МАТЕМАТИКА

УДК 514.75
ББК 22.151

НЕПРЕРЫВНЫЕ HG-ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С КРАЕМ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Бодренко Андрей Иванович

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления
Волгоградского государственного университета
bodrenko@mail.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В статье исследуются свойства непрерывных деформаций двумерных поверхностей с краем в трехмерном евклидовом пространстве, поточечно сохраняющих грассманов образ и среднюю кривизну поверхностей.

Для двумерной односвязной ориентируемой поверхности F с краем ∂F в трехмерном евклидовом пространстве E^3 мы вводим понятие непрерывной HG-деформации и находим дифференциальные уравнения, определяющие весь класс HG-деформаций поверхности F в E^3. С использованием метода последовательных приближений и принципа сжимающих отображений мы доказываем основной результат данной статьи — теорему 1.

Ключевые слова: деформация поверхности, средняя кривизна, гауссова кривизна, G-деформация, непрерывная деформация.

§ 1. Основные определения. Формулировка результата

Пусть E^3 — трехмерное евклидово пространство, заданное в координатах (y^1, y^2, y^3).

Пусть F — двумерная односвязная ориентируемая поверхность в E^3 с краем ∂F. Обозначим через D область в E^2, через ∂D — границу области D.

Пусть поверхность F в E^3 задана погружением $f : D \to E^3$:

$$y^\sigma = f^\sigma(x^1, x^2), \quad (x^1, x^2) \in D, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Здесь и далее считаем, что индексы суммирования $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ пробегают значения от 1 до 3, индексы $i, j, \ldots$ пробегают значения от 1 до 2, и действует правило суммирования Эйнштейна.

На поверхности F порождается риманова метрика, задаваемая формулой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, где

$$g_{ij} = \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j},$$

$\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

В дальнейшем считаем, что формула верна для всех допустимых значений индексов, если не указано, для каких значений индексов данная формула имеет место.

Пусть b_{ij} — компоненты тензора второй фундаментальной формы поверхности F, $g = det||g_{ij}||$, $b = det||b_{ij}||$. Обозначим через

$$d\sigma(x) = \sqrt{g}\ dx^1 \wedge dx^2$$

элемент площади поверхности F.

Пусть (x^1, x^2) — декартовы прямоугольные координаты в E^2. Без ограничения общности будем считать, что $\overline{D} = D \cup \partial D$ — круг единичного радиуса в E^2 с центром в начале координат. Отождествим точки погружения поверхности F с соответствующими координатными наборами в E^3.

Пусть $F \in C^{m,\nu}$, $\partial F \in C^{m+1,\nu}$, $\nu \in (0;1)$, $m \geq 4$.

Рассмотрим деформацию $\{F_t\}$ поверхности F, определенную уравнениями:

$$y_t^\sigma = y^\sigma + z^\sigma(t), \quad z^\sigma(0) \equiv 0, \quad t \in [0;t_0], \quad t_0 > 0.$$

Пусть поверхность F не имеет действительных асимптотических направлений. Обозначим через k_1 и k_2 главные кривизны поверхности F. Будем считать, что $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ на F. Обозначим через $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ среднюю кривизну поверхности F в E^3.

Введем обозначение $\Delta(f) \equiv f(t) - f(0)$.

Определение 1. *Деформация $\{F_t\}$ называется непрерывной деформацией, сохраняющей среднюю кривизну H (или, коротко, H-деформацией), если выполняются следующие условия: $\Delta(H) = 0$, и $z^\sigma(t)$ непрерывны по t.*

Деформация $\{F_t\}$ порождает следующий набор кривых в E^3:

$$u^{\alpha_0}(\tau) = (y^{\alpha_0} + z^{\alpha_0}(\tau)),$$

где $z^{\alpha_0}(0) \equiv 0$, $\tau \in [0;t]$, $t \in [0;t_0]$, $t_0 > 0$.

Определение 2. *Деформация $\{F_t\}$ называется G-деформацией, если каждый нормальный вектор поверхности F переносится параллельно вдоль траектории деформации $\{F_t\}$ для каждой точки поверхности.*

Пусть вдоль ∂F задано векторное поле, касательное к F:

$$v^\alpha = l^i y^\alpha_{,i}, \tag{1}$$

где символом $_{,i}$ обозначена ковариантная производная в метрике поверхности F.

Рассмотрим краевое условие:

$$\delta_{\alpha\beta} z^\alpha v^\beta = \tilde{\gamma}(s,t), \quad s \in \partial D, \tag{2}$$

где функции v^α и $\tilde{\gamma}$ принадлежат классу $C^{m-2,\nu}$.

Положим:

$$\tilde{\lambda}_k = \delta_{\alpha\beta} y^\alpha_{,k} v^\beta, \qquad k = 1, 2, \tag{3}$$

$$\lambda_k = \frac{\tilde{\lambda}_k}{(\tilde{\lambda}_1)^2 + (\tilde{\lambda}_2)^2}, \quad k = 1, 2, \tag{4}$$

$$\lambda(s) = \lambda_1(s) + i\lambda_2(s), \quad s \in \partial D. \tag{5}$$

Пусть N — индекс данного краевого условия:

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg \lambda(s). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $F \in C^{m,\nu}, \nu \in (0;1), m \geq 4, \partial F \in C^{m+1,\nu}$. Пусть $v^\beta, \tilde{\gamma} \in C^{m-2,\nu}(\partial D)$ и при этом функция $\tilde{\gamma}$ непрерывно дифференцируема по t. Пусть в точке $(x^1_{(0)}, x^2_{(0)})$ области D выполняется условие: $z^\sigma(t) \equiv 0\, \forall t$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если $N > 0$, то существуют $t_0 > 0$ и $\varepsilon(t_0) > 0$ такие, что для любой допустимой функции $\tilde{\gamma}$, удовлетворяющей условию $\|\dot{\tilde{\gamma}}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(t_0)$, для всех $t \in [0, t_0)$ существует HG-деформация класса $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$, непрерывная по t, непрерывно зависящая от $(2N-1)$ произвольных действительных непрерывных функций $c_i(t)$, $i = 1, \ldots, (2N-1)$, удовлетворяющих условиям $c_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, (2N-1)$.

2. Если $N \leq 0$, то существуют $t_0 > 0$ и $\varepsilon(t_0) > 0$ такие, что для любой допустимой функции $\tilde{\gamma}$, удовлетворяющей условию $\|\dot{\tilde{\gamma}}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(t_0)$, для всех $t \in$ $\in [0, t_0)$ существует не более одной HG-деформации класса $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$, непрерывной по t.

§ 2. Вывод уравнений HG-деформаций поверхностей в евклидовом пространстве

Будем решать поставленную задачу методами теории деформаций поверхностей [1–7].

Введем следующие обозначения:

$b_{ij}(t) \equiv b_{ij}(y^\sigma + z^\sigma(t)) \quad b_{ij}(0) \equiv b_{ij}, \quad b(t) \equiv b(y^\sigma + z^\sigma(t)), \quad b(0) \equiv b,$
$g_{ij}(t) \equiv g_{ij}(y^\sigma + z^\sigma(t)), \quad g_{ij}(0) \equiv g_{ij}, \quad g(t) \equiv g(y^\sigma + z^\sigma(t)) \quad g(0) \equiv g,$
$a^j(t) \equiv a^j, \quad c(t) \equiv c, \quad z^\sigma(t) \equiv z^\sigma.$

Положим:

$$z^\sigma(t) = a^j(t) y^\sigma{}_{,\,j} + c(t) n^\sigma, \tag{7}$$

где $a^j(0) \equiv 0, c(0) \equiv 0$.

Таким образом, деформация $\{F_t\}$ поверхности F, заданная формулой (1), определяется функциями a^j и c.

Условие G-деформации $\{F_t\}$ поверхности F имеет вид (см.: [2, с. 8]):

$$\delta_{\alpha\beta}(y^\alpha_{,i} + z^\alpha_{,i}(t)) n^\beta = 0. \tag{8}$$

Введем на F сопряженно изотермическую систему координат (x^1, x^2). Обозначим $b_{ii} =$ $= V$, $i = 1, 2$, при этом $b_{12} = b_{21} = 0$. Тогда систему уравнений (8) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_{,\,1} + V a^1 = 0, \\ c_{,\,2} + V a^2 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Продифференцируем первое уравнение системы (9) по x^2, второе — по x^1 и вычтем из первого уравнения второе. Тогда мы получим:

$$V\partial_2 a^1 - V\partial_1 a^2 + \partial_2 V a^1 - \partial_1 V a^2 = 0. \tag{10}$$

Получаем следующее уравнение, описывающее G-деформации поверхности в сопряженно изотермической системе координат (x^1, x^2):

$$\partial_2\dot{a}^1 - \partial_1\dot{a}^2 + p_k\dot{a}^k = 0,$$

где $p_1 = \partial_2(\ln V), p_2 = -\partial_1(\ln V)$. Заметим, что p_k не зависят от t.

Вычислим $\Delta(H)$. Заметим, что средняя кривизна H поверхности F в E^3 вычисляется по формуле:

$$2H = g^{ij}b_{ij} = g^{11}b_{11} + 2g^{12}b_{12} + g^{22}b_{22}.$$

Получаем:

$$2\Delta(H) = 2(H(t) - H) = g^{ij}(t)b_{ij}(t) - g^{ij}b_{ij}. \tag{14}$$

Имеют место следующие формулы:

$$g^{11}(t) = \frac{g_{22}(t)}{g(t)}, \quad g^{22}(t) = \frac{g_{11}(t)}{g(t)}, \quad g^{12}(t) = g^{21}(t) = -\frac{g_{12}(t)}{g(t)}. \tag{15}$$

Подставив (15) в (14), получим:

$$\Delta(H) = \frac{g_{22}(t)b_{11}(t) + g_{11}(t)b_{22}(t) - 2g_{12}(t)b_{12}(t) - 2g(t)H}{2g(t)}. \tag{16}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$g_{ij}(t) = g_{ij} + \Delta(g_{ij}), \quad b_{ij}(t) = b_{ij} + \Delta(b_{ij}), \quad g(t) = g + \Delta(g). \tag{17}$$

Учитывая (17), из (16) находим:

$$\begin{gathered} 2g(t)\Delta(H) = g_{22}b_{11}(t) + g_{11}b_{22}(t) - 2g_{12}b_{12}(t) + \Delta(g_{22})b_{11}(t) + \\ + \Delta(g_{11})b_{22}(t) - 2\Delta(g_{12})b_{12}(t) - 2gH - 2\Delta(g)H = \\ = g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}\Delta(b_{11}) + g_{11}\Delta(b_{22}) - 2g_{12}\Delta(b_{12}) + \\ + \Delta(g_{22})b_{11} + \Delta(g_{11})b_{22} - 2\Delta(g_{12})b_{12} + \Delta(g_{22})\Delta(b_{11}) + \\ + \Delta(g_{11})\Delta(b_{22}) - 2\Delta(g_{12})\Delta(b_{12}) - 2gH - 2\Delta(g)H. \end{gathered} \tag{18}$$

Упрощая уравнение (18), получаем уравнение:

$$\begin{gathered} 2g(t)\Delta(H) = g_{22}\Delta(b_{11}) + g_{11}\Delta(b_{22}) - 2g_{12}\Delta(b_{12}) + \\ + \Delta(g_{22})b_{11} + \Delta(g_{11})b_{22} - 2\Delta(g_{12})b_{12} + \Delta(g_{22})\Delta(b_{11}) + \\ + \Delta(g_{11})\Delta(b_{22}) - 2\Delta(g_{12})\Delta(b_{12}) - 2\Delta(g)H. \end{gathered} \tag{19}$$

Отсюда,

$$\begin{gathered} 2g(t)\Delta(H) = g_{22}\Delta(b_{11}) + g_{11}\Delta(b_{22}) - 2g_{12}\Delta(b_{12}) + \\ + V\Delta(g_{22}) + V\Delta(g_{11}) - 2\Delta(g_{12})b_{12} + \Delta(g_{22})\Delta(b_{11}) + \\ + \Delta(g_{11})\Delta(b_{22}) - 2\Delta(g_{12})\Delta(b_{12}) - 2\Delta(g)H. \end{gathered} \tag{20}$$

Обратимся к формуле, определяющей $\Delta(b_{ij})$ (см.: [2, с. 13, формула (39)])

$$\Delta(b_{ij}) = \partial_i(a^k)b_{jk} + M^2_{ij}, \tag{21}$$

где M_{ij}^2 имеют явный вид (см.: [2, с. 12, формулы (30), (32)]).

Имеет место следующее соотношение (см.: [2, с. 10, формула (18)]):

$$\Delta(g_{ii}) = \partial_i(a^i)g_{ii} + M_{ii}^5, \tag{22}$$

где M_{ij}^5 имеют явный вид (см.: [2, с. 10, формула (18)]).

Следовательно, из (20) имеем:

$$\begin{gathered} 2g(t)\Delta(H) = Vg_{22}\partial_1(a^1) + Vg_{11}\partial_2(a^2) + Vg_{22}\partial_2(a^2) + Vg_{11}\partial_1(a^1) + \\ + g_{22}M_{11}^4 + g_{11}M_{22}^4 + VM_{22}^5 + VM_{11}^5 - 2g_{12}\Delta(b_{12}) + \\ + \Delta(g_{22})\Delta(b_{11}) + \Delta(g_{11})\Delta(b_{22}) - 2\Delta(g_{12})\Delta(b_{12}) - 2\Delta(g)H. \end{gathered} \tag{23}$$

Обозначим

$$\begin{gathered} \Psi_4 = g_{22}M_{11}^4 + g_{11}M_{22}^4 + VM_{22}^5 + VM_{11}^5 - 2g_{12}\Delta(b_{12}) + \\ + \Delta(g_{22})\Delta(b_{11}) + \Delta(g_{11})\Delta(b_{22}) - 2\Delta(g_{12})\Delta(b_{12}). \end{gathered} \tag{24}$$

Учитывая обозначение (24), из (23) получим:

$$2g(t)\Delta(H) = Vg_{22}\partial_1(a^1) + Vg_{11}\partial_2(a^2) + Vg_{22}\partial_2(a^2) + Vg_{11}\partial_1(a^1) + \Psi_4 - 2\Delta(g)H. \tag{25}$$

Отсюда,

$$\Delta(H) = \frac{V(g_{11} + g_{22})(\partial_1(a^1) + \partial_2(a^2)) + \Psi_4 - 2\Delta(g)H}{2g(t)}. \tag{26}$$

В силу формулы (25), из (26) имеем:

$$\Delta(H) = \frac{V(g_{11} + g_{22})(\partial_1 a^1 + \partial_2 a^2) + \Psi_4 - 4gH(\partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 + q_k a^k - \Psi_2}{2g(t)}, \tag{27}$$

где Ψ_2 имеет явный вид (см.: [2, с. 11, формула (25)]).

Используя формулу

$$2Hg = V(g_{11} + g_{22}),$$

из (27) получим следующее уравнение:

$$\Delta(H) = \frac{-2gH(\partial_1 a^1 + \partial_2 a^2) - 4Hgq_k a^k + 4Hg\Psi_2 + \Psi_4}{2g(t)}. \tag{28}$$

Следовательно,

$$\Delta(H) = \frac{Hg}{g(t)}\left(-\partial_1 a^1 - \partial_2 a^2 - 2q_k a^k + 2\Psi_2 + \frac{\Psi_4}{2Hg}\right). \tag{29}$$

Дифференцируя $\Delta(H)$ по t, из (29) имеем:

$$\begin{gathered} \dot{\Delta}(H) = \frac{Hg}{g(t)}\left(-\partial_1 \dot{a}^1 - \partial_2 \dot{a}^2 - 2q_k \dot{a}^k + 2\dot{\Psi}_2 + \frac{\dot{\Psi}_4}{2Hg}\right) - \\ - \frac{Hg\dot{g}(t)}{(g(t))^2}\left(-\partial_1 a^1 - \partial_2 a^2 - 2q_k a^k + 2\Psi_2 + \frac{\Psi_4}{2Hg}\right). \end{gathered} \tag{30}$$

Учитывая, что $\Delta(H)=0$ и используя (29), из (30) получаем следующее представление

$$\dot{\Delta}(H)=H\left(-\partial_1\dot{a}^1-\partial_2\dot{a}^2-q_k^{(h)}\dot{a}^k+\dot{\Psi}_2^{(h)}\right), \tag{31}$$

где $\dot{\Psi}_2^{(h)}=q_0^{(h)}\dot{c}-P_0^{(h)}(\dot{a}^1,\dot{a}^2,\partial_i\dot{a}^j)$. При этом $q_0^{(h)}$, $q_k^{(h)}$ и $P_0^{(h)}$ имеют явный вид. Заметим, что $q_k^{(h)}\in C^{m-3,\nu}$, $q_0^{(h)}\in C^{m-3,\nu}$ и не зависят от t.

Из (31) получим следующее уравнение для H-деформации с условием G-деформации:

$$\partial_1\dot{a}^1+\partial_2\dot{a}^2+q_k^{(h)}\dot{a}^k=\dot{\Psi}_2^{(h)}. \tag{32}$$

Таким образом, весь класс HG-деформаций поверхности F в евклидовом пространстве E^3 описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\partial_2\dot{a}^1-\partial_1\dot{a}^2+p_k\dot{a}^k=0,$$

$$\partial_1\dot{a}^1+\partial_2\dot{a}^2+q_k^{(h)}\dot{a}^k=\dot{\Psi}_2^{(h)}. \tag{33}$$

Лемма 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $\exists t_0>0$ *такое, что* $a^k(t),\partial_i a^k(t),\dot{a}^k(t),\partial_i\dot{a}^k(t)$ *— непрерывны по* $t,\forall t\in[0,t_0]$, $a^k(0)\equiv 0,\partial_i a^k(0)\equiv 0$.

2) $\exists t_0>0$ *такое, что* $a^i(t)\in C^{m-2,\nu},\partial_k a^i(t)\in C^{m-3,\nu}$, $\forall t\in[0,t_0]$.

Тогда $\exists t_*>0$ *такое, что для всех* $t\in[0,t_*)$ $P_0^{(h)}\in C^{m-3,\nu}$ *и выполняется следующее неравенство:*

$$\|P_0^{(h)}(\dot{a}^1_{(1)},\dot{a}^2_{(1)})-P_0^{(h)}(\dot{a}^1_{(2)},\dot{a}^2_{(2)})\|_{m-2,\nu}\leq$$

$$\leq K_1(t)(\|\dot{a}^1_{(1)}-\dot{a}^1_{(2)}\|_{m-1,\nu}+\|\dot{a}^2_{(1)}-\dot{a}^2_{(2)}\|_{m-1,\nu}),$$

где для любого $\varepsilon>0$ *существует* $t_0>0$ *такое, что для всех* $t\in[0,t_0)$ *выполняется следующее неравенство:* $K_1(t)<\varepsilon$.

Доказательство леммы 1 следует из построения функции $P_0^{(h)}$ и лемм 1–6, доказанных в статье [2].

§ 3. Доказательство теоремы 1

Сведем исследование системы уравнений (33) с краевым условием (2) методами, описанными в работе [2] (см.: [2, § 8]), к исследованию следующей краевой задачи для обобщенных аналитических функций.

$$\partial_{\bar{z}}\dot{w}+A\dot{w}+B\bar{\dot{w}}+E(\dot{w})=\dot{\Psi},\quad Re\{\overline{\lambda}\dot{w}\}=\dot{\varphi}\quad \text{на}\quad \partial D, \tag{34}$$

где $\dot{\Psi}$, $\dot{\varphi}$, E имеют явный вид и определяются аналогично функциям, введенным в работе [2]. $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$, $|\lambda|\equiv 1$, $\lambda,\dot{\varphi}\in C^{m-2,\nu}(\partial D)$.

Исследование разрешимости краевой задачи (34) проводится методами, разработанными в статье [2] (см.: [2, § 8]). Используя выводы, полученные в работе [2] (см.: [2, § 9]), приходим к утверждениям теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодренко, А. И. Непрерывные почти ARG-деформации гиперповерхностей в евклидовом пространстве / А. И. Бодренко // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1996. — Вып. 2. — С. 13–16.
2. Бодренко, А. И. Непрерывные MG-деформации поверхностей с краем в евклидовом пространстве / А. И. Бодренко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — Вып. 1 (18). — С. 6–23.
3. Бодренко, А. И. О свойствах почти AR-деформаций гиперповерхностей с условиями обобщенного скольжения / А. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2011. — Т. 18, № 5. — С. 745.
4. Бодренко, А. И. Об индексе дефектности трубчатых гиперповерхностей в евклидовом пространстве / А. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2006. — Т. 13, № 4. — С. 616–617.
5. Бодренко, А. И. Поверхности с лапласово рекуррентной второй фундаментальной формой в E3 / А. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2004. — Т. 11, № 2. — С. 300–301.
6. Bodrenko, A. I. Continuous MG-deformations of surfaces in Euclidean space / A. I. Bodrenko // Действия торов: топология, геометрия, теория чисел. — Хабаровск : Издательство Тихоокеанского государственного университета, 2013. — С. 13–14.
7. Bodrenko, A. I. Some properties of continuous almost ARG-deformations / A. I. Bodrenko // Russian Mathematics. — 1996. — Vol. 40, № 2. — P. 11–14.

REFERENCES

1. Bodrenko A.I. Nepreryvnye pochti ARG-deformatsii giperpoverkhnostey v evklidovom prostranstve [Some properties of continuous almost ARG-deformations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [Russian Mathematics], 1996, issue 2, pp. 13–16.
2. Bodrenko A.I. Nepreryvnye MG-deformatsii poverkhnostey s kraem v evklidovom prostranstve [Continuous MG-deformations of surfaces with boundary in Euclidean space]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2013, issue 1 (18), pp. 6–23.
3. Bodrenko A.I. O svoystvakh pochti AR-deformatsiy giperpoverkhnostey s usloviyami obobschennogo skol'zheniya [On properties of almost AR-deformations of hypersurfaces with condition of generalized sliding]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2011, vol. 18, no. 5, pp. 745.
4. Bodrenko A.I. Ob indekse defektnosti trubchatykh giperpoverkhnostey v evklidovom prostranstve [On defective index of tubular hypersurfaces in Euclidean space]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2006, vol. 13, no. 4, pp. 616–617.
5. Bodrenko A.I. Poverkhnosti s laplasovo rekurrentnoy vtoroy fundamental'noy formoy v E3 [Surfaces with recurrent second fundament form in E3]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2004, vol. 11, no. 2, pp. 300–301.
6. Bodrenko A.I. Continuous MG-deformations of surfaces in Euclidean space. *Deystviya torov: topologiya, geometriya, teoriya chisel* [Torus Actions: Topology, Geometry and Number Theory]. Khabarovsk, Pacific National University Publ., 2013, pp. 13–14.
7. Bodrenko A.I. Some properties of continuous almost ARG-deformations. *Russian Mathematics*, 1996, vol. 40, no. 2, pp. 11–14.

CONTINUOUS HG-DEFORMATIONS OF SURFACES WITH BOUNDARY IN EUCLIDEAN SPACE

Bodrenko Andrey Ivanovich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Fundamental Informatics and Optimal Control
Volgograd State University
bodrenko@mail.ru, fiou@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The properties of continuous deformations of surfaces with boundary in Euclidean 3-space preserving its Grassmannian image and mean curvature are studied in this article.

We determine the continuous HG-deformation for simply connected oriented surface F with boundary ∂F in Euclidean 3-space. We derive the differential equations of G-deformations of surface F. We prove the lemma where we derive auxiliary properties of functions characterizing HG-deformations of surface F.

Then on the surface F we introduce conjugate isothermal coordinate system which simplifies the form of equations of G-deformations.

From the system of differential equations characterizing G-deformations of surface F in conjugate isothermal coordinate system we go to the nonlinear integral equation and resolve it by the method of successive approximations.

We derive the equations of HG-deformations of surface F. We get the formulas of change $\Delta(g_{ij})$ and $\Delta(b_{ij})$ of coefficients g_{ij} and b_{ij} of the first and the second fundamental forms of surface F, respectively, for deformation $\{F_t\}$. Then, using formulas of $\Delta(g_{ij})$ and $\Delta(b_{ij})$, we find the conditions characterizing HG-deformations of two-dimensional surface F in Euclidean space E^3.

We show that finding of HG-deformations of surface F brings to the following boundary-value problem (A):

$$\partial_{\bar{z}}\dot{w} + A\dot{w} + B\bar{\dot{w}} + E(\dot{w}) = \dot{\Psi}, \qquad Re\{\overline{\lambda}\dot{w}\} = \dot{\varphi} \quad \text{on} \quad \partial F,$$

where A, B, λ, $\dot{\Psi}$, $\dot{\varphi}$ are given functions of complex variable, $\dot{w}$ is unknown function of complex variable, operator $E(\dot{w})$ has implicit form.

Prior to resolving boundary-value problem (A) we find the solution of the following boundary-value problem for generalized analytic functions:

$$\partial_{\bar{z}}\dot{w} + A\dot{w} + B\bar{\dot{w}} = \dot{\Psi}, \quad Re\{\overline{\lambda}\dot{w}\} = \dot{\varphi} \quad \text{on} \quad \partial F.$$

Then we use the theory of Fredholm operator of index zero and the theory of Volterra operator equation. Using the method of successive approximations and the principle of contractive mapping, we obtain solution of boundary-value problem (A) and the proof of theorem 1, the main result of this article.

Key words: deformation of surface, mean curvature, Gaussian curvature, G-deformation, continuous deformation.