. Растекание капель вязкой жидкости по пористой поверхности / В. В. Калинин, В. М. Старов // Коллоидный журнал. — 1989. — Т. 51, № 5. — С. 860–867.
3. Колтунов, А. А. Растекание капли жидкости на плоской поверхности неоднородной пористой среды / А. А. Колтунов // Выпускная квалификационная работа по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика». — Волгоград, 2011. — 29 с.
4. Колтунов, А. А. Растекание тонкой капли жидкости по неоднородному пористому слою / А. А. Колтунов // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань, 2011. — Т. 44. — С. 175–177.
5. Мосина, Е. В. Условие скольжения на поверхности модельной волокнистой пористой среды / Е. В. Мосина, И. В. Чернышев // Письма в ЖТФ. — 2009. — Т. 35, № 5. — С. 103–110.
6. Davis, S. H. Spreading and imbibitions of viscous liquid on a porous base / S. H. Davis, L. M. Hocking // Phys. Fluids. — 1999. — V. 11. — P. 48–57.

7. Oron, A. Long-scale evolution of thin liquid films / A. Oron, S. H. Davis, S. G. Bankoff // Rev. Mod. Phys. — 1997. — V. 69. — P. 931–980.
8. Saffman, P. G. On the boundary condition at the surface of a porous medium / P. G. Saffman // Stud. Appl. Math. — 1971. — V. 50, № 2. — P. 93–101.

**SPREADING OF THE LIQUID DROP
ON THE NONUNIFORM SATURATED POROUS LAYER**

A.A. Koltunov, I.V. Chernyshev

The two-dimensional problem of spreading and imbibition of a liquid drop over a porous layer is considered. Mathematical model takes into account the nonhomogeneity of porous medium and slip boundary condition on the liquid – porous interface. The numerical results of the droplet evolution in time are demonstrated for different variants of permeability distribution of a porous layer.

Key words: *nonuniform porous layer, drop, spreading, imbibition, lubrication approximation.*