ISSN 2222-8896

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# ВЕСТНИК

## ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1

## МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА

2014
№ 2 (21)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE RUSSIAN FEDERATION

# SCIENCE JOURNAL

## OF VOLGOGRAD STATE UNIVERSITY

## MATHEMATICS. PHYSICS

ИЗДАТЕЛЬСТВО ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 512.57
ББК 22.144

# О РЕШЕТКАХ КОНГРУЭНЦИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УНАРНЫХ АЛГЕБР

**Попов Владимир Валентинович**

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики
Волгоградского государственного университета
popov_v_v@rambler.ru, kiem@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** Получено описание всех однопорожденных коммутативных унарных алгебр с конечным числом унарных операций, решетка конгруэнций которых дистрибутивна, а любой элемент цикличен по каждой из операций.

**Ключевые слова:** унарная операция, коммутативная унарная алгебра, решетка конгруэнций, дистрибутивная решетка, циклический элемент.

В работе изучается решетка конгруэнций унарных алгебр, то есть алгебр, сигнатура которых содержит только унарные операции. Алгебры с $m$ унарными операциями рассматривались А.И. Мальцевым [4, с. 348] и были названы $m$-уноидами. Унар — это алгебра с одной унарной операцией. В работах [2; 3; 7] изучались унары, решетки конгруэнций которых принадлежат заданному классу решеток (полумодулярны, атомарны, дистрибутивны и т. д.). Коммутативные уноиды изучались, например, в [6]. В [5] получено описание всех связных 2-уноидов с коммутирующими унарными операциями и дистрибутивной решеткой конгруэнций. В данной работе рассматриваются унарные алгебры с конечным числом попарно коммутирующих операций. Все необходимые определения имеются в [1; 4].

Пусть $\mathbf{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ — унарная алгебра. Она называется коммутативной, если для всех $i, j \leq m$ на $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ истинно тождество

$$f_i(f_j(x)) = f_j(f_i(x)).$$

Положим

$$O(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \{f_1^{i_1} f_2^{i_2} \ldots f_m^{i_m}(x) : i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \in \mathbf{N}_0\},$$

где $\mathbf{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел. Если алгебра $\mathbf{A}$ коммутативна и $\varphi \in O(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, то $\varphi$ коммутирует с любой операцией $f_i$. При этом всякая конгруэнция $\theta$ на $\mathbf{A}$ стабильна относительно операции $\varphi$ (то есть из $x, y \in A$ и $x \,\theta\, y$ вытекает $\varphi(x) \,\theta\, \varphi(y)$). Отсюда легко заключить, что решетки конгруэнций алгебр $\mathbf{A}$ и $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m, \varphi \rangle$ изоморфны. Элемент $x \in A$ называется $\varphi$-циклическим, если найдется целое число $n \geq 1$, для которого $\varphi^n(x) = x$.

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathbf{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ *— связная коммутативная унарная алгебра,* $m \geq 1$*. Пусть* $n_1, n_2, \ldots, n_m \geq 1$ *— целые числа и при каждом* $i \leq m$ *на* $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ *выполнено тождество* $f_i^{n_i}(x) = x$*. Тогда эквивалентны следующие условия:*

*(1) Решетка конгруэнций* $\mathrm{Con}\, A$ *дистрибутивна.*

*(2) Найдутся целые числа* $k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 1$ *и такая унарная операция* $h$ *на* $\mathbf{A}$*, что при каждом* $i = 1, 2, \ldots, m$ *на* $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ *выполнено тождество* $f_i(x) = h^{k_i}(x)$*.*

***Доказательство.*** Случай $m = 1$ рассмотрен в работе Д.П. Егоровой [3]. Случай $m = 2$ изучался в работе [5, лемма 17, с. 35]. Поэтому в дальнейшем считаем, что теорема верна при $m \leq 2$.

Пусть $m > 2$ и выполнено свойство (1). Предположим, что теорема верна для всех коммутативных унарных алгебр, сигнатура которых состоит менее чем из $m$ унарных операций. При любом $i = 1, 2, \ldots, m$ из справедливости на $\mathbf{A}$ тождества $f_i^{n_i}(x) = x$ следует, что операция $f_i$ обратима на $\mathbf{A}$. Отсюда легко заключить, что любая операция $\varphi \in O(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ обратима на $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}$ порождается любым своим элементом. Пусть $a$ — порождающий элемент алгебры $\mathbf{A}$. Положим

$$S = \{\varphi(a) : \varphi \in O(f_1, f_2, \ldots, f_{m-1})\}.$$

Далее возможны два случая.

**Случай 1.** Найдется элемент $b \in S \cap f_m(S)$. Тогда $b = \varphi(a)$ и $b = f_m(\psi(a))$ для некоторых операций $\varphi, \psi \in O(f_1, f_2, \ldots, f_{m-1})$. Поэтому $\varphi(a) = f_m(\psi(a))$, откуда $f_m(a) = \psi^{-1}\varphi(a)$, что влечет $f_m \in O(f_1, f_2, \ldots, f_{m-1})$, и потому решетки конгруэнций унарных алгебр $\mathbf{A}$ и $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}\rangle$ изоморфны. Следовательно, заключение доказываемой теоремы вытекает из индуктивного предположения.

**Случай 2.** $S \cap f_m(S) = \emptyset$. Положим $S_0 = S$ и $S_i = f_m^i(S)$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Так как на $\mathbf{A}$ выполнено тождество $f_m^{n_m}(x) = x$, найдется целое $k \leq n_m$, для которого $S \cap S_k \neq$. Не теряя общности, считаем, что $k$ — наименьшее положительное число с таким свойством. Ввиду обратимости на $\mathbf{A}$ операции $f_m$ легко проверить, что множества $S_0 = S$, $S_1$, …, $S_{k-1}$ попарно дизъюнктны и $S_k = S_0 = S$. Положим $T = S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_{k-1}$. Ясно, что $T$ — подалгебра алгебры $\mathbf{A}$, порожденная элементом $a$. Так как $\mathbf{A}$ порождается любым своим элементом, получаем $T = A$.

Пусть $\theta$ — некоторая конгруэнция на алгебре $\mathbf{S} = \langle S, f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}\rangle$. Определим конгруэнцию $\widetilde{\theta}$ на алгебре $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}, f_m\rangle$ следующим образом:

(a) Если $x, x' \in S_0$, то $x\widetilde{\theta}x' \iff x\theta x'$.

(b) Если $x, x' \in S_i$, где $0 < i \leq k$, то $x\widetilde{\theta}x' \iff$ найдутся элементы $t, t' \in S$, для которых $t\theta t'$, $f_m^i(t) = x$ и $f_m^i(t') = x'$.

Нетрудно проверить, что ограничение конгруэнции $\widetilde{\theta}$ на множество $S_k = S_0$ совпадает с $\theta$.

Допустим, что решетка конгруэнций алгебры $\mathbf{S} = \langle S, f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}\rangle$ не дистрибутивна. Тогда найдутся три конгруэнции $\sigma$, $\gamma$, $\delta$ на $\mathbf{S}$ и различные элементы $x, x' \in S$, такие, что $x\sigma x'$, существует $\gamma, \delta$-путь $\Pi$ из $x$ в $x'$, но не существует $\gamma, \delta$-пути из $x$ в $x'$, все элементы которого лежат в одном $\sigma$-классе с элементами $x$ и $x'$ (см.: [5, лемма 1, с. 23]). Рассмотрим конгруэнции $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\delta}$ на алгебре $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ и те же элементы $x, x' \in S$. Ясно, что $x\widetilde{\sigma}x'$, $\Pi$ является $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$-путем из $x$ в $x'$, но не существует $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$-пути из $x$ в $x'$, все элементы которого лежат в одном $\widetilde{\sigma}$-классе с элементами $x$ и $x'$. Поэтому решетка конгруэнций алгебры $\mathbf{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ не дистрибутивна. Противоречие с условием доказываемой теоремы показывает, что решетка $\mathrm{Con}\mathbf{S}$ дистрибутивна.

Так как сигнатура алгебры $\mathbf{S}$ содержит $m-1$ унарную операцию, по индуктивному предположению найдутся целые числа $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1} \geq 1$ и такая унарная операция $h_0$ на $\mathbf{S}$, что при каждом $i = 1, 2, \ldots, m-1$ на $\mathbf{S}$ выполнено тождество $f_i(x) = h_0^{k_i}(x)$. Операцию $h_0$ на $S$ можно продолжить до операции на $A$: если $x \in S_i$, где $0 < i \leq k$, то существует и единственен элемент $t \in S = S_0$, для которого $f_m^i(t) = x$. Полагаем $h_0(x) = f_m^i(h_0(t))$. Теперь ясно, что решетка конгруэнций алгебры $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ изоморфна решетке конгруэнций алгебры $\langle A, h_0, f_m \rangle$. Используя теперь доказываемую теорему для алгебры $\langle A, h_0, f_m \rangle$, фиксируем такую унарную операцию $h$ на $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$, что для некоторых целых $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ на $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ выполнены тождества $h_0(x) = h^{\alpha}(x)$ и $f_m(x) = h^{\beta}(x)$. Тогда $h$ — искомая операция на $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$, поскольку при $i = 1, 2, \ldots, m-1$ на $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ выполнено тождество $f_i(x) = h_0^{k_i}(x) = h^{k_i \cdot \alpha}(x)$ и $f_m(x) = h^{\beta}(x)$.

Пусть теперь выполнено свойство (2). Тогда решетка конгруэнций алгебры $\mathbf{A}\rangle$ изоморфна решетке конгруэнций унара $\langle A, h \rangle$, а эта решетка дистрибутивна, поскольку унар $\langle A, h \rangle$ является циклом [3].

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. Артамонов, В. А. Общая алгебра / В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков. — М. : Наука, 1991. — Т. II. — 480 с.

2. Бощенко, А. П. Псевдодополнения в решетке конгруэнций унаров / А. П. Бощенко // Алгебраические системы : межвуз. сб. науч. работ. — Волгоград, 1989. — С. 23–26.

3. Егорова, Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры / Д. П. Егорова // Упорядоченные множества и решетки : Межвуз. науч. сб. — Саратов, 1978. — № 5. — С. 11–44.

4. Мальцев, А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. — М. : Наука, 1970. — 392 с.

5. Попов, В. В. О коллективной нормальности, о вращаемых графах и конгруэнциях уноидов / В. В. Попов. — Saarbrucken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. — 64 с.

6. Усольцев, В. Л. Минимальные унарные алгебры с двумя коммутирующими операциями : деп. в ВИНИТИ, № 3857-D96 / В. Л. Усольцев. — М., 1996. — 20 с.

7. Berman, J. On the congruence lattices of unary algebras / J. Berman // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 36, № 1. — P. 34–38.

## *REFERENCES*

1. Artamonov V.A., Saliy V.N., Skornyakov L.A. *Obschaya algebra* [General Algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1991, vol. II. 480 p.

2. Boschenko A.P. Psevdodopolneniya v reshetke kongruentsiy unarov [Pseudocomplementation in the congruence lattice of a unary]. *Algebraicheskie sistemy : mezhvuz. sb. nauch. rabot* [Algebraic systems]. Volgograd, 1989, pp. 23–26.

3. Egorova D.P. Struktura kongruentsiy unarnoy algebry [Congruence structure of unary algebra]. *Uporyadochennye mnozhestva i reshetki : Mezhvuz. nauch. sb.* [Ordered sets and lattices]. Saratov, 1978, no. 5, pp. 11–44.

4. Maltsev A.I. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 392 p.