ISSN 2222-8896

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЕСТНИК

ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА

2014
№ 2 (21)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE RUSSIAN FEDERATION

SCIENCE JOURNAL

OF VOLGOGRAD STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS. PHYSICS

УДК 514.75
ББК 22.151

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА ЦИКЛИЧЕСКИ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ

Бодренко Ирина Ивановна

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления
Волгоградского государственного университета
bodrenko@mail.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе исследуются свойства нормальных сечений и геодезических на n-мерных циклически рекуррентных подмногообразиях F^n в $(n+p)$-мерных евклидовых пространствах E^{n+p}. Устанавливаются условия, при которых циклически рекуррентные подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ имеют нулевое геодезическое кручение в каждой точке по любому направлению.

Ключевые слова: вторая фундаментальная форма, циклически рекуррентное подмногообразие, геодезическое кручение, нормальное сечение, нормальная кривизна, нормальное кручение, связность Ван дер Вардена — Бортолотти.

Введение

Пусть F^n — n-мерное $(n \geq 2)$ гладкое подмногообразие в $(n+p)$-мерном $(p \geq 1)$ пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(c)$. В геометрии погруженных многообразий важное место занимают исследования, касающиеся подмногообразий $F^n \subset M^{n+p}(c)$ со специальными свойствами второй фундаментальной формы.

Обозначим через b вторую фундаментальную форму F^n, через $\overline{\nabla}$ — связность Ван дер Вардена — Бортолотти.

Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется *параллельной* (в связности $\overline{\nabla}$), если $\overline{\nabla} b = 0$. Подмногообразия с $\overline{\nabla} b = 0$ называются *параллельными*. Параллельные подмногообразия F^n в пространствах постоянной кривизны $M^{n+p}(c)$ являются внешне-геометрическими аналогами локально симметрических пространств, то есть римановых пространств с ковариантно постоянным тензором кривизны R. Критерий параллельности второй фундаментальной формы b установлен в [2].

Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется *рекуррентной*, если на F^n существует 1-форма μ такая, что $\overline{\nabla} b = \mu \otimes b$. Внутренняя геометрия подмногообразий с рекуррентной второй фундаментальной формой исследована в [1]. Полная локальная классификация и геометрическое описание подмногообразий с не параллельной рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны получены в [12]. Свойства кэлеровых подмногообразий с рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной голоморфной секционной кривизны установлены в [5]. Некоторые свойства вещественных римановых симметрических пространств с комплексной структурой, то есть эрмитовых симметрических пространств, изучены в [22].

Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется *циклически рекуррентной* [4], если на F^n существует 1-форма μ такая, что

$$\overline{\nabla}_X b(Y, Z) = \mu(X) b(Y, Z) + \mu(Y) b(Z, X) + \mu(Z) b(X, Y) \tag{1}$$

для любых векторных полей X, Y, Z, касательных к F^n.

Определение 1. *Подмногообразие $F^n \subset M^{n+p}(c)$ с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой $b \neq 0$ будем называть циклически рекуррентным подмногообразием [10].*

Класс циклически рекуррентных подмногообразий содержит подклассы параллельных подмногообразий и не параллельных рекуррентных подмногообразий, но не исчерпывается ими. Некоторые свойства гиперповерхностей F^n с циклически рекуррентной не параллельной второй фундаментальной формой в евклидовых пространствах E^{n+1} установлены в [4; 8; 19]. Циклически рекуррентные подмногообразия F^n с плоской нормальной связностью в евклидовых пространствах E^{n+p} классифицированы в [3; 7; 13].

В терминах второй фундаментальной формы b подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(c)$ определяются специальные классы нормальных векторных полей. В [17] введено понятие рекуррентного вектора нормальной кривизны и изучены свойства $F^n \subset E^{n+p}$ с параллельным нормальным векторным полем специального вида. В [15] получена классификация двумерных поверхностей F^2 с плоской нормальной связностью в пространствах постоянной кривизны, на которых каждая геодезическая имеет постоянную кривизну. В [11] описаны параллельные нормальные поля вдоль геодезических на циклически рекуррентных подмногообразиях F^n в пространствах постоянной кривизны $M^{n+p}(c)$.

С помощью второй фундаментальной формы b и связности $\overline{\nabla}$ получены формулы для вычисления нормальной кривизны $k_N(x, t)$ и нормального кручения $\varkappa_N(x, t)$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ в точке x по направлению t, установлены необходимые и достаточные условия принадлежности F^n некоторым $(n+1)$-мерным плоскостям $E^{n+1} \subset E^{n+p}$ [18; 20; 21]. В работе [16] изучены свойства двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в E^4. Эти исследования для $F^n \subset E^{n+p}$ были продолжены в [6; 9] для произвольных n и p. Некоторые свойства нормальных сечений циклически рекуррентных подмногообразий $F^n \subset E^{n+p}$ установлены в [10]. Свойства геодезических и нормальных сечений на вещественных флаговых многообразиях исследовались в [23].

В настоящей работе изучаются свойства нормальных сечений и геодезических на циклически рекуррентных подмногообразиях $F^n \subset E^{n+p}$ при произвольных n и p.

Пусть x — произвольная точка F^n, T_xF^n — касательное пространство к F^n в точке x. Пусть $\gamma_g(x,t)$ — геодезическая на F^n, проходящая через точку $x \in F^n$ в направлении $t \in T_xF^n$. Обозначим через $k_g(x,t)$ и $\varkappa_g(x,t)$ кривизну и кручение геодезической $\gamma_g(x,t) \subset E^{n+p}$, соответственно, вычисленные в точке x.

Определение 2. *Кручение $\varkappa_g(x,t)$ геодезической $\gamma_g(x,t)$ называется геодезическим кручением подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ в точке x по направлению t.*

Обозначим через $\mathcal{R}_0$ (см.: [14]) множество подмногообразий $F^n \subset E^{n+p}$, на которых

$$k_g(x,t) \neq 0, \quad \varkappa_g(x,t) \equiv 0, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_xF^n. \tag{2}$$

Пусть $T_x^{\perp}F^n$ — нормальное пространство к F^n в точке x. Рассмотрим в точке $x \in F^n$ для любого ненулевого вектора $t \in T_xF^n$ $(p+1)$-мерную плоскость

$$E^{p+1}(x,t,T_x^{\perp}F^n) \subseteq E^{n+p}.$$

Плоскость $E^{p+1}(x,t,T_x^{\perp}F^n)$ пересекает F^n в окрестности точки x по некоторой кривой $\gamma_N(x,t)$.

Определение 3. *Кривая $\gamma_N(x,t)$, ее кривизна $k_N(x,t)$ и кручение $\varkappa_N(x,t)$ в E^{n+p}, вычисленные в точке x, называются, соответственно, нормальным сечением, нормальной кривизной и нормальным кручением подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ в точке x по направлению t.*

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть F^n есть циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+p} без асимптотических направлений. F^n принадлежит множеству $\mathcal{R}_0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие:*

$$k_N(x,t) = k(x), \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_xF^n. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть F^n есть циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+2} без асимптотических направлений. Если F^n удовлетворяет условию (3), то F^n имеет плоскую нормальную связность $R^{\perp} \equiv 0$.*

Замечание. Поверхность $F^2 \subset E^4$, у которой индикатриса нормальной кривизны в каждой точке x является окружностью с центром в x, удовлетворяет условию (3) и при этом не принадлежит множеству $\mathcal{R}_0$, и $R^{\perp} \neq 0$.

Теорема 3. *Пусть F^n есть связное циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+2} без асимптотических направлений. Если F^n удовлетворяет условию (3), то F^n является открытой частью гиперсферы S^n в некоторой гиперплоскости $E^{n+1} \subset E^{n+2}$.*

Теорема 4. *Пусть F^n есть связное циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+p} $(p \geq 3)$ без асимптотических направлений. Если F^n удовлетворяет условию (3) и имеет n линейно независимых сопряженных направлений в каждой точке $x \in$ $\in F^n$, то F^n является открытой частью гиперсферы S^n в некотором $(n+1)$-мерном подпространстве $E^{n+1} \subset E^{n+p}$.*

1. Уравнения циклически рекуррентных подмногообразий в евклидовом пространстве

Пусть E^{n+p} — $(n+p)$-мерное евклидово пространство с декартовыми прямоугольными координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^{n+p})$, $<,>$ — скалярное произведение в E^{n+p}. Пусть F^n — гладкое подмногообразие в E^{n+p}. В окрестности каждой точки $x \in F^n$ подмногообразие F^n можно задать уравнениями

$$x^a = f^a(u^1, \ldots, u^n), \quad (u^1, \ldots, u^n) \in D, \quad a = \overline{1, n+p},$$

где D — некоторая область параметрического пространства $(u^1, \ldots, u^n)$, $f^a(u^1, \ldots, u^n) \in C^\infty(D)$.

Пусть

$$\vec{r}(u^1, \ldots, u^n) = \{f^1(u^1, \ldots, u^n), f^2(u^1, \ldots, u^n), \ldots, f^{n+p}(u^1, \ldots, u^n)\} \text{ —}$$

векторное параметрическое уравнение подмногообразия F^n в окрестности точки $x \in F^n$.

Условимся, что здесь и далее индексы будут принимать следующие значения: i, j, k, l, m, $\ldots = 1, \ldots, n$, α, β, σ, $\ldots = 1, \ldots, p$, и всюду действует правило суммирования Эйнштейна.

Рассмотрим нормальное оснащение подмногообразия F^n, заданное полем ортонормированных реперов $\{\vec{n}_{\alpha|}\}$ в нормальном расслоении $T^\perp F^n$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$, $< \vec{n}_{\alpha|}, \vec{n}_{\beta|} >= \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Обозначим

$$\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}(u^1, \ldots, u^n)}{\partial u^i}, \quad \vec{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{r}(u^1, \ldots, u^n)}{\partial u^i \partial u^j}, \quad \vec{n}_{\alpha|i} = \frac{\partial \vec{n}_\alpha(u^1, \ldots, u^n)}{\partial u^i}.$$

Векторы $\{\vec{r}_i(x)\}$ образуют базис касательного пространства $T_x F^n$ подмногообразия F^n в точке x.

Метрическая форма подмногообразия F^n имеет вид:

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j,$$

где $g_{ij} =< \vec{r}_i, \vec{r}_j >$.

Обозначим через

$$II(\vec{n}_{\alpha|}) = b_{\alpha|ij} du^i du^j$$

вторую квадратичную форму подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ относительно нормали $\vec{n}_{\alpha|}$, где $b_{\alpha|ij} = < \vec{n}_{\alpha|}, \vec{r}_{ij} >$.

В каждой точке $x \in F^n$ оператор Вейнгартена $A_\alpha : T_x F^n \longrightarrow T_x F^n$ относительно нормали $\vec{n}_{\alpha|}(x)$ определяется по формуле

$$< A_\alpha \vec{r}_i(x), \vec{r}_j(x) >=< \vec{n}_{\alpha|}(x), \vec{r}_{ij}(x) > .$$

Коэффициенты $\Gamma^\perp_{\alpha\beta|i} =< \vec{n}_{\alpha|}, \vec{n}_{\beta|i} >$ называются компонентами нормальной связности D подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$.

Ковариантная производная вектора $\vec{n}_{\alpha|}$ в нормальной связности D вычисляется по формуле

$$D_i \vec{n}_{\alpha|} = \Gamma^{\perp\beta}_{\alpha|i} \vec{n}_{\beta|}, \quad \text{где} \quad \Gamma^{\perp\beta}_{\alpha|i} = \delta^{\beta\sigma} \Gamma^\perp_{\sigma\alpha|i}, \quad \text{матрица} \quad ||\delta^{\alpha\beta}|| = ||\delta_{\alpha\beta}||^{-1}.$$

Линейные формы

$$\omega_{\alpha\beta} = \Gamma^{\perp}_{\alpha\beta|i} du^i$$

называются линейными формами кручения подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$.

Компоненты тензора нормальной кривизны $R^{\perp}$ вычисляются по формуле

$$R^{\perp\alpha}_{\beta|ij} = \frac{\partial \Gamma^{\perp\alpha}_{\beta|i}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^{\perp\alpha}_{\beta|j}}{\partial u^i} + \Gamma^{\perp\sigma}_{\beta|i}\Gamma^{\perp\alpha}_{\sigma|j} - \Gamma^{\perp\sigma}_{\beta|j}\Gamma^{\perp\alpha}_{\sigma|i}. \quad (4)$$

Ковариантная производная второй фундаментальной формы b в связности Ван дер Вардена — Бортолотти $\overline{\nabla}$ вычисляется по формуле

$$\overline{\nabla}_i b^{\alpha}_{jk} = \frac{\partial b^{\alpha}_{jk}}{\partial u^i} - \Gamma^l_{ij} b^{\alpha}_{lk} - \Gamma^l_{ik} b^{\alpha}_{jl} + \Gamma^{\perp\alpha}_{\beta|i} b^{\beta}_{jk}, \quad (5)$$

где Γ^l_{ij} — символы Кристоффеля, вычисленные относительно метрического тензора g_{ij}, $b^{\alpha}_{ij} = \delta^{\alpha\sigma} b_{\sigma|ij}$.

Уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи, соответственно, имеют вид:

$$\sum_{\sigma=1}^{p} b^{\sigma}_{ij} b^{\sigma}_{kl} - b^{\sigma}_{ik} b^{\sigma}_{jl} = g_{ml}\left(\frac{\partial \Gamma^m_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^m_{ki}}{\partial u^j} + \Gamma^s_{ij}\Gamma^m_{ks} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^m_{js}\right), \quad (6)$$

$$\overline{\nabla}_i b^{\alpha}_{jk} = \overline{\nabla}_j b^{\alpha}_{ik}, \quad (7)$$

$$R^{\perp\alpha}_{\beta|ij} = g^{kl}\left(b_{\beta|ik} b^{\alpha}_{lj} - b_{\beta|jk} b^{\alpha}_{li}\right). \quad (8)$$

Условие (1) имеет вид

$$\overline{\nabla}_i b^{\alpha}_{jk} = \mu_i b^{\alpha}_{jk} + \mu_j b^{\alpha}_{ki} + \mu_k b^{\alpha}_{ik}, \quad (9)$$

где $\mu_i = \mu_i(u^1, \ldots, u^n)$ — компоненты 1-формы $\mu = \mu_i du^i$.

Система уравнений (6)–(9) определяет циклически рекуррентные подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ и только их.

2. Основные леммы

Лемма 1. *Кривизна $k_g(x,t)$ и кручение $\varkappa_g(x,t)$ геодезической $\gamma_g(x,t)$ вычисляются по формулам:*

$$k_g(x,t) = |b(\tau,\tau)|, \quad (10)$$

$$\varkappa_g(x,t) = \left(\frac{|[\tau \wedge A_{b(\tau,\tau)}\tau]|^2}{|b(\tau,\tau)|^2} + \frac{|[b(\tau,\tau) \wedge (\overline{\nabla}_\tau b)(\tau,\tau)]|^2}{|b(\tau,\tau)|^4}\right)^{1/2}, \quad (11)$$

где $\tau = t/|t|$, $|t| = \sqrt{<t,t>}$, $\wedge$ — внешнее произведение в E^{n+p}. Формула (11) имеет смысл, когда t — неасимптотическое направление.

Доказательство. Формулы (10), (11) следуют из определения $k_g(x,t)$, $\varkappa_g(x,t)$. Доказательство (10), (11) содержится в [10] (см.: [10, гл. 8, лемма 8.1]).

Лемма 2. *Пусть F^n есть циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+p} без асимптотических направлений. Тогда геодезическое кручение F^n в точке x по направлению t вычисляется по формуле:*

$$\varkappa_g(x,t) = \frac{|[\tau \wedge A_{b(\tau,\tau)}\tau]|}{|b(\tau,\tau)|}, \tag{12}$$

где $\tau = t/|t|$, $|t| = \sqrt{<t,t>}$, $\wedge$ — внешнее произведение в E^{n+p}.

Доказательство. В силу (9) имеем

$$\overline{\nabla}_t b(t,t) = 3\mu(t) b(t,t), \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n.$$

Отсюда находим

$$[b(t,t) \wedge (\overline{\nabla}_t b)(t,t)] = [b(t,t) \wedge 3\mu(t) b(t,t)] = 0, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n. \tag{13}$$

Тогда из (11), учитывая (13), приходим к (12).

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть F^n есть циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+p} без асимптотических направлений. F^n принадлежит множеству $\mathcal{R}_0$ тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in F^n$ для всех взаимно ортогональных векторов $X, Y \in T_x F^n$ выполнено уравнение:*

$$< b(X,X), b(X,Y) >= 0. \tag{14}$$

Доказательство. В силу (12) F^n принадлежит множеству $\mathcal{R}_0$ тогда и только тогда, когда выполнено уравнение

$$[t \wedge A_{b(t,t)} t] = 0, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n. \tag{15}$$

Так как равенство $[t \wedge A_{b(t,t)} t] = 0$ означает, что векторы t и $A_{b(t,t)} t$ коллинеарны, то (15) равносильно условию (14).

Лемма доказана.

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 1 условие (2) эквивалентно следующим соотношениям:

$$b(t,t) \neq 0, \quad [t \wedge A_{b(t,t)} t] = 0, \quad [b(t,t) \wedge (\overline{\nabla}_t b)(t,t)] = 0, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n. \tag{16}$$

Нормальная кривизна $k_N(x,t)$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ в точке x по направлению t вычисляется по формуле

$$k_N(x,t) = |b(\tau,\tau)|,$$

где $\tau = t/|t|$, $|t| = \sqrt{<t,t>}$.

Следовательно, условие (3) равносильно соотношению

$$|b(t,t)| = k(x)|t|^2, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n. \tag{17}$$

Замечая, что (17) эквивалентно условию (14), учитывая (16) и применяя леммы 2, 3, приходим к утверждению теоремы.

Доказательство теоремы 2. Пусть $x \in F^n$ — произвольная точка. Введем в некоторой окрестности $O(x)$ геодезические нормальные координаты $(u^1, \ldots, u^n)$ такие, что

$$g_{1m} = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 0, & m = \overline{2,n}. \end{cases} \tag{18}$$

Пусть $\vec{n}_{1|}$, $\vec{n}_{2|}$ — оснащение в нормальном расслоении $T^\perp F^n$ подмногообразия $F^n \subset \subset E^{n+2}$. Рассмотрим в $O(x)$ векторные поля

$$\vec{b}_{ij} = b^\alpha_{ij} \vec{n}_{\alpha|}, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Так как F^n не имеет асимптотических направлений, то $\vec{b}_{11} \neq 0$ в точке x. Тогда в некоторой окрестности $U(x) \subset O(x)$ векторное поле $\vec{b}_{11} \neq 0$.

Используя равенство (17), построим в $U(x)$ оснащение $\vec{n}^*_{1|}$, $\vec{n}^*_{2|}$, положив

$$\vec{n}^*_{1|} = \frac{\vec{b}_{11}}{k(u^1, \ldots, u^n)}.$$

Положим

$$\vec{b}_{ij} = b^{*\alpha}_{ij} \vec{n}^*_{\alpha|}, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Учитывая (18), находим, что в $U(x)$

$$< \vec{b}_{ii}, \vec{n}^*_{2|} >= 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Отсюда, в силу (9), имеем

$$< (\overline{\nabla}_i b^{*\alpha}_{ii}) \vec{n}^*_{\alpha|}, \vec{n}^*_{2|} >= 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{19}$$

Обозначим

$$\Gamma^{*\perp}_{12|i} =< \vec{n}^*_{1|}, \vec{n}^*_{2|i} >, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Используя (5), из (19) находим:

$$\Gamma^{*\perp 2}_{1|i}(u^1, \ldots, u^n) = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Значит, в силу формулы (4) имеем: $R^\perp \equiv 0$ в $U(x)$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Из теоремы 1 следует, что F^n принадлежит множеству $\mathcal{R}_0$. Тогда F^n является открытой частью гиперсферы S^n в некоторой гиперплоскости $E^{n+1} \subset E^{n+2}$ (см.: [14, § 5, теорема 9]).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. В силу теоремы 1 подмногообразие F^n принадлежит множеству $\mathcal{R}_0$. Тогда F^n является открытой частью гиперсферы S^n в некотором $(n+1)$-мерном подпространстве $E^{n+1} \subset E^{n+p}$ (см.: [14, § 5, теорема 11]).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодренко, И. И. Внутренняя геометрия внешне рекуррентных подмногообразий / И. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2004. — Т. 11, № 2. — С. 301.

2. Бодренко, И. И. Критерий параллельности второй фундаментальной формы / И. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 1999. — Т. 6, № 1. — С. 124–125.

3. Бодренко, И. И. Нормально плоские псевдорекуррентные подмногообразия в евклидовых пространствах / И. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 540–541.

4. Бодренко, И. И. О гиперповерхностях с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовом пространстве / И. И. Бодренко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2010. — Вып. 13. — С. 23–35.

5. Бодренко, И. И. О кэлеровых подмногообразиях с рекуррентной второй фундаментальной формой / И. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2006. — Т. 13, № 4. — С. 617–618.

6. Бодренко, И. И. О подмногообразиях с нулевым нормальным кручением в евклидовом пространстве / И. И. Бодренко // Сибирский математический журнал. — 1994. — Т. 35, № 3. — С. 527–536.

7. Бодренко, И. И. О подмногообразиях с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовых пространствах / И. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2011. — Т. 18, № 5. — С. 746.

8. Бодренко, И. И. Об одном классе псевдорекуррентных подмногообразий / И. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2001. — Т. 8, № 1. — С. 109.

9. Бодренко, И. И. Об n-мерных поверхностях в евклидовом пространстве E^{n+p}, принадлежащих некоторой $(n+1)$-мерной плоскости / И. И. Бодренко // Математические заметки. — 1993. — Т. 54, № 4. — С. 19–23.

10. Бодренко, И. И. Обобщенные поверхности Дарбу в пространствах постоянной кривизны / И. И. Бодренко. — Saarbrücken, Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co, 2013. — 200 с.

11. Бодренко, И. И. Параллельные поля нормальных q-направлений на псевдорекуррентных подмногообразиях / И. И. Бодренко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2002. — Вып. 7. — С. 5–11.

12. Бодренко, И. И. Подмногообразия с рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны / И. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2007. — Т. 14, № 4. — С. 679–682.

13. Бодренко, И. И. Строение псевдорекуррентных подмногообразий в евклидовых пространствах / И. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2000. — Т. 7, № 2. — С. 318–319.

14. Бодренко, И. И. Характеристический признак n-мерной сферы в евклидовом пространстве E^{n+p} / И. И. Бодренко // Математический сборник. — 1994. — Т. 185, № 11. — С. 23–30.

15. Фоменко, В. Т. Двумерные поверхности с плоской нормальной связностью в пространстве постоянной кривизны, несущие геодезические постоянной кривизны

/ В. Т. Фоменко // Математические заметки. — 2000. — Т. 64, № 4. — С. 579–586.

16. Фоменко, В. Т. Некоторые свойства двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в E^4 / В. Т. Фоменко // Математический сборник. — 1978. — Т. 106 (148), № 4 (8). — С. 589–603.

17. Фоменко, В. Т. Об одном обобщении поверхностей Дарбу / В. Т. Фоменко // Математические заметки. — 1990. — Т. 48, № 2. — С. 107–113.

18. Bodrenko, I. I. A characteristic feature of the n-dimensional sphere in the Euclidean space E^{n+p} / I. I. Bodrenko // Sbornik Mathematics. — 1995. — Vol. 83, № 2. — P. 315–320.

19. Bodrenko, I. I. On generalized Darboux surfaces in Euclidean spaces / I. I. Bodrenko // Действия торов: топология, геометрия, теория чисел. — Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013. — С. 14–15.

20. Bodrenko, I. I. On n-dimensional surfaces in Euclidean space E^{n+p} that belong to $(n+1)$-dimensional plane / I. I. Bodrenko // Mathematical Notes. — 1994. — Vol. 54, № 4. — P. 992–994.

21. Bodrenko, I. I. On submanifolds with zero normal torsion in Euclidean space / I. I. Bodrenko // Siberian Mathematical Journal. — 1994. — Vol. 35, № 3. — P. 470–478.

22. Sánchez, C. U. The holomorphic 2-number of a Hermitian symmetric space / C. U. Sánchez // Geometriae Dedicata. — 1998. — Issue 1. — Vol. 72. — P. 69–81.

23. Sánchez, C. U. Geodesics and normal sections on real flag manifolds / C. U. Sánchez, A. M. Giunta, J. E. Tala // Revista de la Unión Mathemática Argentina. — 2007. — Vol. 48, № 1. — P. 17–25.

REFERENCES

1. Bodrenko I.I. Vnutrennyaya geometriya vneshne rekurrentnykh podmnogoobraziy [Internal geometry of externally recurrent submanifolds]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2004, vol. 11, no. 2, pp. 301.

2. Bodrenko I.I. Kriteriy parallelnosti vtoroy fundamentalnoy formy [The criterion of parallism of the second fundamental form]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 1999, vol. 6, no. 1, pp. 124–125.

3. Bodrenko I.I. Normalno ploskie psevdorekurrentnye podmnogoobraziya v evklidovykh prostranstvakh [Normally flat pseudo-recurrent submatifolds in Euclidean spaces]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2001, vol. 8, no. 2, pp. 540–541.

4. Bodrenko I.I. O giperpoverkhnostyakh s tsiklicheski rekurrentnoy vtoroy fundamentalnoy formoy v evklidovom prostranstve [On hypersurfaces with cyclic recurrent second fundamental form in Euclidean space]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2010, issue 13, pp. 23–35.

5. Bodrenko I.I. O kelerovykh podmnogoobraziyakh s rekurrentnoy vtoroy fundamentalnoy formoy [On Kaehler submanifolds with recurrent the second fundamental form]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2006, vol. 13, no. 4, pp. 617–618.

6. Bodrenko I.I. O podmnogoobraziyakh s nulevym normalnym krucheniem v evklidovom prostranstve [On submanifolds with zero normal torsion in Euclidean space]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1994, vol. 35, no. 3, pp. 527–536.

7. Bodrenko I.I. O podmnogoobraziyakh s tsiklicheski rekurrentnoy vtoroy fundamentalnoy formoy v evklidovykh prostranstvakh [On submanifolds with cyclic recurrent the second fundamental form in Euclidean spaces]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2011, vol. 18, no. 5, pp. 746.

8. Bodrenko I.I. Ob odnom klasse psevdorekurrentnykh podmnogoobraziy [On pseudo-recurrent submatifolds]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2001, vol. 8, no. 1, pp. 109.