

ISSN 2222-8896



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЕСТНИК

ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА

2014
№ 2 (21)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE RUSSIAN FEDERATION

SCIENCE JOURNAL
OF VOLGOGRAD STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS. PHYSICS





УДК 519.2(073)
ББК 22.17я73

ОПЦИОННЫЙ КАЛЬКУЛЯТОР ДЛЯ РАСЧЕТА СТОИМОСТИ АЗИАТСКИХ ОПЦИОНОВ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМОЙ

Васильева Татьяна Анатольевна

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления
Волгоградского государственного университета
tatiana_vas@mail.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Зеленый Денис Дмитриевич

Магистрант кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления
Волгоградского государственного университета
den_green@mail.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Популярность опционов, вторичных финансовых инструментов, растет, стимулируя развитие математических методов решения задач по определению их стоимости. В настоящее время на рынке ценных бумаг работает большое количество видов опционов: европейские, американские, барьерные, экзотические и т. д. Данная статья посвящена оцениванию азиатских опционов. Математической моделью рассматриваемой задачи является модель Блэка – Шоулза [6], представляющая собой параболическое уравнение в частных производных относительно стоимости азиатского опциона. Применение неявных разностных схем к решению поставленной задачи позволяет получить устойчивое численное решение для различных значений волатильности, безрисковой ставки и времени исполнения опциона [1–3; 9].

Ключевые слова: модель Блэка – Шоулза, опционы, азиатский опцион, экзотические опционы, финансовая математика, вторичные ценные бумаги, неявные разностные схемы, опционный калькулятор.

1. Краткие сведения об опционах

Опцион – это контракт на продажу или покупку ценных бумаг по *договорной цене* E , покупаемых до или в момент *срока исполнения опциона* T [4; 7]. Обозначим стоимость базового актива через S , текущий момент времени через t ($t \in [0; T]$), а функцию стоимости опциона через $V(S, t)$.

Существует два основных типа опционов – *call* и *put*. *Put*-опцион – это опцион, который дает право держателю опциона продать актив по фиксированной цене E в момент времени T . *Call*-опцион – это опцион, который дает право купить актив по фиксированной цене E в момент

времени T . После установленного договором срока, то есть по истечении времени T ($t > T$), опцион обесценивается, и выплата такого опциона становится равной нулю.

Помимо типов, опционы подразделяются по стилям: *европейские*, *американские* и *экзотические*. Европейский опцион может быть исполнен только в момент времени исполнения опциона T , американский опцион при $t \leq T$.

Азиатский опцион – это опцион, цена исполнения которого определяется как средняя цена опциона за весь период его исполнения. Цена этого опциона определяется «траекторией» ценовых значений базового актива.

Обычно азиатские опционы заключаются на товары, биржевые индексы, валюту и ставку процента. Такие опционы широко применяются на валютном рынке, на рынке металлов и энергоресурсов.

Для определения цены азиатского опциона на момент времени t необходимо знать среднее значение цен S , при $t \leq T$. В данной работе использовалась следующая формула для вычисления среднего значения цены азиатского опциона:

$$A_t = \int_0^t f(S_\theta, \theta) d\theta.$$

2. Метод Блэка – Шоулза

Метод был разработан в 1973 г. учеными Фишером Блэком и Майроном Шоулзом [1]. Согласно модели Блэка – Шоулза цена базового актива на момент времени t рассчитывается по уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (1)$$

Здесь σ – волатильность; r – безрисковая процентная ставка. В модели предполагается отсутствие транзакционных издержек и возможности арбитража.

Через A обозначим усредненное значение всех имеющихся цен базовых активов S к моменту времени t . Следовательно, функция выплаты V азиатского опциона зависит от трех параметров – A , S , t , и уравнение Блэка – Шоулза принимает вид [8]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + f(S, t) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0. \quad (2)$$

В отличие от стандартной версии уравнения Блэка – Шоулза, выражение (2) содержит новое слагаемое $f(S, T) = \frac{\partial V}{\partial A}$.

Таким образом, имеем следующую **постановку задачи**, которая состоит в численном решении уравнения (2) относительно $V(S, t, A)$ – стоимости азиатского опциона при следующих заданных параметрах: r – процентной ставки; σ – коэффициента волатильности; T – времени исполнения опциона, E – цены исполнения опциона в момент времени T .

Решения уравнения (2) определены на области $S > 0$, $A > 0$, $0 \leq t \leq T$ в трехмерном пространстве (S, A, t) .

Поиск решения в пространстве переменных S , t и A приводит к вычислительным трудностям, поэтому переформулируем задачу (2) с целью уменьшения пространства решений посредством введения вспомогательной переменной

$$R_t = \frac{1}{S_t} \int_0^t S_\theta d\theta \quad (3)$$

и дополнительной функции

$$V(S, A, t) = S \cdot H(R, t). \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4), получим следующий вид уравнения Блэка – Шоулза:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR) \frac{\partial H}{\partial R} = 0. \quad (5)$$

Начальным условием является функция выплат, определяемая величинами E , T и R_T :

$$H(R_T, T) = (1 - \frac{1}{T} R_T)^+. \quad (6)$$

Уравнение (5) предполагает проход по времени от $t = T$ до $t = 0$. Для учета этого необходимо изменить знак производных по времени в (5) и в левом граничном условии. Перепишем уравнение (5), начальное условие (6) и граничные условия в виде

$$-\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR) \frac{\partial H}{\partial R} = 0, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0 \text{ при } R \rightarrow 0, \quad H(R, t) = 0 \text{ при } R \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$H(R_T, T) = (1 - \frac{R_T}{T})^+. \quad (9)$$

Таким образом, постановка данной задачи представлена уравнениями (7–9) относительно $H(R, t)$, которые решались неявной разностной схемой [5] относительно H_n^i

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 R_i^2}{h^2} - \frac{(1 - rR_i)}{2h} \right) H_{i-1}^{n+1} + \left(-\frac{1}{\tau} - \frac{\sigma^2 R_i^2}{h^2} \right) H_i^{n+1} + \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 R_i^2}{h^2} + \frac{(1 - rR_i)}{2h} \right) H_{i+1}^{n+1} = -\frac{1}{\tau} H_i^n$$

с начальным условием (9) и граничными условиями при $i = 0$ и $i = N$

$$\frac{H_0^1 - H_0^0}{\tau} - \frac{H_1^0 - H_0^0}{h} = 0 \text{ при } i = 0,$$

$$\frac{H_N^1 - H_N^0}{\tau} - \frac{H_N^0 - H_{N-1}^0}{h} = 0 \text{ при } i = N.$$

После вычисления дискретных значений функции $H(R, t)$ цена азиатского опциона $V(S, t)$ рассчитывается по формуле (4).

3. Результаты численных расчетов

Для численного решения задачи был разработан алгоритм, реализованный в виде программы *Asia_option* на языке программирования C++. Данные расчетов для анализа полученных результатов сформированы в виде таблиц и графиков в формате электронных таблиц и диаграмм Excel.

Рассмотрим работу программы на примере азиатского *put*-опциона. Определим следующие значения входных параметров: $r = 0,05$; $\sigma = 0,25$; $E = 10$; $T = 1$. Для простоты наблюдений выберем небольшое количество разбиений по времени, то есть зададим $n = 10$.

На графике (рис. 1) представлена поверхность выплаты азиатского *put*-опциона при следующих значениях параметров $T = 1$; $r = 0,05$; $S_0 = 10$, $\sigma = 0,1$. Цена азиатского опциона в момент времени t находится в точке пересечения текущего значения цены актива S и полученной поверхности $V(S, t)$.

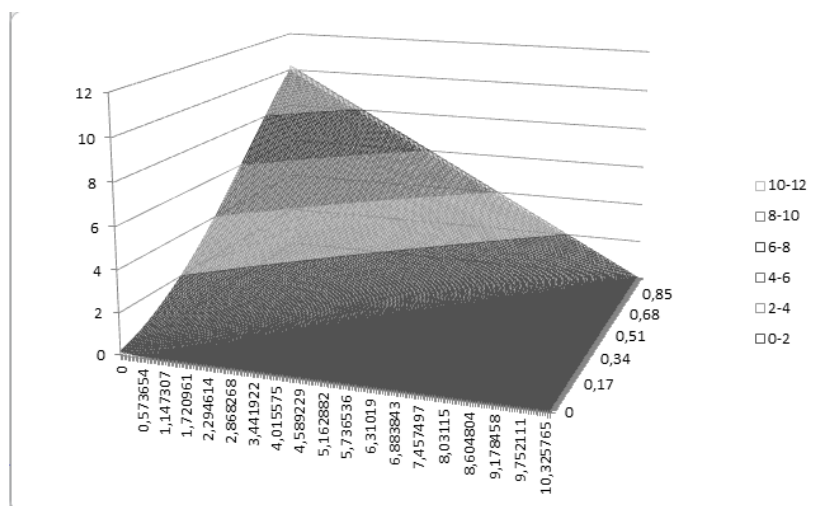


Рис. 1

Программа *Asia_option* представляет собой опционный калькулятор, предназначенный для вычисления стоимости азиатского опциона на основе разработанной методики численного решения уравнений Блэка – Шоулза. В меню программы (рис. 2) задаются входные данные для проведения численных расчетов: T – срок исполнения опциона; r – безрисковая процентная ставка, σ – волатильность; S_0 – начальная цена актива.

ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Период опциона : T

Процентная ставка : r

Волатильность : σ

Начальная стоимость активов : S_0

Рис. 2

Значение каждого параметра заносится в соответствующее поле ввода меню. С помощью компьютерной мыши выбирается поле ввода, в которое вносится необходимое значение параметра и нажимается клавиша *Tab*. После введения всех параметров необходимо нажать *Start* для начала обработки и вывода результатов расчетов на экран монитора.

Опционные калькуляторы широко используются при анализе биржевых сводок, позволяя предсказать поведение стоимости опционов при изменении различных параметров, таких как волатильность, процентная ставка, стоимость базовых активов, период исполнения опциона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева, Т. А. Application Mellin transforms to the Black – Scholes equations / Т. А. Васильева, О. Е. Васильева // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2009. – № 12. – С. 55–63.
2. Васильева, Т. Численные методы оценивания финансовых опционов / Т. Васильева // Математика. Экономика. Образование : сб. материалов XXI Междунар. конф. – Новороссийск, 2012. – С. 18–19.