ISSN 2222-8896

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# ВЕСТНИК

## ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1

## МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА

2014
№ 2 (21)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE RUSSIAN FEDERATION

# SCIENCE JOURNAL

## OF VOLGOGRAD STATE UNIVERSITY

## MATHEMATICS. PHYSICS

УДК 517.954
ББК 22.161

# О ВЗАИМОСВЯЗИ РАЗРЕШИМОСТЕЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ $L$-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ [1]

**Корольков Сергей Алексеевич**

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и теории функций
Волгоградского государственного университета
sergei.a.korolkov@gmail.com, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** В работе изучаются решения стационарного уравнения Шредингера в неограниченных областях римановых многообразий с некомпактным краем. Применен подход к постановке краевых задач, основанный на введении понятия класса слабо эквивалентных функций. В работе получены достаточные условия разрешимости некоторых краевых задач в рассматриваемых областях.

**Ключевые слова:** краевые задачи, $L$-гармонические функции, римановы многообразия, решения стационарного уравнения Шредингера, эквивалентные функции.

## Введение

Изучение эллиптических уравнений на римановых многообразиях является достаточно актуальным направлением в современной математике и лежит на стыке дифференциальной геометрии, математического анализа, теории случайных процессов. Важный класс проблем данного направления относится к получению теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность пространств ограниченных решений некоторых эллиптических уравнений на многообразии. Достаточно подробно современное состояние исследований в данном вопросе изложено в [9].

С другой стороны, существует широкий класс некомпактных римановых многообразий, которые допускают существование нетривиальных ограниченных решений эллиптических дифференциальных уравнений. Так, например, в [8] и [13] рассматриваются односвязные римановы многообразия с отрицательной секционной кривизной, отделенной от нуля и бесконечности. Строя геометрическую компактификацию многообразия $M$ путем добавления сферы $S(\infty)$ на бесконечности, авторы работ доказывают разрешимость задачи Дирихле на $\overline{M} = M \cup S(\infty)$ о восстановлении гармонической функции по непрерывным граничным данным на $S(\infty)$.

Заметим, что задачу Дирихле можно поставить на любом некомпактном римановом многообразии, на котором существует естественная компактификация. В частности, это можно сделать на сферически-симметричных многообразиях или на более общих классах модельных и квазимодельных многообразий. Точные результаты, касающиеся теорем типа Лиувилля и разрешимости задачи Дирихле на модельных и квазимодельных многообразиях были получены в работах [1; 4–6; 12].

С другой стороны, на произвольном некомпактном римановом многообразии постановка задачи Дирихле вызывает затруднения. Однако в [7] был предложен новый подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении понятия класса эквивалентных функций и позволивший осуществлять постановку краевых задач на многообразиях, на которых отсутствует естественная геометрическая компактификация (см. также: [1; 2; 10; 11]).

Отметим, что все приведенные выше результаты относятся к случаю, когда гармонические функции рассматриваются на некомпактных римановых многообразиях *без края* (или когда край компактен). Естественным образом возникает вопрос о том, что же будет в случае, когда многообразие имеет некомпактный край, как в этом случае ставить краевые задачи, какие условия являются необходимыми и достаточными для разрешимости таких задач?

В данной работе изучаются решения стационарного уравнения Шредингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \tag{1}$$

в неограниченных областях римановых многообразий с некомпактным краем. Здесь $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция, причем $c(x) \not\equiv 0$. Всюду далее решения уравнения (1) будем называть $L$-гармоническими функциями. Целью работы является получение условий разрешимости краевых задач для $L$-гармонических функций в рассматриваемых областях.

Перейдем к точным формулировкам. Пусть $M$ — связное некомпактное гладкое риманово многообразие без края и $\Omega$ — односвязная неограниченная область в $M$ с $C^1$-гладким краем $\partial\Omega$. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание $M$, то есть такая последовательность предкомпактных открытых подмножеств многообразия $M$ с $C^1$-гладкими краями $\partial B_k$, что $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$ для всех $k$. Всюду далее будем считать, что исчерпание выбрано таким образом, что $B_k \cap \Omega \neq \emptyset$, множества $B_k \cap \Omega$ односвязны, $\partial B_k$ и $\partial\Omega$ трансверсальны для всех $k$. В работе рассматриваются $L$-гармонические (на $M$, на $\Omega$) функции $u(x)$.

Пусть $f_1$ и $f_2$ — непрерывные на $M$ (на $\Omega$, на $\partial\Omega$, соотв.) функции. Будем говорить, что функции $f_1$ и $f_2$ *эквивалентны на $M$ (на $\Omega$, на $\partial\Omega$, соотв.)*, и использовать обозначение $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$ ($f_1 \overset{\Omega}{\sim} f_2$, $f_1 \overset{\partial\Omega}{\sim} f_2$, соотв.), если для некоторого гладкого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия $M$ выполнено равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{M\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$ ($\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{\Omega\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{\partial\Omega\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$, соотв.). Отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности и не зависит от выбора исчерпания $M$ (см.: [7; 11]).

Введем понятие $L$-потенциала многообразия $M$ относительно некоторого компакта $B \subset M$ (с $C^1$-границей $\partial B$). Не ограничивая общности, будем считать, что $B \subset B_k$ для всех $k$. Пусть $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность решений следующих задач Дирихле в

$B_k \setminus B$

$$\begin{cases} Lv_k = 0 & \text{на} \quad B_k \setminus B, \\ v_k = 1, & \text{на} \quad \partial B, \\ v_k = 0 & \text{на} \quad \partial B_k. \end{cases}$$

Последовательность функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в силу принципа максимума монотонно возрастает и сходится к предельной функции $v_{M\setminus B}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} v_k(x)$, которая является $L$-гармонической на $M \setminus B$ и $0 \leq v_M(x) \leq 1$ на $M \setminus B$. Функция $v_{M\setminus B}(x)$ называется *$L$-потенциалом многообразия $M$ относительно компакта $B$* (см. также [7]).

Следуя [7], многообразие $M$ будем называть $L$-строгим, если $L$-потенциал многообразия $M$ относительно некоторого компакта $B \subset M$ эквивалентен нулю. Отметим, что свойство $L$-строгости многообразия не зависит от выбора компакта $B$ (см., например, [7]).

Определим $L$-потенциал неограниченной области $\Omega$ следующим образом. Обозначим $B_k' = B_k \setminus \Omega$. Пусть $v_{M\setminus B_k'}$ — $L$-потенциал многообразия $M$ относительно $B_k'$. В силу принципа максимума, последовательность $\{v_{M\setminus B_k'}\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно возрастает, ограничена, а значит, существует предельная функция $v_\Omega$, которая является $L$-гармонической в $\Omega$, $0 \leq v_\Omega \leq 1$, причем $v_\Omega|_{\partial\Omega} = 1$. Функцию $v_\Omega$ будем называть $L$-потенциалом множества $\Omega$.

Введем понятие слабой эквивалентности функций. Пусть $\Upsilon$ — связное неограниченное подмножество $M$, $v_\Lambda$ — $L$-потенциал некоторого множества $\Lambda$, причем для некоторого компакта $B$ $\Upsilon \setminus B \subseteq \Lambda$. Пусть $f_1$ и $f_2$ — непрерывные на $\overline{\Upsilon}$ функции. Будем говорить, что функции $f_1$ и $f_2$ *слабо эквивалентны на $\Upsilon \setminus B$ относительно $L$-потенциала $v_\Lambda$*, и использовать обозначение $f_1 \overset{\Lambda}{\simeq} f_2$ на $\Upsilon \setminus B$, если для некоторой константы $C$

$$|f_1 - f_2| \leq Cv_\Lambda \text{ на } \overline{(\Upsilon \setminus B)}.$$

Будем говорить, что непрерывная на $\Upsilon$ функция $f$ принадлежит классу слабо допустимых на $\Upsilon$ функций относительно $L$-потенциала $v_\Lambda$ и обозначать $f \in K_\Lambda^*(\Upsilon)$, если для некоторого компакта $B$ найдется такая $L$-гармоническая на $\Upsilon \setminus B$ функция $u$, что

$$u \overset{\Lambda}{\simeq} f \text{ на } \Upsilon \setminus B.$$

**Замечание.** Пусть $\Upsilon \subseteq \Lambda$, $f_1$ и $f_2$ — непрерывные на $\overline{\Upsilon}$ функции, $B$ — некоторый компакт. Тогда, если $f_1 \overset{\Lambda}{\simeq} f_2$ на $\Upsilon \setminus B$, то в силу принципа максимума $f_1 \overset{\Lambda}{\simeq} f_2$ на $\Upsilon$.

С учетом замечания 3 в случае, когда $\Upsilon \subseteq \Lambda$ под записью $f_1 \overset{\Lambda}{\simeq} f_2$, всюду далее будем иметь в виду то, что $f_1 \overset{\Lambda}{\simeq} f_2$ на $\Upsilon$.

**Замечание.** Если $M$ — $L$-строгое многообразие и $B$ — компакт, то из $f \overset{M\setminus B}{\simeq} 0$ следует, что $f \overset{M}{\sim} 0$. Обратное, вообще говоря, неверно (для $L$-строгого многообразия $M$ из условия $f \overset{M}{\sim} 0$ в общем случае не следует, что $f \overset{M\setminus B}{\simeq} 0$ для некоторого компакта $B$).

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть $B$ — некоторый компакт и $u(x)$ — $L$-гармоническая на $\Omega \setminus B$ функция. Тогда найдется такая константа $C$ и $L$-гармоническая на $\Omega$ функция $f$, что*

$$|f - u| \leq Cv_{M\setminus B} \text{ на } \Omega \setminus B.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение, в котором получено достаточное условие разрешимости рассматриваемой краевой задачи.

**Теорема 2.** *Пусть $f \in K^*_\Omega(\Omega)$. Тогда для любой непрерывной на $\partial\Omega$ функции $\varphi$ такой, что $\varphi \overset{\Omega}{\simeq} f$ на $\partial\Omega$, существует решение следующей задачи в $\Omega$*

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \\ u \overset{\Omega}{\simeq} f. \end{cases}$$

**Замечание.** Теоремы 1 и 2 полностью обобщают результат, полученный в [11] для случая, когда $M$ является $L$-строгим и $\Omega = M$ (либо $\Omega = M \setminus B$ для некоторого компакта $B$). А именно, в случае, когда $\Omega = M$ и $M$ является $L$-строгим как следствие теоремы 1, принимая во внимание замечание 3, получаем результат, доказанный ранее в [11] (теорема 1, импликация $(iii) \Rightarrow (i)$). В случае, когда $M$ является $L$-строгим и $\Omega = M \setminus B$, где $B$ — некоторый компакт, как следствие теоремы 2 получаем импликацию $(iii) \Rightarrow (ii)$ теоремы 1 указанной работы. Обратные импликации очевидны.

Отметим, что в работе рассмотрен случай $c(x) \not\equiv 0$. В случае, когда $c(x) \equiv 0$, стационарное уравнение Шредингера превращается в уравнение Лапласа — Бельтрами. В случае рассмотрения $L$-гармонических функций появляются некоторые отличия по сравнению с гармоническими функциями (то есть решениями уравнения Лапласа — Бельтрами). Так, например, тривиальность пространства ограниченных гармонических функций на многообразии без края эквивалента тривиальности пространства неотрицательных гармонических функций на таких многообразиях (см., например, [9]). Для $L$-гармонических функций данное свойство уже не выполняется (см., например, [10]). Результаты, касающиеся вопросов разрешимости некоторых краевых задач для гармонических функций в неограниченных областях римановых многообразий и на конусах модельных многообразий можно найти, например, в [3].

## 1. Доказательство теоремы 1

**Лемма 1.** *Если $B$ — компакт, то $f_1 \overset{\Omega}{\simeq} f_2$ на $\Omega \setminus B$ тогда и только тогда, когда $f_1 \overset{\Omega\setminus B}{\simeq} f_2$ на $\Omega \setminus B$.*

***Доказательство.*** Пусть сначала $f_1 \overset{\Omega\setminus B}{\simeq} f_2$ на $\Omega \setminus B$. В силу определения слабой эквивалентности, имеем $|f_1 - f_2| \le C v_{\Omega\setminus B}$ для некоторой константы $C$.

В силу принципа максимума, $0 < d = \inf\limits_{\partial B \cap \Omega} v_\Omega < 1$. Применяя в $\Omega \setminus B$ принцип сравнения для функций $\frac{v_\Omega}{d}$ и $v_{\Omega\setminus B}$, получаем, что $\frac{v_\Omega}{d} > v_{\Omega\setminus B}$. Из последнего заключаем, что $f_1 \overset{\Omega}{\simeq} f_2$ на $\Omega \setminus B$.

Доказательство в обратную сторону непосредственно следует из принципа максимума.

**Лемма 2.** *Пусть $B$ — некоторый компакт. Тогда $v_{M\setminus B} \overset{\Omega}{\simeq} 0$ на $\Omega \setminus B$.*

***Доказательство.*** Пусть сначала $\Omega \cap B = \emptyset$.

Пусть, как и ранее, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание $M$ и $B'_k = B_k \setminus \Omega$. Тогда $B \subset B'_k$ начиная с некоторого $k$ и в силу принципа максимума $v_{M\setminus B} < v_{M\setminus B'_k}$ в $M \setminus B'_k$ начиная с некоторого $k$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем, что $v_{M\setminus B} < v_{\Omega}$ в $\Omega$, откуда следует требуемое.

Пусть теперь $\Omega \cap B \neq \emptyset$. Заметим, что $v_{M\setminus B} \overset{\Omega\setminus B}{\simeq} 0$ на $\Omega \setminus B$ в силу только что доказанного. С учетом леммы 1 получаем требуемое.

**Доказательство теоремы 1.** Пусть $B' \subset B$, причем $dist(\partial B', \partial B) \neq 0$, $B' \cap \Omega \neq \emptyset$. Продолжим по непрерывности функцию $u$ нулем всюду на $\Omega \cap B'$, причем так, что $|u| < \max\limits_{\partial B \cap \Omega} |u|$ на $\partial\Omega \cap (B \setminus B')$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание $M$, выбранное таким образом, что $\Omega \cap B_k \neq \emptyset$, $\partial\Omega$ и $\partial B_k$ трансверсальны для всех $k$ и $B \subset B_k$ для всех $k$.

Положим $\Omega(k) = \partial(B_k \cap \Omega)$, $\Omega(0) = \partial B \cap \Omega$.

Рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\begin{cases} L\varphi_k = 0 \quad \text{на } B_k \cap \Omega, \\ \varphi_k|_{\Omega(k)} = u|_{\Omega(k)}. \end{cases}$$

Докажем сначала, что последовательность $\varphi_k$ равномерно ограничена на $\Omega(0)$.

Предположим противное. Тогда найдется такая подпоследовательность $\{k_n\}$, что $a_{k_n} = \max\limits_{\Omega(0)} |\varphi_{k_n}| \to \infty$ при $n \to \infty$. Полагаем $k_n = k$ и $\Phi_k = \varphi_k / a_k$ на $B_k \cap \Omega$. Тогда

$$\begin{cases} \Phi_k = u/a_k & \text{на} \quad \partial(B_k \cap \Omega) \setminus B, \\ \Phi_k = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega \cap B', \\ \max\limits_{\Omega(0)} |\Phi_k| = 1, & \\ \Phi_k = u/a_k & \text{на} \quad \partial\Omega \cap (B \setminus B'). \end{cases}$$

Применяя принцип максимума для функции $\Phi_k - \frac{u}{a_k}$ сначала на $(B_k \cap \Omega) \setminus B$, а затем на $B \cap \Omega$, получаем, что

$$-1 - \frac{\max\limits_{\Omega(0)} |u|}{a_k} + \frac{u}{a_k} \leq \Phi_k \leq 1 + \frac{\max\limits_{\Omega(0)} |u|}{a_k} + \frac{u}{a_k} \text{ на } B_k \cap \Omega. \tag{2}$$

Действительно, так как $\max\limits_{\Omega(0)} |\Phi_k| = 1$, то $-1 \leq \Phi_k \leq 1$ на $\Omega(0)$. Из последнего следует, что

$$-1 - \frac{\max\limits_{\Omega(0)} |u|}{a_k} \leq \Phi_k - \frac{u}{a_k} \leq 1 + \frac{\max\limits_{\Omega(0)} |u|}{a_k} \text{ на } \Omega(0).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\Phi_k - \frac{u}{a_k} = \frac{\varphi_k}{a_k} - \frac{u}{a_k} = \frac{u}{a_k} - \frac{u}{a_k} = 0 \text{ на } (\partial\Omega \setminus B) \cup (\partial B_k \cap \Omega),$$

заключаем, что

$$-1 - \frac{\max\limits_{\Omega(0)} |u|}{a_k} \leq \Phi_k - \frac{u}{a_k} \leq 1 + \frac{\max\limits_{\Omega(0)} |u|}{a_k} \text{ на } (B_k \cap \Omega) \setminus B. \tag{3}$$

С другой стороны, $\Phi_k = u/a_k$ на $\partial\Omega \cap B$. Учитывая, что $a_k \to \infty$ при $k \to \infty$, получаем, что $|\Phi_k| < 1/2$ на $\partial\Omega \cap B$ при достаточно больших $k$. Принимая во внимание то, что $\max\limits_{\Omega(0)} |\Phi_k| = 1$, в силу принципа максимума, получаем, что

$$-1 \le \Phi_k \le 1 \text{ на } B \cap \Omega \tag{4}$$

для достаточно больших $k$.

Объединяя оценки (3) и (4), получаем (2).

Из (2) следует, что $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ локально равномерно ограничена в $\Omega$. Отсюда следует существование подпоследовательности последовательности $\{\Phi_k\}$, сходящейся равномерно к некоторой предельной функции $\Phi$ на любом компактном подмножестве $\Omega$, причем $L\Phi = 0$ в $\Omega$, $|\Phi||_{\partial\Omega\cap B} < 1/2$ и $-1 \le \Phi \le 1$ на $\Omega$. Заметим также, что выбирая подходящим образом подпоследовательность последовательности $\{\Phi_k\}$, можно считать, что $\max\limits_{\Omega(0)} |\Phi| = 1$. Пришли к противоречию с принципом максимума.

Таким образом, предположение о том, что $a_{k_n} = \max\limits_{\Omega(0)} \varphi_{k_n} \to \infty$ при $n \to \infty$ неверно, откуда следует, что последовательность $\varphi_k$ равномерно ограничена на $\Omega(0)$. Из последнего получаем локальную равномерную ограниченность последовательности $\{\varphi_k - u\}_{k=1}^{\infty}$ на $\Omega$, откуда следует, что существует $f = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$, $Lf = 0$.

Как было показано выше, существует $\overline{a} = \sup\limits_k \max\limits_{\Omega(0)} |\varphi_k| < \infty$. С учетом принципа максимума и того, что $\varphi_k|_{\Omega(k)} = u|_{\Omega(k)}$, имеем

$$u - (\overline{a} + \max_{\Omega(0)} |u|) v_{M\setminus B} \le \varphi_k \le u + (\overline{a} + \max_{\Omega(0)} |u|) v_{M\setminus B} \text{ на } (B_k \cap \Omega) \setminus B.$$

Переходя в последней оценке к пределу при $k \to \infty$, получаем требуемое.

Теорема 1 доказана.

## 2. Доказательство теоремы 2

**Лемма 3.** *Пусть $B$ — компакт и $g$ — непрерывная $L$-гармоническая на $M \setminus B$ функция. Тогда для любой функции $\Phi$, непрерывной на $\partial B$, существует решение следующей задачи в $M \setminus B$*

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ в } M \setminus B, \\ u|_{\partial B} = \Phi, \\ u \overset{M\setminus B}{\simeq} g. \end{cases}$$

***Доказательство.*** Из теоремы 1 следует существование такой константы $C$ и $L$-гармонической на $M$ функции $w$, что

$$|g - w| \le C v_{M\setminus B} \text{ на } M \setminus B.$$

Из последнего заключаем, что $w \overset{M\setminus B}{\simeq} g$ на $M \setminus B$.

Поступая в точности как и в [11] (при доказательстве импликации $(i) \to (ii)$ теоремы 1), получаем существование в $M \setminus B$ такой $L$-гармонической функции $u$, что $u|_{\partial B} = \Phi$,

$$|u - w| \le (\max_{\partial B} |\Phi| + 1) v_{M\setminus B},$$

откуда следует требуемое.

Полагая $g \equiv 0$ в условии леммы 3 и, соответственно, $w \equiv 0$ в доказательстве леммы 3, получаем следующее утверждение.

**Следствие 1.** *Пусть $B$ — компакт. Тогда для любой функции $\Phi$, непрерывной на $\partial B$, существует решение следующей задачи в $M \setminus B$*

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ в } M \setminus B, \\ u|_{\partial B} = \Phi, \\ u \overset{M\setminus B}{\simeq} 0, \end{cases}$$

*такое, что* $|u| \leq (1 + \max\limits_{\partial B} \Phi) v_{M\setminus B}$.

**Доказательство теоремы 2.** Докажем сначала теорему 2 для случая $f \equiv 0$, то есть что для любой непрерывной на $\partial\Omega$ функции $\varphi$ такой, что $\varphi \overset{\Omega}{\simeq} 0$ на $\partial\Omega$, существует $L$-гармоническая в $\Omega$ функция $w$ такая, что $w|_{\partial\Omega} = \varphi$ и $w \overset{\Omega}{\simeq} 0$.

Пусть $\hat{f}$ — непрерывное ограниченное продолжение $\varphi$ с $\partial\Omega$ на $M$. Пусть, как и ранее, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание $M$, $B'_k = B_k \setminus \Omega$.

В соответствии со следствием 1, в $M \setminus B'_k$ существует решение следующей задачи

$$\begin{cases} Lw_k = 0 \text{ в } M \setminus B'_k, \\ w_k|_{\partial B'_k} = \hat{f}|_{\partial B'_k}, \\ w_k \overset{M\setminus B'_k}{\simeq} 0, \end{cases}$$

причем такое, что

$$|w_k| \leq (1 + \max_{\partial B'_k} \hat{f}|_{\partial B'_k}) v_{M\setminus B'_k}. \tag{5}$$

Из (5) с учетом ограниченности функции $\hat{f}$ следует равномерная ограниченность семейства функций $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\Omega$. Пусть $w(x)$ — предельная функция. Заметим, что $Lw = 0$, $w|_{\partial\Omega} = \varphi$ в силу того, что $w_k|_{\partial B'_k} = \hat{f}|_{\partial B'_k}$ и $\hat{f}_{\partial\Omega} = \varphi$. Кроме этого, переходя в оценке (5) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$|w| \leq (1 + \max_{\partial\Omega} \hat{f}) v_{\Omega},$$

откуда следует, что $w \overset{\Omega}{\simeq} 0$.

Пусть теперь $f \in K^*_{\Omega}(\Omega) \not\equiv 0$. Из последнего, в силу определения класса $K^*_{\Omega}(\Omega)$, следует существование такого компакта $B$ и $L$-гармонической на $\Omega\setminus B$ функции $g$ такой, что

$$|g - f| \leq C v_{\Omega} \text{ на } \Omega \setminus B. \tag{6}$$

В силу теоремы 1 найдется такая константа $C_1$ и $L$-гармоническая на $\Omega$ функция $v$, что

$$|g - v| \leq C_1 v_{M\setminus B} \text{ на } \Omega \setminus B. \tag{7}$$

Объединяя оценки (6), (7) и применяя лемму 2, получаем, что $v \overset{\Omega}{\simeq} f$ на $\Omega \setminus B$. С учетом замечания 3 и того, что $\varphi \overset{\Omega}{\simeq} f$ на $\partial\Omega$, заключаем, что $v \overset{\Omega}{\simeq} f$ и $v \overset{\Omega}{\simeq} \varphi$ на $\partial\Omega$.

По доказанному выше существует решение следующей задачи в $\Omega$:

$$\begin{cases} Lw = 0 \text{ в } \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} = \varphi - v|_{\partial\Omega}, \\ w \overset{\Omega}{\simeq} 0. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $u \equiv w + v$ является искомой. Теорема 2 доказана.

## *ПРИМЕЧАНИЕ*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-97038-р_поволжье_а).

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. Корольков, С. А. Гармонические функции на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 1319–1332.

2. Корольков, С. А. Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Вестник Волгоградсткого государтвенного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 14 (1). — С. 23–40.

3. Корольков, С. А. Краевые задачи для гармонических функций в неограниченных областях римановых многообразий / С. А. Корольков, Е. С. Королькова // Вестник Волгоградсткого государтвенного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 18 (1). — С. 45–58.

4. Лосев, А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 12. — С. 15–24.

5. Лосев, А. Г. Об одном критерии гиперболичности некомпактных римановых многообразий специального вида / А. Г. Лосев // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 4. — С. 558–564.

6. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 84–110.

7. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 591–599.

8. Anderson, M. T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature / M. T. Anderson // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 4. — P. 701–721.

9. Grigor'yan, A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36, № 2. — P. 135–249.

10. Korolkov, S. A. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends / S. A. Korolkov, A. G. Losev // Math. Z. — 2012. — Vol. 272, № 1–2. — P. 459–472.

11. Losev, A. G. Unbounded solutions of the Stationary Shrödinger equation on Riemannian manifolds / A. G. Losev, E. A. Mazepa, V. Y. Chebanenko // Computational Methods and Function Theory. — 2002. — Vol. 43, № 3. — P. 443–451.

12. Murata, M. Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds / M. Murata // Potential Theory. — 1992. — P. 251–259.

13. Sullivan, D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds / D. Sullivan // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 4. — P. 723–732.