

ISSN 2222-8896



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ВЕСТНИК**

ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА

2014

№ 2 (21)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE  
OF THE RUSSIAN FEDERATION

**SCIENCE JOURNAL**

OF VOLGOGRAD STATE UNIVERSITY

**MATHEMATICS. PHYSICS**





УДК 514.88  
ББК 22.19

## АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ДИСКРЕТНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

**Величко Елена Вадимовна**

Кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры высшей математики  
Таврического государственного агротехнологического университета  
velichko\_ev@i.ua.ru  
просп. Б. Хмельницкого, 18, 72310 г. Мелитополь, Запорожская область, Украина

**Малкина Вера Михайловна**

Доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой информационных технологий  
Таврического государственного агротехнологического университета  
malkinavm@mail.ru  
просп. Б. Хмельницкого, 18, 72310 г. Мелитополь, Запорожская область, Украина

**Аннотация.** В статье рассмотрена задача аппроксимации функции, относительно которой известны значения в некоторых точках (дискретные условия) и значения интегралов по некоторым интервалам (интегральные условия). Ставится задача о нахождении многочлена заданной степени, наилучшим образом приближающая заданные условия. Вводится безразмерный весовой коэффициент, позволяющий учитывать вклад интегральных условий в общую невязку. Идея решения основана на применении квадратур Гаусса. Получены общие формулы для нахождения коэффициентов аппроксимирующего многочлена. На численных примерах показано влияние весового коэффициента на результат.

**Ключевые слова:** аппроксимация, квадратуры Гаусса, дискретные условия, интегральные условия, весовой коэффициент, МНК (метод наименьших квадратов).

### Введение

При решении задач моделирования явлений и процессов возникают проблемы построения функций, удовлетворяющих заданным условиям. Если ограничения представляют собой значения функции в системе точек, то решение данной задачи дается интерполяционным многочленом Лагранжа. Если же нам известно среднее значение величины на некотором интервале изменения аргумента, то это условие реализуется в виде интегрального ограничения. Например, такие задачи возникают в компьютерной графике при моделировании освещения объектов [2]. Вопросам интерполяции функций, заданных дискретными и интегральными условиями, посвящены работы [1; 4].

В случае если количество точек, определяющих функцию, велико, то строят аппроксимации (чаще всего, линейные или квадратичные), для чего используют метод наименьших квадратов (МНК). Работы, посвященные построению аппроксимаций функций, заданных интегральными ограничениями, авторам данной статьи не известны.

### 1. Постановка задачи

Пусть задана система точек  $c_i, \overline{i=1, N}$  и система интервалов  $(a_j, b_j), \overline{j=1, M}$ . Нам известны значения функции

$$r_i = f(c_i), \overline{i=1, N} \tag{1}$$

в заданных точках и значения интегралов

$$R_j = \int_{a_j}^{b_j} f(x) dx, \overline{j=1, M} \tag{2}$$

по заданной системе интервалов.

Отметим, что величины  $r_i$  и  $R_j$  имеют разные размерности, поскольку  $[R_j] = [r_i][x]$ , где квадратные скобки обозначают размерность.

Ставится задача о нахождении многочлена заданной степени  $n$ , который наилучшим образом удовлетворяет сформулированным ограничениям (1) и (2).

### 2. Метод решения

Качество приближения будем определять функцией невязки:

$$F = \sum_{i=1}^N (f(c_i) - r_i)^2 + \sum_{j=1}^M \lambda_j^2 \left( \int_{a_j}^{b_j} f(x) dx - R_j \right)^2 \tag{3}$$

Множитель  $\lambda_j$  вводится для того, чтобы, как отмечалось выше, слагаемые имели одинаковые размерности. Поскольку  $[\lambda_j] = [1/x]$ , и этот коэффициент должен каким-то образом учитывать длину интервала интегрирования. Возьмем его в следующем виде:

$$\lambda_j = \frac{2p}{(b_j - a_j)}, \tag{4}$$

где  $p$  – некоторая абсолютна безразмерная константа, позволяющая по-разному учитывать дискретные и интегральные условия. Множитель 2 вводится для удобства.

Для вычисления интегралов мы воспользуемся квадратурной формулой Гаусса с  $v$  узлами:

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx \sum_{k=1}^v A_k g(t_k) \tag{5}$$

где  $A_k$  и  $t_k$  – веса и узлы Гаусса. Формула (5) является точной для многочленов не выше  $(2v - 1)$ -й степени [3].

С помощью замены переменных  $2x = (b_j - a_j)t + (b_j + a_j)$  интегралы, фигурирующие в (3), сводятся к формуле (5):

$$\int_{a_j}^{b_j} f(x) dx = \frac{b_j - a_j}{2} \sum_{k=1}^v A_k f(x_{kj}) = \frac{p}{\lambda_j} \sum_{k=1}^v A_k f(x_{kj})$$

где  $x_{kj} = \frac{b_j - a_j}{2} t_k + \frac{b_j + a_j}{2}$ ,  $k = \overline{1, v}$ ,  $j = \overline{1, M}$ .

С учетом вышесказанного, выражение (3) переписывается в виде:

$$F = \sum_{i=1}^N (f(c_i) - r_i)^2 + p^2 \cdot \sum_{i=1}^M \left( \left( \sum_{k=1}^v A_k f(x_{jk}) \right) - \tilde{R}_j \right)^2, \quad (6)$$

где

$$\tilde{R}_j = \frac{2}{b_j - a_j} R_j \quad (7)$$

### 3. Случай линейной аппроксимации

Перейдем к рассмотрению частного случая, когда  $n = 1$ . Речь идет о приближении линейной функцией  $f(x) = \alpha + \beta x$ . Для интегрирования которой достаточно формулы Гаусса с одним узлом. Вес Гаусса в этом случае  $A_1 = 2$ , узел Гаусса  $t_1 = 0$  и функция невязки (6) запишется в виде:

$$F = \sum_{i=1}^N (\alpha + \beta c_i - r_i)^2 + p^2 \sum_{j=1}^M (2\alpha + 2\beta \xi_j - \tilde{R}_j)^2$$

где  $\xi_j = x_{j1} = \frac{b_j + a_j}{2}$ .

Приравняв к нулю частные производные по  $\alpha$  и  $\beta$ , получим систему уравнений:

$$\alpha \left( N + 4Mp^2 \right) + \beta \left( \sum_{i=1}^N c_i + 4p^2 \sum_{j=1}^M \xi_j \right) = \sum_{i=1}^N r_i + 2p^2 \sum_{j=1}^M \tilde{R}_j, \quad (8)$$

$$\alpha \left( \sum_{i=1}^N c_i + 4p^2 \sum_{j=1}^M \xi_j \right) + \beta \left( \sum_{i=1}^N c_i^2 + 4p^2 \sum_{j=1}^M \xi_j^2 \right) = \sum_{i=1}^N r_i c_i + 2p^2 \sum_{j=1}^M \tilde{R}_j \xi_j$$

из которой можем найти коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ .

### 4. Случай квадратичной аппроксимации

Перейдем к рассмотрению частного случая  $n = 2$  квадратичной аппроксимации  $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ . В этом случае достаточно использовать квадратуру Гаусса с двумя узлами, для которой веса Гаусса  $A_1 = A_2 = 1$  и функция невязки (6) запишется в виде:

$$F = \sum_{i=1}^N (\alpha + \beta c_i + \gamma c_i^2 - r_i)^2 + p^2 \sum_{j=1}^M (2\alpha + \beta(\xi_j + \eta_j) + \gamma(\xi_j^2 + \eta_j^2) - \tilde{R}_j)^2$$

где  $\xi_j = x_{j1}$ ,  $\eta_j = x_{j2}$ .

Приравняв к нулю частные производные по  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , получим систему:

$$\alpha \left( N + 4p^2 M \right) + \beta \left( \sum_{i=1}^N c_i + 2p^2 \sum_{j=1}^M (\xi_j + \eta_j) \right) + \gamma \left( \sum_{i=1}^N c_i^2 + 2p^2 \sum_{j=1}^M (\xi_j^2 + \eta_j^2) \right) = \sum_{i=1}^N r_i + 2p^2 \sum_{j=1}^M \tilde{R}_j,$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha \left( \sum_{i=1}^N c_i + 2p^2 \sum_{j=1}^M (\xi_j + \eta_j) \right) + \beta \left( \sum_{i=1}^N c_i^2 + p^2 \sum_{j=1}^M (\xi_j + \eta_j)^2 \right) + \\
 & + \gamma \left( \sum_{i=1}^N c_i^3 + p^2 \sum_{j=1}^M (\xi_j^2 + \eta_j^2) (\xi_j + \eta_j) \right) = \sum_{i=1}^N r_i c_i + p^2 \sum_{i=1}^M \tilde{R}_j (\xi_j + \eta_j), \tag{9} \\
 & \alpha \left( \sum_{i=1}^N c_i^2 + p^2 \sum_{j=1}^M (\xi_j^2 + \eta_j^2) \right) + \beta \left( \sum_{i=1}^N c_i^3 + p^2 \sum_{j=1}^M (\xi_j + \eta_j) (\xi_j^2 + \eta_j^2) \right) + \\
 & + \gamma \left( \sum_{i=1}^N c_i^4 + p^2 \sum_{j=1}^M (\xi_j^2 + \eta_j^2)^2 \right) = \sum_{i=1}^N r_i c_i^2 + p^2 \sum_{i=1}^M \tilde{R}_j (\xi_j^2 + \eta_j^2),
 \end{aligned}$$

из которой можем найти коэффициенты  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ .

### 5. Общий случай

В общем случае для нахождения коэффициентов многочлена  $f(x) = \sum_{q=0}^n \alpha_q x^q$  степени  $n$  нужно использовать квадратуры Гаусса с количеством узлов  $v \geq \frac{n-1}{2}$ . Невязку запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 F &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{q=0}^n \alpha_q c_i^q - r_i \right)^2 + p^2 \cdot \sum_{j=1}^M \left( \left( \sum_{k=1}^v A_k \sum_{q=0}^n \alpha_q x_{jk}^q \right) - \tilde{R}_j \right)^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{q=0}^n \alpha_q c_i^q - r_i \right)^2 + p^2 \cdot \sum_{j=1}^M \left( \left( \sum_{q=0}^n \alpha_q \left( \sum_{k=1}^v A_k x_{jk}^q \right) \right) - \tilde{R}_j \right)^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{q=0}^n \alpha_q c_i^q - r_i \right)^2 + p^2 \cdot \sum_{j=1}^M \left( \left( \sum_{q=0}^n \alpha_q L_{jq} \right) - \tilde{R}_j \right)^2,
 \end{aligned}$$

где

$$L_{jq} = \sum_{k=1}^v A_k x_{jk}^q, \tag{10}$$

частные производные которой имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \alpha_t} &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{q=0}^n \alpha_q c_i^q - r_i \right) c_i^t + p^2 \cdot \sum_{j=1}^M \left( \left( \sum_{q=0}^n \alpha_q L_{jq} \right) - \tilde{R}_j \right) L_{jt} = \\
 &= \sum_{q=0}^n \left( \alpha_q \sum_{i=1}^N c_i^{q+t} \right) + p^2 \sum_{q=0}^n \left( \alpha_q \sum_{j=1}^M L_{jq} L_{jt} \right) - \sum_{i=1}^N r_i c_i^t - p^2 \sum_{j=1}^M \tilde{R}_j L_{jt}.
 \end{aligned}$$

Для нахождения неизвестных получаем систему:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_t} = 0, t = \overline{q, n+1} \right.$$

которую запишем в матричном виде:

$$(A + p^2 B)X = S + p^2 D, \tag{11}$$

где  $X = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$  – искомый вектор-столбец коэффициентов уравнения.

Элементы матриц, входящих в уравнение (9), вычисляются по формулам:

$$A_{ij} = C_{i+j}, \quad B_{ij} = \sum_{m=1}^M L_{mi} L_{mj}, \quad S_i = \sum_{m=0}^N r_m c_m^i, \quad D_i = \sum_{m=1}^M \tilde{R}_m L_{mi} \tag{12}$$

где  $i, j \in \overline{0, n}$ ,  $C_k = \sum_{m=1}^N c_m^k$ ,  $k \in \overline{0, 2n}$ . Для удобства элементы матриц нумеруются с нуля. Матрицы  $A$  и  $B$  симметрические.

Заметим, что при  $p = 0$  формулы (7) и (6) переходят в классический метод наименьших квадратов для линейной и квадратичной аппроксимации. Из формулы (10) при этом получается общий случай аппроксимации многочленом функции по ее значениям в точках.

При увеличении параметра  $p$  увеличивается вклад в общую невязку интегральных невязок, и, соответственно, уменьшается вклад дискретных. Для случая, когда нет дискретных условий, нужно в указанных формулах игнорировать слагаемые, не содержащие множителя  $p^2$  (что соответствует устремлению  $p$  к бесконечности).

### 6. Численный пример

Рассмотрим функцию  $g(x) = x^3$ . Она удовлетворяет соотношениям

$$g(1) = 1, g(3) = 27, \int_1^2 g(x) dx = 3.75, \int_2^3 g(x) dx = 16.25 \tag{13}$$

Построим линейную, квадратичную и кубическую функции, которые аппроксимируются функцией, заданной условиями (13). В этом случае число дискретных ограничений  $N = 2$  и число интегральных ограничений  $M = 2$ . Соответствующие константы равны:

$$c_1 = 1, r_1 = 1, c_2 = 3, r_2 = 27, a_1 = 1, b_1 = 2, R_1 = 3.75, a_2 = 2, b_2 = 3, R_2 = 16.75$$

По формуле (7) вычисляем  $\tilde{R}_1 = 7.5, \tilde{R}_2 = 32.5$ .

Для  $n = 1$  вычисляем  $\zeta_1 = 1.5, \zeta_2 = 2.5$ . Система (8) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \alpha(2+8p^2) + \beta(4 + 16p^2) &= 28 + 80p^2, \\ \alpha(4 + 16p^2) + \beta(10 + 34p^2) &= 82 + 185p^2. \end{aligned}$$

Общее решение этой системы:

$$\alpha = -3 \frac{20p^4 + 25p^2 + 4}{(4p^2 + 1)(1 + p^2)}, \quad \beta = \frac{25p^2 + 26}{2(p^2 + 1)}$$

При  $p = 0$  получаем функцию  $f_0(x) = 13x - 12$ , которая точно удовлетворяет дискретным ограничениям. Соответствующие интегралы будут равны:

$$\int_1^2 f_0(x) dx = 7.5 \quad \int_1^3 f_0(x) dx = 20.5$$

При  $p = 1$  получаем функцию  $f_1(x) = 12.75x - 14.7$ , для которой

$$\int_1^2 f_1(x) dx = 4.425 \quad \int_1^3 f_1(x) dx = 17.175$$

$$f_1(1) = -1.95, \quad f_1(3) = 23.55,$$

При  $p = 10$  получаем функцию  $f_{10}(x) = 12.505x - 15$ , для которой

$$\int_1^2 f_{10}(x) dx = 3.757 \quad \int_1^3 f_{10}(x) dx = 16.262$$

$$f_{10}(1) = -2.495, \quad f_{10}(3) = 22.515,$$

Как видим, действительно увеличение параметра  $p$  приводит к улучшению точности приближения интегральных условий.

Для поиска квадратичной аппроксимации достаточно воспользоваться формулой Гаусса с

$v = 2$  узлами  $t_{1,2} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \mp 0.577$ . Вычисляем  $\zeta_1 = 1.211, \eta_1 = 1.789, \zeta_2 = 2.211, \eta_2 = 2.789$ . Система (9) приобретает вид:

$$\alpha(2 + 8p^2) + \beta(4 + 16p^2) + \gamma(10 + 34.67p^2) = 28 + 80p^2,$$

$$\alpha(4 + 16p^2) + \beta(10 + 34p^2) + \gamma(28 + 77.33p^2) = 82 + 185p^2,$$

$$\alpha(10 + 34.67p^2) + \beta(28 + 77.33p^2) + \gamma(82 + 182.22p^2) = 244 + 446.67p^2.$$

При  $p = 0$  матрица системы получается вырожденной и система имеет бесконечно много решений. Это объясняется тем, что количество коэффициентов превышает количество дискретных условий.

При  $p = 0.1$  получаем функцию  $f_{01}(x) = 5.948x^2 - 10.796x + 5.851$ , для которой

$$\int_1^2 f_{01}(x) dx = 3.536 \quad \int_1^3 f_{01}(x) dx = 16.531$$

$$f_{01}(1) = 0.998, \quad f_{01}(3) = 26.994,$$

При  $p = 1$  получаем функцию  $f_1(x) = 5.746x^2 - 10.219x + 5.571$ , для которой

$$\int_1^2 f_1(x) dx = 3.65 \quad \int_1^3 f_1(x) dx = 16.414$$

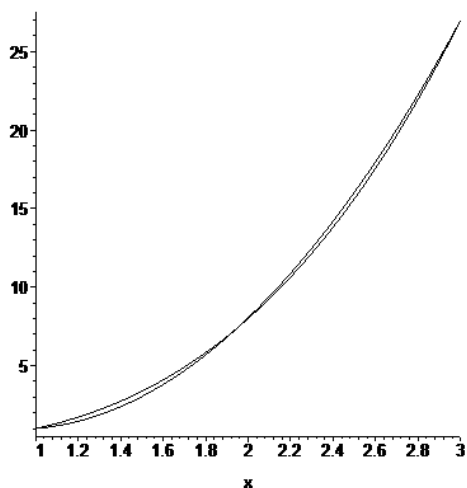
$$f_1(1) = 1.098, \quad f_1(3) = 26.627,$$

При  $p = 10$  получаем функцию  $f_{10}(x) = 2.569x^2 + 2.242x - 5.611$ , для которой

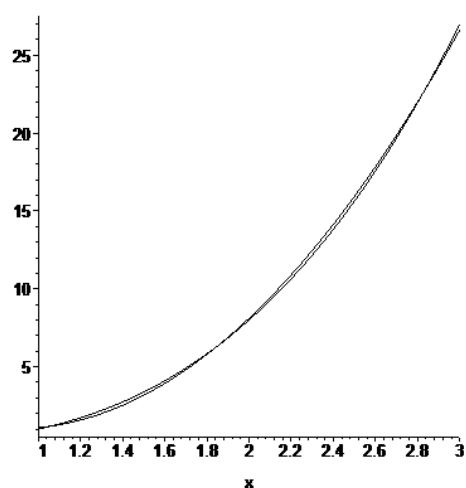
$$\int_1^2 f_{10}(x) dx = 3.746 \quad \int_1^3 f_{10}(x) dx = 16.263$$

$$f_{10}(1) = -0.8, \quad f_{10}(3) = 24.235,$$

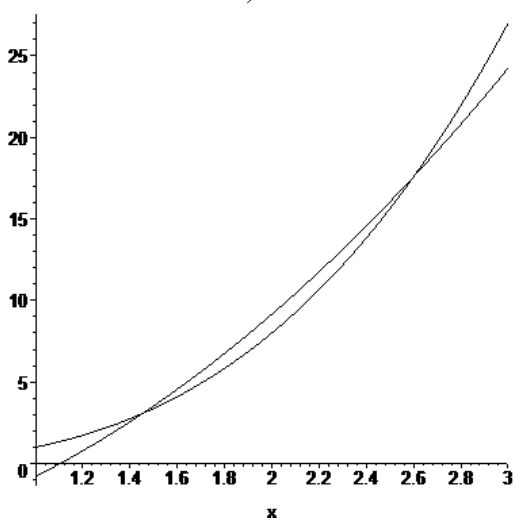
На рисунке приведены графики функций  $f_{01}(x), f_1(x), f_{10}(x), f_1(x)$  и, для сравнения, график эталонной функции  $g(x) = x^3$ .



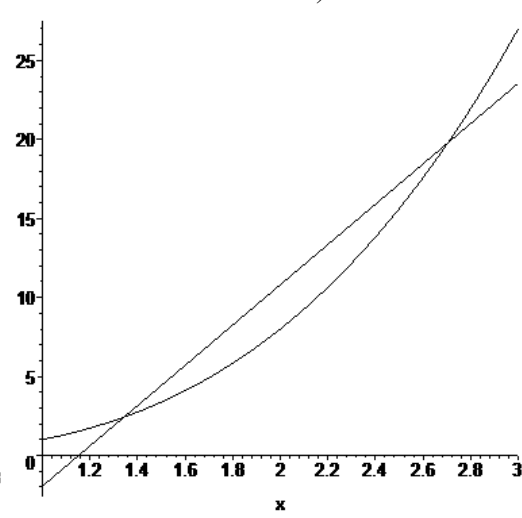
a)



b)



c)



d)

Графики функций: a) –  $2f_{01}(x)$ ; b) –  $2f_1(x)$ ; c) –  $2f_{10}(x)$ ; d) –  $f_1(x)$

Для поиска кубической ( $n = 3$ ) аппроксимации достаточно воспользоваться формулой Гаусса с  $\nu = 2$  узлами. Однако, для более наглядной иллюстрации общего случая, мы воспользуемся формулой с  $\nu = 3$  узлами Гаусса, которые имеют вид  $t_{1,3} = \mp\sqrt{0.6} \approx \mp 0.7746$ ,  $t_2 = 0$ , а веса

Гаусса  $A_{1,3} = \frac{5}{9}$ ,  $A_2 = \frac{8}{9}$ . Разумеется, на окончательный результат это не должно повлиять.

Для промежутка (1,2) получаем, что

$$x_{11} = 1.5 + 0.5t_1 = 1.113, x_{12} = 1.5 + 0.5t_2 = 1.5, x_{13} = 1.5 + 0.5t_3 = 1.887.$$

Для промежутка (2,3) получаем, что

$$x_{21} = 2.5 + 0.5t_1 = 2.113, x_{22} = 2.5 + 0.5t_2 = 2.5, x_{23} = 2.5 + 0.5t_3 = 2.887.$$

По формуле  $C_k = \sum_{m=1}^N c_i^k$  находим

$$C_0 = 2, C_1 = 4, C_2 = 10, C_3 = 28, C_4 = 82, C_5 = 244, C_6 = 730.$$



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 & 28 \\ 4 & 10 & 28 & 82 \\ 10 & 28 & 82 & 244 \\ 28 & 82 & 244 & 730 \end{pmatrix}.$$

Записываем матрицу

Находим коэффициенты  $L_{jq} = A_1 x_{j1}^q + A_2 x_{j2}^q + A_3 x_{j3}^q$ .

$$L_{10} = 2, L_{11} = 3, L_{12} = 4.67, L_{13} = 7.5, L_{20} = 2, L_{21} = 5, L_{22} = 12.67, L_{23} = 32.5.$$

Находим элементы матрицы  $B$  (напомним, что нумерация строк и столбцов начинается с нуля) по формуле  $B_{ij} = L_{1i}L_{1j} + L_{2i}L_{2j}$ . Получим, что

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 34.67 & 80 \\ 16 & 34 & 77.33 & 185 \\ 34.67 & 77.33 & 182.22 & 446.67 \\ 80 & 185 & 446.67 & 1112.5 \end{pmatrix}.$$

Определяем элементы матрицы  $S$  и  $D$  по формулам  $S_i = r_1 c_1^i + r_2 c_2^i$ ,  $D_i = \tilde{R}_1 L_{1i} + \tilde{R}_2 L_{2i}$ .  
Получаем матрицы:

$$S = \begin{pmatrix} 28 \\ 82 \\ 244 \\ 730 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 80 \\ 185 \\ 446.67 \\ 1112.5 \end{pmatrix}.$$

Подставив найденные матрицы в уравнение (9), находим, что при  $p \neq 0$ , искомый вектор-столбец имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а следовательно, искомая кубическая аппроксимация  ${}_3f_p = x^3$  совпадает с эталонной.

### Выводы

Получено обобщение известного способа аппроксимации функции, заданной системой значений в некоторых точках, на случай наличия интегральных условий на функцию. Приведены расчетные формулы для общего случая и явно выписаны формулы для практически важных случаев линейной и квадратичной аппроксимации. Приведенные результаты расчетов в модельной задаче позволяют судить о качестве приближения и о влиянии введенного параметра  $p$  на поведение аппроксимирующей функции.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Величко, О. В. Геометрична інтерпретація умов існування мінімального многочлена с заданими характеристиками / О. В. Величко, В. М. Малкіна // Праці ТДАТУ. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 55. – 2012. – С. 37–41.
2. Голованов, Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. – М. : Физматлит, 2002. – 472 с.