



УДК 517.958:531.32

ББК 22.25

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД<sup>1</sup>

**Дьяконова Татьяна Андреевна**

Аспирант кафедры информационных систем и компьютерного моделирования  
Волгоградского государственного университета  
tatjana-djakonova@rambler.ru, infomod@volsu.ru  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Писарев Андрей Владимирович**

Кандидат физико-математических наук,  
старший преподаватель кафедры информационных систем  
и компьютерного моделирования  
Волгоградского государственного университета  
pisarev@volsu.ru, infomod@volsu.ru  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Хоперсков Александр Валентинович**

Доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры информационных систем и компьютерного моделирования  
Волгоградского государственного университета  
ahoperskov@gmail.com, infomod@volsu.ru  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Храпов Сергей Сергеевич**

Кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования  
Волгоградского государственного университета  
xss-ip@mail.ru, infomod@volsu.ru  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** Построена математическая модель динамики поверхностных вод с учетом основных факторов, влияющих на затопление территорий: поверхностные и подземные источники воды — плотины, осадки, ключи, гейзеры, выход грунтовых вод на поверхность суши; рельеф местности с учетом антропогенной застройки территорий и рельефа дна водоемов; свойства подстилающей поверхности — придонное трение, инфильтрация (впитывание воды в грунт); внутреннее вязкое трение; ветровое воздействие — нагонные волны; вращение Земли — сила Кориолиса; испарение.

**Ключевые слова:** уравнения мелкой воды, испарение воды, паводки, коэффициент шероховатости, коэффициент вязкого трения.

## 1. Применение модели мелкой воды для описания геофизических течений

Наибольшее развитие получили гидродинамические модели для описания различных физических процессов как в отдельных областях морей и океанов, так и для всего водоема в целом. В рамках таких крупномасштабных моделей изучаются различного рода глобальные циркуляции, изменчивость уровня, динамика солености и ледяных заторов, волновые движения, цунами, аварийные ситуации [8]. Близкими являются задачи определения структуры течений в водохранилищах и равнинных реках для различных прикладных исследований [10].

Выделим успешные попытки построения моделей конкретных водоемов: озеро Нойзидлер (Австрия), некоторых прибрежных районов северо-западной Атлантики, островов в районе Большого барьерного рифа с использованием неструктурированной сетки, Азовского моря и др [4]. Однако подчеркнем, что задание границы острова на основе неструктурированной сетки сразу теряет эффективность в случае описания затопления суши. При решении задачи динамики поверхностных вод по сухому дну (описание затопления территории) возникают проблемы корректного моделирования границы «вода — сухое дно» [2].

Использование уравнений Сен-Венана не ограничивается описанием только тонкого слоя несжимаемой жидкости на твердой поверхности. С большим успехом модель мелкой воды применяется для изучения динамики вихревых структур в атмосферах планет (например, Юпитера), движения в вязкоэластичной трубке, волновых процессов и ауторегуляции при течении крови в сосудах, аккреционных астрофизических дисков в приближении гидростатического равновесия. Уравнения мелкой воды лежат в основе ряда моделей для расчета адвекции и диффузии загрязняющих веществ на мелководье [3]. В рамках модели мелкой воды рассматриваются многофазные течения и вращающаяся жидкость. Популярными остаются модели динамики тайфунов [9].

Отметим также, что уравнения мелкой воды являются удобной и распространенной моделью для тестирования и апробации численных схем перед рассмотрением системы полных газодинамических уравнений.

## 2. Уравнения мелкой воды

Будем исходить из интегральных законов сохранения для однородной несжимаемой жидкости, ограничившись рассмотрением законов сохранения массы и импульса «жидких частиц» с плотностью  $\rho = const$  и объемом  $V(t)$ , деформирующимся в процессе движения произвольным образом (см. рис. 1):

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV = Q, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \vec{u} dV = - \int_{V(t)} \vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho} \right) dV + \int_{V(t)} \vec{f} dV, \quad (2)$$

где  $\vec{\nabla} \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ ;  $p$  — изотропное давление;  $\vec{f}$  — плотность внешних объемных сил;  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  — вектор скорости;  $Q = Q(\vec{r}, t)$  — функция источников и стоков жидкости [ $\text{м}^3/\text{с}$ ].

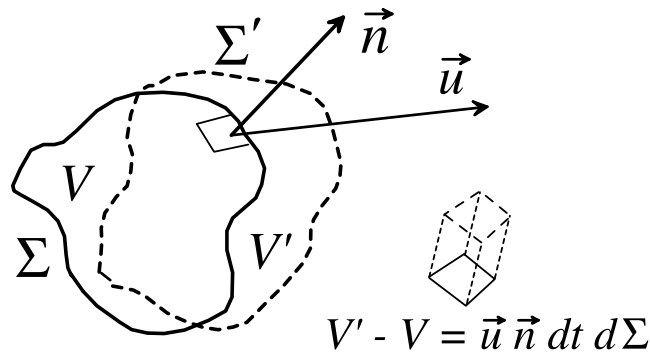


Рис. 1. Превращение объема  $V(t)$ , ограниченного поверхностью  $\Sigma(t)$ , в объем  $V(t + dt) = V'$  с поверхностью  $\Sigma(t + dt) = \Sigma'$

Запишем уравнения мелкой воды в интегральной форме, предварительно представив уравнение (1) в виде [11]:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} dS \int_0^H dz = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} H dS = Q, \tag{3}$$

где  $H = H(x, y, t)$  — расстояние от дна  $z = b(x, y)$  до возмущенной поверхности жидкости  $\eta(x, y, t) = b(x, y) + H(x, y, t)$  (см. рис. 2);  $S(t)$  — площадь поперечного сечения «жидкой частицы» в плоскости  $(x, y)$ . Аналогично для уравнения (2) при условии гидростатического равновесия в вертикальном направлении  $p = \rho g(\eta - z) + p_a$  и  $\langle u_z \rangle_z \equiv \frac{1}{H} \int_0^H u_z dz = 0$  ( $p_a$  — атмосферное давление,  $g = -f_z$  — ускорение свободного падения) имеем:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} H \vec{U} dS = -g \int_{S(t)} H \vec{\nabla}_\perp \eta dS + \int_{S(t)} H \vec{F} dS, \tag{4}$$

где  $\vec{\nabla}_\perp \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\vec{U} = (U_x, U_y) = \langle \vec{u}_\perp \rangle_z$  и  $\vec{F} = (F_x, F_y) = \langle \vec{f}_\perp \rangle_z$  — средние по  $z$ -координате значения скорости и плотности объемных сил в плоскости  $(x, y)$  соответственно.

Перейдем к уравнениям мелкой воды в дифференциальной форме. Применяя к уравнениям (3)–(4) правило дифференцирования по времени интегралов от произвольной тензорной функции  $\varphi = \varphi(t, x, y)$

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \varphi dS = \int_{S(t)} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}_\perp (\varphi \vec{U}) \right] dS,$$

получим уравнения движения мелкой воды в дифференциальной форме (уравнения Сен-Венана):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{\nabla}_\perp (H \vec{U}) = q, \tag{5}$$

$$\frac{\partial (H \vec{U})}{\partial t} + \vec{\nabla}_\perp (H \vec{U} \otimes \vec{U}) = -g H \vec{\nabla}_\perp \eta + H \vec{f}, \tag{6}$$

где  $q = Q/h^2$  — мощность поверхностных источников [м/с];  $h$  — характерный мелкий горизонтальный масштаб (в численных моделях будем использовать размер ячейки).

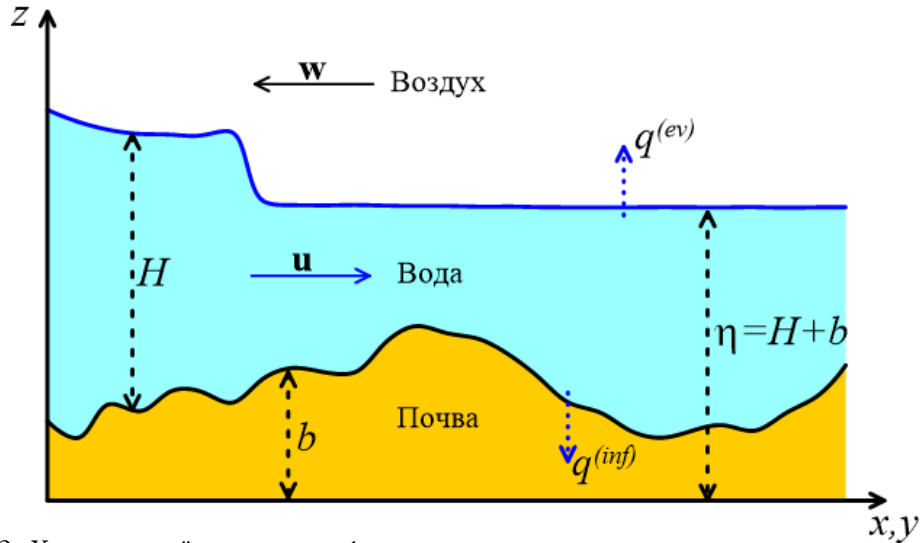


Рис. 2. Характерный пример профиля поверхности суши по данным дистанционного зондирования Земли SRTM 3. (a) — Показан срез рельефа земной поверхности в области русла Волги (фрагмент). Особенностью является сильно немонотонный изрезанный (нерегулярный) вид рельефа в случае размера ячейки 50 м. Точки — значения высоты рельефа  $b$  в узлах ячеек. Величины  $x$  и  $z$  приведены в метрах

Суммарная плотность сил, действующих на жидкость, в рамках теории мелкой воды представима в виде суперпозиции сил Кориолиса, придонного трения, вязкости и ветра:

$$\vec{F} = \vec{F}_{Cor} + \vec{F}_{frict} + \vec{F}_{visc} + \vec{F}_{wind}. \quad (7)$$

Запишем основные уравнения движения мелкой воды, проецируя их на оси декартовой системы координат:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = q, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( Hu^2 + \frac{1}{2}g_0H^2 \right) + \frac{\partial(Huv)}{\partial y} = -\frac{1}{2}\lambda H u \sqrt{u^2 + v^2} - \\ - g_0H \frac{\partial b}{\partial x} + f_x^{(Cor)}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Hv)}{\partial t} + \frac{\partial(Hvu)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( Hv^2 + \frac{1}{2}gH^2 \right) = -\frac{1}{2}\lambda H v \sqrt{u^2 + v^2} - \\ - gH \frac{\partial b}{\partial y} + f_y^{(Cor)}, \quad (10) \end{aligned}$$

где  $u, v$  — компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$ ;  $H$  — толщина слоя жидкости;  $q(x, y, t)$  — функция источников/стоков;  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ ;  $\eta = H + b$  — уровень свободной поверхности воды;  $f_x^{(Cor)} = -2\Omega_z v$  и  $f_y^{(Cor)} = 2\Omega_z u$  — компоненты силы Кориолиса;  $\Omega_z$  — вертикальная компонента угловой скорости вращения Земли на соответствующей широте, величина гидравлического трения

$$\lambda = 2gn_M^2/H^{4/3} \quad (11)$$

зависит от коэффициента трения по Маннингу  $n_M$ .

### 3. Источники и стоки воды

В уравнении (8) функция источника / стоков определяется следующим образом:

$$q = q^{(s)} - q^{(inf)} - q^{(ev)}, \quad (12)$$

где  $q^{(s)}$  — приток за счет источников;  $q^{(inf)}$  — инфильтрация;  $q^{(ev)}$  — испарение.

Потери воды с единицы поверхности  $q^{(-)} = q^{(e)} + q^{(inf)}$  определяются скоростями испарения  $q^{(e)}$  и инфильтрации  $q^{(inf)}$ . Величина  $q^{(e)}$  в общем случае сложно зависит от температурного и ветрового режимов, влажности воздуха, конвективного состояния атмосферы.

Для баланса интенсивностей источников и стоков воды можно записать:

$$q(x, y, t) = \frac{dQ}{dS} + q_0 = \frac{dQ}{dS} + q^{(r)}(t) - q^{(inf)}(x, y, h, I_g, H_g, T_g, T_w) - q^{(e)}(h, \alpha, \beta, T_w, T_a), \quad (13)$$

где учитываются факторы, определяющие баланс источников и стоков воды [7].

#### 3.1. Источники

$q^{(s)} = q^{(s)}(x, y, t)$  — скорость притока воды [м/с].

$Q^{(s)}(t) = \int \int_s q^{(s)}(x, y, t) dx dy$  — суммарный расход источника (м<sup>3</sup>/с), где  $S_k$  — площадь источника.

В случае регулируемого стока через плотины задается величина суммарного расхода (гидрограф), а скорость притока воды определяется по формуле

$$q^{(s)}(t) = Q^{(s)}(t)/S_k. \quad (14)$$

Когда источником воды являются осадки, то скорость притока воды определяется интенсивностью осадков на заданной территории.

#### 3.2. Однослойные степенные модели инфильтрации, зависящие только от глубины воды Н

Рассмотрим нелинейную модель инфильтрации воды в почву (рис. 3), которая более адекватно моделирует процесс впитывания воды по сравнению с  $\sigma^{(inf)} = const$ . В большинстве математических моделей, используемых при моделировании динамики поверхностных вод, применяются модели линейной или экспоненциальной фильтрации. Однако экспериментальные данные свидетельствуют о более сложном механизме впитывания (см. рис. 4). Наиболее адекватной моделью фильтрации является нелинейная модель с насыщением. В предлагаемой модели величина  $\sigma^{(inf)}$ , входящая в уравнение (13), определяется следующим образом:

$$q^{(inf)} = \sigma_*^{(inf)}(1 - \alpha) \frac{H}{H_*}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\sigma^{(inf)}}{\psi H_t} - \frac{\alpha}{\tau_t},$$

здесь  $\sigma_*^{(inf)}$  — скорость впитывания воды толщиной слоя  $H$  в сухую почву;  $\alpha = V_w/V_l$  — коэффициент влагонасыщенности почвы;  $V_w$  — объем воды, содержащейся в почвенном покрове с объемом  $V_l$ ;  $\psi$  — пористость почвы;  $\tau_l$  — характерное время осушения почвы за счет испарения и инфильтрации воды в подпочвенный слой с малой пористостью (глина)[5].

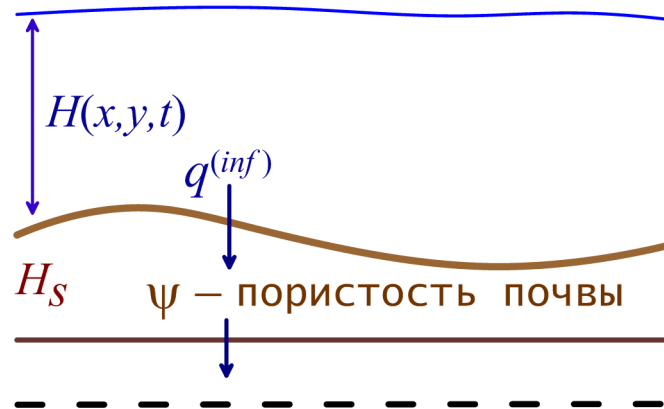


Рис. 3. Схема нелинейной модели инфильтрации

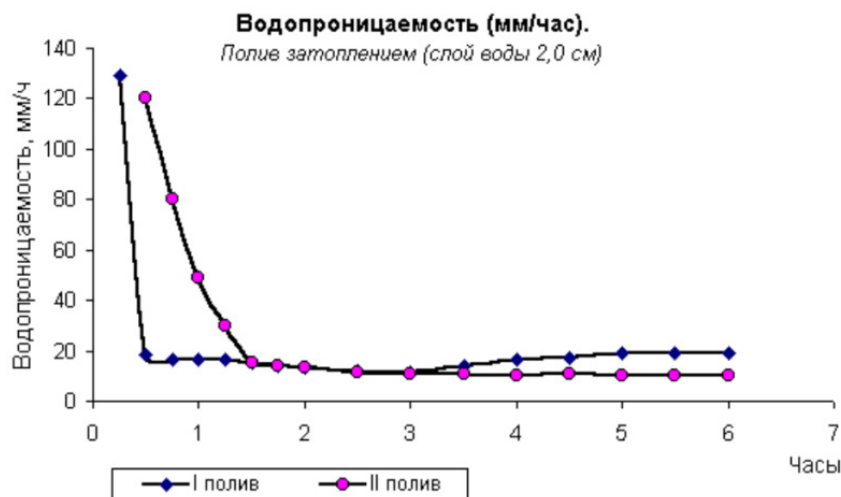


Рис. 4. Характерные профили скорости впитывания в грунт по экспериментальным данным

#### 4. Основные силы

##### 4.1. Сила гидравлического трения между жидкостью и дном

В математической модели учитывается гидравлическое сопротивление:

- прямого равномерного русла;
- нерегулярной структуры дна;
- извилистости русла;
- различных препятствий;
- растительности;

- турбулентности;
- иных физических факторов.

Обсудим влияние коэффициента шероховатости дна по Маннингу  $n_M$  в модели (9)–(10), учитывающей эффективное трение между водой и дном, на динамику воды в реках. Часто используемая формула Маннинга для средней скорости потока вдоль русла реки [12]

$$U = \frac{R_g^{2/3} I^{1/2}}{n_M} \quad (16)$$

зависит от средних вдоль русла реки значений уклона дна  $I$  и гидравлического радиуса  $R_g = B/P$  ( $B$  и  $P$  — средние вдоль русла реки значения площади поперечного сечения и периметра смачивания соответственно). Для широкой реки имеем  $R_g = H_{\text{ср}}$  ( $H_{\text{ср}}$  — среднее значение глубины вдоль русла реки). В случае Волги ниже Волжской плотины для оценок примем  $R_g \simeq 5$  м,  $I \simeq 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $U \simeq 1$  м/с. При экспериментальном определении гидравлического сопротивления русла рассчитываются коэффициенты Шези:

$$C = U / \sqrt{IH_{\text{ср}}}, \quad (17)$$

$I$  — средний вдоль русла реки уклон водной поверхности. Использование (16) дает для коэффициента шероховатости Волги  $n_M \sim 0.02$ .

Перечислим физические факторы, влияющие на гидравлическое сопротивление потоку воды в речном русле, которое принято характеризовать параметром  $n_M$ :

$$n_M = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6, \quad (18)$$

где учитывается гидравлическое сопротивление прямого равномерного русла  $n_0$ , нерегулярной структуры дна  $n_1$ , извилистости русла  $n_2$ , различных препятствий  $n_3$ , растительности  $n_4$ , турбулентности  $n_5$  и иных физических факторов  $n_6$ .

Каждый из перечисленных факторов может давать свой вклад в увеличение параметра  $n_M$  для выбранной модели гидравлического сопротивления, причем действие указанных механизмов является взаимосвязанным. Коэффициент шероховатости при использовании формулы Маннинга (16) или ее аналогов имеет проблемы с физическим смыслом, поэтому к величине  $n_M$  при рассмотрении речных русел следует относиться как к эмпирическому параметру, эффективно учитывающему большую совокупность факторов.

Укажем на опубликованные оценки параметра шероховатости для некоторых русел. Величина  $n_M$  для различных больших рек лежит в широких пределах, как правило, различаясь на разных участках реки. Например, для р. Ангара  $n_M = 0.021–0.031$  (дер. Тартарка), р. Лена  $n_M = 0.023–0.054$  (пос. Змеиново), р. Витим  $n_M = 0.016–0.060$  (г. Бодайбо), р. Енисей  $n_M = 0.017–0.039$  (Подкаменная Тунгуска), р. Подкаменная Тунгуска  $n_M = 0.022–0.035$  (пос. Черный остров). Результаты моделирования гидрологического режима Чебоксарского водохранилища дали для коэффициента шероховатости значения 0.022–0.026. Калибровка по данным 17-ти гидропостов в дельте Волги и 3-м постам на Нижней Волге в 1977–1978 гг. дала для коэффициента Шези  $C = 40–66 \text{ м}^{1/2}/\text{с}$ , что для  $H_{\text{ср}} = 5$  м по формуле Маннинга  $n_M = H_{\text{ср}}^{1/6}/C$  дает  $n_M \simeq 0.02–0.033$ . В

качестве примера из зарубежных речных систем стоит отметить оценки коэффициента шероховатости рек Янцзы, Хуанхэ, Миссисипи, Рейна, который находился в пределах  $n_M = 0.01-0.2$  [6].

#### 4.2. Сила внутреннего вязкого трения

$$f^{\vec{v}isc} = \frac{1}{H} \nabla \hat{T}, \quad (19)$$

$\hat{T}$  — тензор вязких напряжений в модели мелкой воды.

$$T_{xx} = 2\nu_t H \frac{\partial u_x}{\partial x}, T_{yy} = 2\nu_t H \frac{\partial u_y}{\partial y}, T_{xy} = \nu_t H \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right). \quad (20)$$

Коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_t$  рассчитывается по формуле:

$$\nu_t = Ch^2 \sqrt{\left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2}, \quad (21)$$

$C \approx 0.04$  — эмпирическая постоянная;  $h^2$  — площадь расчетной ячейки.

#### 4.3. Влияние ветра

Аэродинамическое сопротивление водной поверхности можно описать следующим образом:

$$\vec{f}^{wind} = \frac{C_\alpha \rho_\alpha}{H \rho_w} (\vec{w} - \vec{u}) \cdot |\vec{w} - \vec{u}|. \quad (22)$$

Состояние водной поверхности  $C_\alpha$ :

$$C_\alpha = (0.5 + 0.1|\vec{w}|) \cdot 10^{-3}. \quad (23)$$

#### Заключение

Уравнения Сен-Венана позволяют учитывать большое количество различных факторов, среди которых можно выделить неоднородный рельеф дна, метеорологические условия и трение между потоком и дном. Были построены модели, описывающие: 1) характер инфильтрации/испарения воды; 2) изменения коэффициента шероховатости в зависимости от уровня воды в водотоке.

#### ПРИМЕЧАНИЕ

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 13-07-97056-р\_поволжье\_а, 13-01-97062-р\_поволжье\_а, 13-05-97065-р\_поволжье\_а, РГНФ № 13-01-12015 и Гостемы № 8.2419.2011.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышников, Н. В. Коэффициенты шероховатости речных русел / Н. В. Барышников, Е. С. Субботина, Ю. В. Демидова // Ученые записки российского государственного гидрометеорологического университета. — 2010. — № 12. — С. 14–21.
2. Воронин, А. А. Имитационные модели динамики поверхностных вод с использованием данных дистанционного зондирования: влияние рельефа местности / А. А. Воронин, М. В. Елисеева, А. В. Писарев, А. В. Хоперсков, С. С. Храпов // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. — 2012. — № 5. — С. 18–25.
3. Крукиер, Л. А. Моделирование гидрофизических процессов в водоемах с обширными районами мелководья / Л. А. Крукиер, А. Л. Чикин, Л. Г. Чикина, И. Н. Шабас. — Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2009. — 244 с.
4. Крукиер, Л. А. Трехмерная модель гидродинамики Азовского моря и ее численная реализация / Л. А. Крукиер, А. Л. Чикин, И. Н. Шабас // Среда, биота и моделирование экологических процессов в Азовском море. — Апатиты : Изд-во КНЦ РАН, 2001. — С. 297.
5. Писарев, А. В. Особенности динамики затопления Волго-Ахтубинской поймы в зависимости от режимов испарения и инфильтрации / А. В. Писарев, С. С. Храпов, А. А. Воронин, Т. А. Дьяконова, Е. А. Циркова // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 1 (16). — С. 43–47.
6. Писарев, А. В. Численная модель динамики поверхностных вод в русле Волги: оценка коэффициента шероховатости / А. В. Писарев, С. С. Храпов, Е. О. Агафонникова, А. В. Хоперсков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — № 1. — С. 114–130.
7. Хоперсков, А. В. Задача управления гидрологическим режимом в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС — Волго-Ахтубинская пойма». Ч. 1. Моделирование динамики поверхностных вод в период весеннего паводка / А. В. Хоперсков, С. С. Храпов, А. В. Писарев, А. А. Воронин, М. В. Елисеева, И. А. Кобелев // Проблемы управления. — 2012. — № 5. — С. 18–25.
8. Храпов, С. С. Компьютерное моделирование экологических систем / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, М. А. Еремин. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2010. — 123 с.
9. Храпов, С. С. Моделирование динамики поверхностных вод / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, М. А. Еремин. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2010. — 132 с.
10. Храпов, С. С. Суперкомпьютерные технологии для моделирования гидродинамических течений / С. С. Храпов, М. А. Бутенко, А. В. Писарев, А. В. Хоперсков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2012. — 208 с.
11. Храпов, С. С. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH-TVD-подхода / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, Н. М. Кузьмин, А. В. Писарев, И. А. Кобелев // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — № 12. — С. 282–297.
12. Khrapov S. The Numerical Simulation of Shallow Water: Estimation of the Roughness Coefficient on the Flood Stage / S. Khrapov, A. Pisarev, I. Kobelev, A. Zhumaliev, E. Agafonnikova, A. Losev, A. Khoperskov // Advances in Mechanical Engineering. — 2013. — Vol. 2013. — Article ID 787016, 11 pages.

## REFERENCES

1. Baryshnikov N.V., Subbotina E.S., Demidova Yu.V. Koeffitsienty sherokhovatosti rechnykh rusel [Roughness coefficients riverbeds]. *Uchenye zapiski rossiyskogo gosudarstvennogo gidrometeorologicheskogo universiteta* [Proceedings of the Russian State Hydrometeorological University], 2010, no. 12, pp. 14–21.
2. Voronin A.A., Eliseeva M.V., Pisarev A.V., Khoperskov A.V., Khrapov S.S. Imitatsionnye modeli dinamiki poverkhnostnykh vod s ispol'zovaniem dannykh distantsionnogo zondirovaniya: vliyanie rel'efa mestnosti [Simulation models of surface water dynamics using

remote sensing data]. *Prikaspiyskiy zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii* [Caspian Journal of Management and high technology], 2012, no. 5, pp. 18–25.

3. Krukier L.A., Chikin A.L., Chikina L.G., Shabas I.N. *Modelirovanie gidrofizicheskikh protsessov v vodoemakh s obshirnymi rayonami melkovod'ya* [Modeling of hydro-processes in reservoirs with large areas of shallow water]. Rostov n/D, Izd-vo YuFU Publ., 2009. 244 p.

4. Krukier L.A., Chikin A.L., Shabas I.N. Trekhmernaya model' gidrodinamiki Azovskogo morya i ee chislennaya realizatsiya [Three-dimensional hydrodynamic model of the Azov Sea and its numerical implementation]. *Sreda, biota i modelirovanie ekologicheskikh protsessov v Azovskom more* [Environment, biota and modeling of environmental processes in the Sea of Azov]. Apatity, Izd-vo KNTs RAN Publ., 2001, pp. 297.

5. Pisarev A.V., Khrapov S.S., Voronin A.A., D'yakonova T.A., Tsirkova E.A. Osobennosti dinamiki zatopleniya Volgo-Akhtubinskoj poymy v zavisimosti ot rezhimov ispareniya i infil'tratsii [The role of infiltration and evaporation in the flooding dynamics of the Volga-Akhtuba floodplain]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2012, no. 1 (16), pp. 43–47.

6. Pisarev A.V., Khrapov S.S., Agafonnikova E.O., Khoperskov A.V. Chislennaya model' dinamiki poverkhnostnykh vod v rusle Volgi: otsenka koeffitsienta sherokhovatosti [Numerical model of shallow water dynamics in the channel of the Volga: estimation of roughness]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki* [Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics], 2013, no. 1, pp. 114–130.

7. Khoperskov A.V., Khrapov S.S., Pisarev A.V., Voronin A.A., Eliseeva M.V., Kobelev I.A. Zadacha upravleniya gidrologicheskim rezhimom v ekologo-ekonomicheskoy sisteme «Volzhskaya GES — Volgo-Akhtubinskaya poyma». Ch. 1. Modelirovanie dinamiki poverkhnostnykh vod v period vesennego pavodka [The Regimen Control Task in the Eco-Economic System «Volzhskaya Hydroelectric Power Station — the Volga-Akhtuba Floodplain». I. Simulation of Dynamics of Surface Water During Spring Floods]. *Problemy upravleniya* [Control Sciences], 2012, no. 5, pp. 18–25.

8. Khrapov S.S., Khoperskov A.V., Eremin M.A. *Komp'yuternoe modelirovanie ekologicheskikh sistem* [Computer modeling of ecological systems]. Volgograd, Izd-vo VolGU Publ., 2010. 123 p.

9. Khrapov S.S., Khoperskov A.V., Eremin M.A. *Modelirovanie dinamiki poverkhnostnykh vod* [Modeling the dynamics of surface water]. Volgograd, Izd-vo VolGU Publ., 2010. 132 p.

10. Khrapov S.S., Butenko M.A., Pisarev A.V., Khoperskov A.V. *Superkomp'yuternye tekhnologii dlya modelirovaniya gidrodinamicheskikh techeniy* [Supercomputer technology for simulating hydrodynamic flows]. Volgograd, Izd-vo VolGU Publ., 2012. 208 p.

11. Khrapov S.S., Khoperskov A.V., Kuz'min N.M., Pisarev A.V., Kobelev I.A. Chislennaya skhema dlya modelirovaniya dinamiki poverkhnostnykh vod na osnove kombinirovannogo SPH-TVD-podkhoda [A numerical scheme for simulating the dynamics of surface water on the basis of the combined SPH-TVD approach]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Numerical Methods And Programming], 2011, no. 12, pp. 282–297.

12. Khrapov S., Pisarev A., Kobelev I., Zhumaliev A., Agafonnikova E., Losev A., Khoperskov A. The Numerical Simulation of Shallow Water: Estimation of the Roughness Coefficient on the Flood Stage. *Advances in Mechanical Engineering*, 2013, vol. 2013. Article ID 787016, 11 pages.

**MATHEMATICAL MODEL OF SURFACE WATER DYNAMICS****Dyakonova Tatyana Andreevna**

Postgraduate student, Department of Information Systems and Computer Simulation  
Volgograd State University  
tatjana-dyakonova@rambler.ru, infomod@volsu.ru  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Pisarev Andrey Vladimirovich**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Lecturer, Department of Information Systems and Computer Simulation  
Volgograd State University  
pisarev@volsu.ru, infomod@volsu.ru  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Khoperskov Alexander Valentinovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Professor, Department of Information Systems and Computer Simulation  
Volgograd State University  
ahoperskov@gmail.com, infomod@volsu.ru  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Khrapov Sergei Sergeevich**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor, Department of Information Systems and Computer Simulation  
Volgograd State University  
xss-ip@mail.ru, infomod@volsu.ru  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Abstract.** A mathematical model of the dynamics of surface water was developed. It takes into account the main factors influencing to the flooding areas: surface and underground water sources (dams, rainfall, keys, geysers, the output of groundwater to the surface of the land). Another important factor is the construction quality of digital elevation model. We also take into consideration human activities areas and bottom contours of basins. The Volga river bed roughness coefficient for the modified Manning model was estimated. At last infiltration (water soaking into the ground); internal viscous friction, action of wind, the rotation of the Earth — the Coriolis force; evaporation were taken into account in the mathematical model.

**Key words:** Shallow water equations, evaporation of water, floods, roughness, viscous friction coefficient.