УДК 514.75
ББК 22.151

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ С ЦИКЛИЧЕСКИ РЕКУРРЕНТНОЙ ВТОРОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМОЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.И. Бодренко

В работе доказано, что всякая невырожденная n-мерная ($n \geq 2$) гиперповерхность второго порядка в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму.

Ключевые слова: *вторая фундаментальная форма, связность Ван дер Вардена — Бортолотти.*

Введение

Пусть E^{n+1} — $(n+1)$-мерное $(n \geq 2)$ евклидово пространство с декартовыми прямоугольными координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, $<,>$ — скалярное произведение в E^{n+1}. Пусть F^n — n-мерная поверхность в E^{n+1}, заданная в окрестности каждой своей точки уравнениями

$$x_\alpha = \phi_{(\alpha)}(u_1, \ldots, u_n), \quad (u_1, \ldots, u_n) \in D, \quad \alpha = \overline{1, n+1},$$

где D — некоторая область параметрического пространства $(u_1, \ldots, u_n)$, $\phi_{(\alpha)} \in C^3(D)$. Векторное параметрическое уравнение $F^n \subset E^{n+1}$ имеет вид

$$r(u_1, \ldots, u_n) = \{\phi_{(1)}(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \phi_{(n)}(u_1, \ldots, u_n), \phi_{(n+1)}(u_1, \ldots, u_n)\}.$$

Обозначим

$$r_i = \frac{\partial r(u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i}, \quad r_{ij} = \frac{\partial^2 r(u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i \partial u_j}.$$

Пусть $g_{ij}, b_{ij}, \Gamma^k_{ij}, \nabla_i$ — соответственно коэффициенты первой и второй квадратичных форм гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$, символы Кристоффеля и операция ковариантного дифференцирования, вычисленные относительно тензора g_{ij}. Уравнения Петерсона — Кодацци для гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$ имеют вид $\nabla_k b_{ij} = \nabla_i b_{kj}$. Индексы $i, j, k, \ldots$ принимают значения от 1 до n.

Вторая квадратичная форма гиперповерхности F^n в евклидовом пространстве E^{n+1} называется *циклически рекуррентной*, если на F^n существует 1-форма μ такая, что выполняются соотношения:

$$\nabla_k b_{ij} = \mu_k b_{ij} + \mu_i b_{jk} + \mu_j b_{ki}, \tag{1}$$

где μ_i — коэффициенты 1-формы μ.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Всякая невырожденная n-мерная $(n \geq 2)$ гиперповерхность второго порядка в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1} имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму.*

1. Основные леммы

Пусть гиперповерхность F^n в евклидовом пространстве E^{n+1} с декартовыми прямоугольными координатами $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ задана уравнением

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0, \tag{2}$$

где $\Phi \in C^3$.
Обозначим

$$\Phi_\alpha = \frac{\partial \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{\partial x_\alpha}, \qquad \Phi_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad \alpha, \beta = \overline{1, n+1},$$

$$\mathrm{grad}\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n+1}\},$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть гиперповерхность F^n в евклидовом пространстве E^{n+1} задана уравнением (2) $(\mathrm{grad}\Phi \neq 0)$. Пусть в некоторой точке $P(\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_{n+1}) = P_0 \in F^n$ выполняется условие $\Phi_{n+1}(\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_{n+1}) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки P_0 можно ввести локальные координаты $u_1 = x_1, \dots, u_n = x_n$, такие, что F^n в этой окрестности можно задать параметрическими уравнениями $x_1 = u_1, \dots, x_n = u_n$, $x_{n+1} = f(u_1, \dots, u_n)$, где $\mathring{x}_1 = \mathring{u}_1, \dots, \mathring{x}_n = \mathring{u}_n$, $\mathring{x}_{n+1} = f(\mathring{u}_1, \dots, \mathring{u}_n)$; коэффициенты g_{ij} и b_{ij} первой и второй квадратичных форм F^n, соответственно, вычисляются по формулам*

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\Phi_i \Phi_j}{\Phi_{n+1}^2}, \tag{3}$$

$$b_{ij} = \frac{\left(\Phi_i \Phi_{n+1} \Phi_{j,n+1} - \Phi_i \Phi_j \Phi_{n+1,n+1} - \Phi_{n+1}^2 \Phi_{ij} + \Phi_j \Phi_{n+1} \Phi_{i,n+1}\right)}{\Phi_{n+1} |\Phi_{n+1}| |\mathrm{grad}\Phi|}, \tag{4}$$

где $|\mathrm{grad}\Phi| = \sqrt{< \mathrm{grad}\Phi, \mathrm{grad}\Phi >} = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \dots + \Phi_{n+1}^2}$.

Доказательство. Согласно теореме о неявной функции в окрестности точки P_0 поверхность $F^n \subset E^{n+1}$ можно задать уравнением $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$, где $\Phi(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) = 0$. Тогда векторное параметрическое уравнение F^n в окрестности точки P_0 можно записать в виде

$$r(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Мы имеем ([1], п. 14.3, (14.57), (14.58))

$$g_{ij} =< r_i, r_j >= \delta_{ij} + f_i f_j, \qquad b_{ij} =< r_{ij}, N >= \frac{f_{ij}}{\sqrt{1 + f_1^2 + \dots + f_n^2}}, \tag{5}$$

где N — единичный вектор нормали к F^n в E^{n+1}.

Для неявно заданной функции $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ имеем

$$f_i = -\frac{\Phi_i}{\Phi_{n+1}}, f_{ij} = \frac{\Phi_i \Phi_{n+1} \Phi_{j,n+1} - \Phi_i \Phi_j \Phi_{n+1,n+1} - \Phi_{n+1}^2 \Phi_{ij} + \Phi_j \Phi_{n+1} \Phi_{i,n+1}}{\Phi_{n+1}^3},$$

$$\sqrt{1 + f_1^2 + \dots + f_n^2} = \frac{\sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \dots + \Phi_{n+1}^2}}{|\Phi_{n+1}|}.$$

Подставив эти выражения в формулы (5), получим утверждение леммы.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\det \left\| \delta_{ij} + \frac{b_i b_j}{a^2} \right\|_{(n \times n)} = \frac{a^2 + \sum_{l=1}^n b_l^2}{a^2}. \tag{6}$$

Доказательство. Доказательство формулы (6) проведем методом математической индукции. При $n = 2$ утверждение леммы верно:

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{b_1^2}{a^2} & \frac{b_1 b_2}{a^2} \\ \frac{b_2 b_1}{a^2} & 1 + \frac{b_2^2}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{a^2 + b_1^2 + b_2^2}{a^2}.$$

Предположив, что формула (6) верна для $n = k - 1$, докажем ее для $n = k$. Для этого разложим определитель матрицы

$$A = \left\| \delta_{ij} + \frac{b_i b_j}{a^2} \right\|_{(k \times k)}$$

по элементам последней строки. Мы имеем:

$$\det A = \left(1 + \frac{b_k^2}{a^2}\right) \det \left\| \delta_{ij} + \frac{b_i b_j}{a^2} \right\|_{((k-1) \times (k-1))} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{b_k b_i}{a^2} A_{ki}, \tag{7}$$

где A_{ki} — алгебраическое дополнение элемента a_{ki} $(1 \le i \le k-1)$ матрицы A. Найдем дополнительный минор M_{ki} элемента a_{ki}, где $i = 1, \dots, k-1$. Мы имеем

$$M_{ki} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{b_1^2}{a^2} & \frac{b_1 b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_1 b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_1 b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_1 b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_1 b_k}{a^2} \\ \frac{b_2 b_1}{a^2} & 1 + \frac{b_2^2}{a^2} & \dots & \frac{b_2 b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_2 b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_2 b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_2 b_k}{a^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_{i-1} b_1}{a^2} & \frac{b_{i-1} b_2}{a^2} & \dots & 1 + \frac{b_{i-1}^2}{a^2} & \frac{b_{i-1} b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_{i-1} b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_{i-1} b_k}{a^2} \\ \frac{b_i b_1}{a^2} & \frac{b_i b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_i b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_i b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_i b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_i b_k}{a^2} \\ \frac{b_{i+1} b_1}{a^2} & \frac{b_{i+1} b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_{i+1} b_{i-1}}{a^2} & 1 + \frac{b_{i+1}^2}{a^2} & \dots & \frac{b_{i+1} b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_{i+1} b_k}{a^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_{k-1} b_1}{a^2} & \frac{b_{k-1} b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_{k-1} b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_{k-1} b_{i+1}}{a^2} & \dots & 1 + \frac{b_{k-1}^2}{a^2} & \frac{b_{k-1} b_k}{a^2} \end{vmatrix}$$

Заметим, что последний столбец определителя M_{ki} для $1 \le i \le k-1$ пропорционален столбцу

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{k-1} \end{pmatrix},$$

и применим свойство линейности определителя к первому столбцу. Получим

$$M_{ki} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1 b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_1 b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_1 b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_1 b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_1 b_k}{a^2} \\ 0 & 1+\frac{b_2^2}{a^2} & \dots & \frac{b_2 b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_2 b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_2 b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_2 b_k}{a^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{b_{i-1} b_2}{a^2} & \dots & 1+\frac{b_{i-1}^2}{a^2} & \frac{b_{i-1} b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_{i-1} b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_{i-1} b_k}{a^2} \\ 0 & \frac{b_i b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_i b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_i b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_i b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_i b_k}{a^2} \\ 0 & \frac{b_{i+1} b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_{i+1} b_{i-1}}{a^2} & 1+\frac{b_{i+1}^2}{a^2} & \dots & \frac{b_{i+1} b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_{i+1} b_k}{a^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{b_{k-1} b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_{k-1} b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_{k-1} b_{i+1}}{a^2} & \dots & 1+\frac{b_{k-1}^2}{a^2} & \frac{b_{k-1} b_k}{a^2} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{b_1^2}{a^2} & \frac{b_1 b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_1 b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_1 b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_1 b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_1 b_k}{a^2} \\ \frac{b_2 b_1}{a^2} & 1+\frac{b_2^2}{a^2} & \dots & \frac{b_2 b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_2 b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_2 b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_2 b_k}{a^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_{i-1} b_1}{a^2} & \frac{b_{i-1} b_2}{a^2} & \dots & 1+\frac{b_{i-1}^2}{a^2} & \frac{b_{i-1} b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_{i-1} b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_{i-1} b_k}{a^2} \\ \frac{b_i b_1}{a^2} & \frac{b_i b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_i b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_i b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_i b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_i b_k}{a^2} \\ \frac{b_{i+1} b_1}{a^2} & \frac{b_{i+1} b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_{i+1} b_{i-1}}{a^2} & 1+\frac{b_{i+1}^2}{a^2} & \dots & \frac{b_{i+1} b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_{i+1} b_k}{a^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_{k-1} b_1}{a^2} & \frac{b_{k-1} b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_{k-1} b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_{k-1} b_{i+1}}{a^2} & \dots & 1+\frac{b_{k-1}^2}{a^2} & \frac{b_{k-1} b_k}{a^2} \end{vmatrix}.$$

Второе слагаемое в последнем равенстве равно нулю как определитель с двумя пропорциональными столбцами. Разложив первое слагаемое по элементам первого столбца, находим

$$M_{ki}=\begin{vmatrix} 1+\frac{b_2^2}{a^2} & \dots & \frac{b_2b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_2b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_2b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_2b_k}{a^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_{i-1}b_2}{a^2} & \dots & 1+\frac{b_{i-1}^2}{a^2} & \frac{b_{i-1}b_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_{i-1}b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_{i-1}b_k}{a^2} \\ \frac{b_ib_2}{a^2} & \dots & \frac{b_ib_{i-1}}{a^2} & \frac{b_ib_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_ib_{k-1}}{a^2} & \frac{b_ib_k}{a^2} \\ \frac{b_{i+1}b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_{i+1}b_{i-1}}{a^2} & 1+\frac{b_{i+1}^2}{a^2} & \dots & \frac{b_{i+1}b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_{i+1}b_k}{a^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_{k-1}b_2}{a^2} & \dots & \frac{b_{k-1}b_{i-1}}{a^2} & \frac{b_{k-1}b_{i+1}}{a^2} & \dots & 1+\frac{b_{k-1}^2}{a^2} & \frac{b_{k-1}b_k}{a^2} \end{vmatrix}.$$

Тем же способом, применяя свойство линейности к первому столбцу, продолжаем разложение определителя M_{ki} на сумму двух определителей, один из которых будет равен нулю как определитель с двумя пропорциональными столбцами. В результате таких последовательных разложений определителя M_{ki} приходим к равенству

$$M_{ki}=\begin{vmatrix} \frac{b_ib_{i+1}}{a^2} & \dots & \frac{b_ib_{k-1}}{a^2} & \frac{b_ib_k}{a^2} \\ 1+\frac{b_{i+1}^2}{a^2} & \dots & \frac{b_{i+1}b_{k-1}}{a^2} & \frac{b_{i+1}b_k}{a^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_{k-1}b_{i+1}}{a^2} & \dots & 1+\frac{b_{k-1}^2}{a^2} & \frac{b_{k-1}b_k}{a^2} \end{vmatrix}.$$

Последовательно применяя свойство линейности определителя к первому, второму, ..., $(k-i-1)$-му столбцам определителя M_{ki}, находим

$$M_{ki}=\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{b_ib_k}{a^2} \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{k-i+1}\quad\frac{b_ib_k}{a^2}.$$

Следовательно, $A_{ki}=(-1)^{k+i}M_{ki}=-\frac{b_ib_k}{a^2}$. В силу индуктивного предположения имеем

$$\det\left\|\delta_{ij}+\frac{b_ib_j}{a^2}\right\|_{((k-1)\times(k-1))}=\frac{a^2+\sum_{l=1}^{k-1}b_l^2}{a^2}.$$

Отсюда, используя (7), находим

$$\det A=\left(1+\frac{b_k^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2+\sum_{l=1}^{k-1}b_l^2}{a^2}\right)-\sum_{l=1}^{k-1}\frac{b_k^2b_l^2}{a^4}=\frac{a^2+\sum_{l=1}^{k}b_l^2}{a^2}.$$

Таким образом, формула (6) доказана для $n=k$, и, следовательно, утверждение леммы верно для любого n.

Лемма 3. *В условиях леммы 1 определитель матрицы* $||g_{ij}||$ *коэффициентов первой квадратичной формы гиперповерхности* $F^n \subset E^{n+1}$ *вычисляется по формуле*

$$\det ||g_{ij}|| = \frac{|\mathrm{grad}\Phi|^2}{\Phi_{n+1}^2}. \tag{8}$$

Доказательство. Применяя формулу (6) для вычисления определителя

$$\det ||g_{ij}|| = \det \left|\left|\delta_{ij} + \frac{\Phi_i \Phi_j}{\Phi_{n+1}^2}\right|\right|,$$

получим утверждение леммы.

Лемма 4. *В условиях леммы 1 матрица* $||g^{ij}|| = ||g_{ij}||^{-1}$ *имеет вид*

$$||g^{ij}|| = \left|\left|\delta^{ij} - \frac{\Phi_i \Phi_j}{g\Phi_{n+1}^2}\right|\right|, \tag{9}$$

где $g = \det||g_{ij}||$.

Доказательство. Проверим, что $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$. Используя формулы (3) и (8), находим:

$$g_{ij}g^{jk} = \left(\delta_{ij} + \frac{\Phi_i\Phi_j}{\Phi_{n+1}^2}\right)\left(\delta^{jk} - \frac{\Phi_j\Phi_k}{g\Phi_{n+1}^2}\right) =$$

$$= \delta_{ij}\delta^{jk} + \frac{\Phi_i\Phi_j\delta^{jk}}{\Phi_{n+1}^2} - \frac{\Phi_k\sum_{j=1}^n \delta_{ij}\Phi_j}{g\Phi_{n+1}^2} - \frac{\Phi_i\Phi_k\sum_{j=1}^n \Phi_j^2}{g\Phi_{n+1}^4} =$$

$$= \delta_i^k + \frac{\Phi_i\Phi_k}{\Phi_{n+1}^2} - \frac{\Phi_k\Phi_i}{g\Phi_{n+1}^2} - \frac{\Phi_i\Phi_k\sum_{j=1}^n \Phi_j^2}{g\Phi_{n+1}^4} =$$

$$= \delta_i^k + \frac{\Phi_i\Phi_k}{g\Phi_{n+1}^4}\left(g\Phi_{n+1}^2 - \Phi_{n+1}^2 - \sum_{j=1}^n \Phi_j^2\right) = \delta_i^k.$$

Лемма 5. *В условиях леммы 1 символы Кристоффеля* Γ_{ij}^k *вычисляются по формуле*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\Phi_k\left(\Phi_{n+1}^2\Phi_{ij} - \Phi_{n+1}\Phi_j\Phi_{i,n+1} - \Phi_{n+1}\Phi_i\Phi_{j,n+1} + \Phi_i\Phi_j\Phi_{n+1,n+1}\right)}{\Phi_{n+1}^2|\mathrm{grad}\Phi|^2}. \tag{10}$$

Доказательство. В условиях леммы 1 имеем $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$. Тогда

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} = \frac{\partial(\delta_{ij} + f_i f_j)}{\partial x^m} = f_{im}f_j + f_i f_{jm}.$$

Отсюда находим

$$2\Gamma_{ij,m} = \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} = 2f_m f_{ij},$$

$$\Gamma_{ij,m} = \frac{\Phi_m}{\Phi_{n+1}^4}\left(\Phi_i\Phi_j\Phi_{n+1,n+1} + \Phi_{n+1}^2\Phi_{ij} - \Phi_i\Phi_{n+1}\Phi_{j,n+1} - \Phi_j\Phi_{n+1}\Phi_{i,n+1}\right).$$

Используя формулу (9), имеем

$$\Gamma_{ij}^{k} = g^{km}\Gamma_{ij,m} = \left(\delta^{km} - \frac{\Phi_k\Phi_m}{g\Phi_{n+1}^2}\right)\Gamma_{ij,m}.$$

Используя формулу (8), находим

$$\delta^{km}\Phi_m - \frac{\Phi_k\sum_{m=1}^{n}\Phi_m^2}{g\Phi_{n+1}^2} = \Phi_k\left(1 - \frac{\sum_{m=1}^{n}\Phi_m^2}{g\Phi_{n+1}^2}\right) = \frac{\Phi_k}{g}.$$

Следовательно,

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\Phi_k}{g\Phi_{n+1}^4}\left(\Phi_i\Phi_j\Phi_{n+1,n+1} + \Phi_{n+1}^2\Phi_{ij} - \Phi_i\Phi_{n+1}\Phi_{j,n+1} - \Phi_j\Phi_{n+1}\Phi_{i,n+1}\right).$$

Отсюда, учитывая (8), получим (10).

Лемма 6. *Имеет место равенство*

$$\det\phi = \det\begin{Vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1,n+1} & \Phi_1 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2,n+1} & \Phi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{n+1,1} & \Phi_{n+1,2} & \dots & \Phi_{n+1,n+1} & \Phi_{n+1} \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_{n+1} & 0 \end{Vmatrix} = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\Phi_\alpha\Phi_\beta H_{\alpha\beta}, \qquad (11)$$

где $H_{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение элемента $\Phi_{\alpha\beta}$ гессиана $H = ||\Phi_{\alpha\beta}||$ функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$.

Доказательство. Разложим определитель матрицы $\phi = ||\phi_{ab}||$ по элементам последней строки. Мы имеем:

$$\det\phi = \sum_{\alpha=1}^{n+1}\Phi_\alpha\Psi_{n+2,\alpha},$$

где $\Psi_{n+2,\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $\phi_{n+2,\alpha}$ матрицы ϕ. Найдем дополнительный минор элемента $\phi_{n+2,\alpha}$:

$$\begin{vmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1,\alpha-1} & \Phi_{1,\alpha+1} & \dots & \Phi_{1,n+1} & \Phi_1 \\ \Phi_{21} & \dots & \Phi_{2,\alpha-1} & \Phi_{2,\alpha+1} & \dots & \Phi_{2,n+1} & \Phi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{n+1,1} & \dots & \Phi_{n+1,\alpha-1} & \Phi_{n+1,\alpha+1} & \dots & \Phi_{n+1,n+1} & \Phi_{n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n+1}(-1)^{n+1+\beta}\Phi_\beta(-1)^{-(\alpha+\beta)}H_{\beta\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n+1}(-1)^{n+1-\alpha}\Phi_\beta H_{\beta\alpha}.$$

Отсюда,

$$\Psi_{n+2,\alpha} = (-1)^{n+2+\alpha}\sum_{\beta=1}^{n+1}(-1)^{n+1-\alpha}\Phi_\beta H_{\beta\alpha} = -\sum_{\beta=1}^{n+1}\Phi_\beta H_{\beta\alpha}.$$

Таким образом,

$$\det\phi = \sum_{\alpha=1}^{n+1}\Phi_\alpha\Psi_{n+2,\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n+1}\Phi_\alpha(-\sum_{\beta=1}^{n+1}\Phi_\beta H_{\beta\alpha}) = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\Phi_\alpha\Phi_\beta H_{\alpha\beta}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим на гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$, заданной уравнением (2), функцию K, определенную равенством

$$K = -\frac{\begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1,n+1} & \Phi_1 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2,n+1} & \Phi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{n+1,1} & \Phi_{n+1,2} & \dots & \Phi_{n+1,n+1} & \Phi_{n+1} \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_{n+1} & 0 \end{vmatrix}}{|\mathrm{grad}\Phi|^{n+2}}. \tag{12}$$

В силу (11) имеем

$$K = \frac{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1} \Phi_\alpha \Phi_\beta H_{\alpha\beta}}{|\mathrm{grad}\Phi|^{n+2}}. \tag{13}$$

2. Центральные невырожденные гиперповерхности второго порядка

Пусть F^n — центральная невырожденная гиперповерхность второго порядка в E^{n+1}. Тогда в E^{n+1} существует декартова прямоугольная система координат $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, в которой уравнение гиперповерхности F^n имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}^2 - 1 = 0, \quad \text{где } \lambda_\alpha \neq 0,\ \alpha = \overline{1, n+1}.$$

То есть F^n в E^{n+1} можно задать уравнением вида (2), где функция Φ определена равенством

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}^2 - 1. \tag{14}$$

Введем обозначения

$$\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2, \quad \tau = \tau(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) x_i^2. \tag{15}$$

Лемма 7. *Пусть в условиях леммы 1 функция Φ определена равенством (14) и $\Phi_{n+1} > 0$ в точке P_0. Тогда символы Кристоффеля $\Gamma_{ij}^k(x_1, \dots, x_n)$, вычисленные относительно метрического тензора $g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$, и коэффициенты $b_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ второй квадратичной формы гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$ соответственно находятся по формулам:*

$$\Gamma_{ii}^k = -\frac{\lambda_i \lambda_k (1 + \lambda_i x_i^2 - \sigma) x_k}{(\sigma - 1)(\tau + \lambda_{n+1})}, \quad \Gamma_{ij}^k = -\frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_k x_i x_j x_k}{(\sigma - 1)(\tau + \lambda_{n+1})}, \quad i \neq j, \tag{16}$$

$$b_{ii} = \frac{\lambda_i (1 + \lambda_i x_i^2 - \sigma)}{(\sigma - 1)\sqrt{\tau + \lambda_{n+1}}}, \quad b_{ij} = \frac{\lambda_i \lambda_j x_i x_j}{(\sigma - 1)\sqrt{\tau + \lambda_{n+1}}}, \quad i \neq j. \tag{17}$$

Доказательство. Мы имеем $\Phi_i = 2\lambda_i x_i$, $\Phi_{n+1} = 2\lambda_{n+1} x_{n+1}$, $\Phi_{ii} = 2\lambda_i$, $\Phi_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\Phi_{n+1,n+1} = 2\lambda_{n+1}$, $\Phi_{i,n+1} = 0$, $|\mathrm{grad}\Phi|^2 = 4(\tau + \lambda_{n+1})$. Подставив полученные выражения в формулы (10) и (4) и используя обозначения (15), приходим соответственно к формулам (16) и (17). Если $\Phi_{n+1} < 0$, то выражения для b_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ меняют знак.

Лемма 8. *В условиях леммы 7 ковариантные производные $\nabla_k b_{ij}$ коэффициентов b_{ij} второй квадратичной формы гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$ вычисляются по формулам:*

$$\nabla_i b_{ii} = \frac{3\lambda_i^2(\lambda_i - \lambda_{n+1})x_i(1+\lambda_i x_i^2 - \sigma)}{(1-\sigma)(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}, \tag{18}$$

$$\nabla_j b_{ii} = \frac{\lambda_i\lambda_j x_j\left(2\lambda_i(\lambda_i-\lambda_{n+1})x_i^2 + (\lambda_j - \lambda_{n+1})(1+\lambda_i x_i^2-\sigma)\right)}{(1-\sigma)(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}, \quad i \neq j, \tag{19}$$

$$\nabla_k b_{ij} = \frac{\lambda_i\lambda_j\lambda_k x_i x_j x_k}{(1-\sigma)(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}\left(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k - 3\lambda_{n+1}\right), \quad i\neq j\neq k\neq i. \tag{20}$$

Доказательство. В силу (16), (17) для фиксированных i, j, k, p, где $i \neq j \neq k \neq i$, $p \neq j$, имеем

$$\Gamma_{ii}^i b_{ii} = -\frac{\lambda_i^3(1+\lambda_i x_i^2-\sigma)^2 x_i}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}, \quad \Gamma_{ii}^k b_{ik} = -\frac{\lambda_i^2\lambda_k^2(1+\lambda_i x_i^2-\sigma)x_i x_k^2}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3},$$

$$\Gamma_{ij}^i b_{ii} = -\frac{\lambda_i^3\lambda_j(1+\lambda_i x_i^2-\sigma)x_i^2 x_j}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}, \quad \Gamma_{ij}^k b_{ik} = -\frac{\lambda_i^2\lambda_j\lambda_k^2 x_i^2 x_j x_k^2}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3},$$

$$\Gamma_{ik}^j b_{jj} = -\frac{\lambda_i\lambda_j^2\lambda_k(1+\lambda_j x_j^2-\sigma)x_i x_j x_k}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}, \quad \Gamma_{ik}^p b_{pj} = -\frac{\lambda_i\lambda_j\lambda_m\lambda_p^2 x_i x_j x_k x_p^2}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}.$$

Отсюда, суммируя по m и учитывая, что $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2 = \tau + \sigma\lambda_{n+1}$, находим

$$\Gamma_{ii}^m b_{im} = -\frac{\lambda_i^2 x_i(1+\lambda_i x_i^2-\sigma)(\lambda_i(1-\sigma)+\tau+\sigma\lambda_{n+1})}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3},$$

$$\Gamma_{ij}^m b_{im} = -\frac{\lambda_i^2\lambda_j x_i^2 x_j(\lambda_i(1-\sigma)+\tau+\sigma\lambda_{n+1})}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}, \quad i\neq j,$$

$$\Gamma_{ki}^m b_{mj} = -\frac{\lambda_i\lambda_j\lambda_k x_i x_j x_k(\lambda_j(1-\sigma)+\tau+\sigma\lambda_{n+1})}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}, \quad i\neq j\neq k\neq i.$$

Используя (17), получим

$$\partial_i b_{ii} = -\frac{\lambda_i(1+\lambda_i x_i^2-\sigma)}{(\sigma-1)^2(\tau+\lambda_{n+1})}\partial_i\left((\sigma-1)\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}}\right) =$$

$$= -\frac{\lambda_i^2 x_i(1+\lambda_i x_i^2-\sigma)}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}\left(2(\tau+\lambda_{n+1})+(\sigma-1)(\lambda_i-\lambda_{n+1})\right),$$

$$\partial_j b_{ii} = \frac{-2\lambda_i\lambda_j x_j}{(\sigma-1)\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}}} - \frac{\lambda_i(1+\lambda_i x_i^2-\sigma)}{(\sigma-1)^2(\tau+\lambda_{n+1})}\partial_j\left((\sigma-1)\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{-2\lambda_i\lambda_j x_j}{(\sigma-1)\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}}} - \frac{\lambda_i\lambda_j x_j(1+\lambda_i x_i^2-\sigma)}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}\left(2(\tau+\lambda_{n+1})+(\sigma-1)(\lambda_j-\lambda_{n+1})\right) =$$

$$= \frac{-\lambda_i\lambda_j x_j(2(\sigma-1)(\tau+\lambda_{n+1})+(1+\lambda_i x_i^2-\sigma)(2(\tau+\lambda_{n+1})+(\sigma-1)(\lambda_j-\lambda_{n+1})))}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3} =$$

$$= \frac{-\lambda_i\lambda_j x_j}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}\left(2(\tau+\lambda_{n+1})\lambda_i x_i^2+(\sigma-1)(\lambda_j-\lambda_{n+1})(1+\lambda_i x_i^2-\sigma)\right), i\neq j,$$

$$\partial_k b_{ij} = -\frac{\lambda_i\lambda_j x_i x_j}{(\sigma-1)^2(\tau+\lambda_{n+1})}\partial_k\left((\sigma-1)\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}}\right) =$$

$$= -\frac{\lambda_i\lambda_j\lambda_k x_i x_j x_k}{(\sigma-1)^2(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}})^3}\left(2(\tau+\lambda_{n+1})+(\sigma-1)(\lambda_k-\lambda_{n+1})\right), \quad i\neq j\neq k\neq i.$$

Подставив полученные выражения в формулы $\nabla_k b_{ij} = \partial_k b_{ij} - \Gamma^m_{ki} b_{mj} - \Gamma^m_{kj} b_{im}$, приходим к равенствам (18)–(20).

Лемма 9. *Пусть в условиях леммы 1 функция Φ определена равенством (14). Тогда в некоторой окрестности точки $P_0 \in F^n$ функция $K = K(x_1,\ldots,x_n)$, определенная на гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$ равенством (12), вычисляется по формуле*

$$K = \frac{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}}{\left(\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}}\right)^{n+2}}. \tag{21}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\Phi_\alpha\Phi_\beta H_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n+1}\Phi_\alpha^2 H_{\alpha\alpha} = 2^{n+2}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\lambda_\alpha x_\alpha^2 = 2^{n+2}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1},$$

$$|\mathrm{grad}\Phi|^{n+2} = \left(2\sqrt{\tau+\lambda_{n+1}}\right)^{n+2},$$

где функция $\tau = \tau(x_1,\ldots,x_n)$ определена равенством (15). Подставив полученные соотношения в равенство (13), получим (21).

3. Нецентральные невырожденные гиперповерхности второго порядка

Пусть F^n — нецентральная невырожденная гиперповерхность второго порядка в E^{n+1}. Тогда в E^{n+1} существует декартова прямоугольная система координат $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, в которой уравнение гиперповерхности F^n имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 - 2x_{n+1} = 0, \quad \text{где } \lambda_i \neq 0,\ i=\overline{1,n}.$$

То есть F^n в E^{n+1} можно задать уравнением вида (2), где функция Φ определена равенством

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 - 2x_{n+1}. \tag{22}$$

Введем обозначение

$$\nu = \nu(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 x_i^2. \tag{23}$$

Лемма 10. *Пусть в условиях леммы 1 функция* Φ *определена равенством (22). Тогда символы Кристоффеля* $\Gamma_{ij}^k(x_1,\ldots,x_n)$*, вычисленные относительно метрического тензора* $g_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$*, коэффициенты* $b_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$ *второй квадратичной формы гиперповерхности* $F^n\subset E^{n+1}$*, ковариантные производные* $\nabla_k b_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$*, функция* $K(x_1,\ldots,x_n)$*, определенная на гиперповерхности* $F^n\subset E^{n+1}$ *равенством (12), соответственно находятся по формулам:*

$$\Gamma_{ii}^k=\frac{\lambda_i\lambda_k x_k}{(\nu+1)},\quad \Gamma_{ij}^k=0,\quad i\neq j, \tag{24}$$

$$b_{ii}=\frac{\lambda_i}{\sqrt{\nu+1}},\quad b_{ij}=0,\quad i\neq j, \tag{25}$$

$$\nabla_i b_{ii}=\frac{-3\lambda_i^3x_i}{(\sqrt{\nu+1})^3},\quad \nabla_j b_{ii}=\frac{-\lambda_i\lambda_j^2x_j}{(\sqrt{\nu+1})^3},\quad i\neq j,\quad \nabla_k b_{ij}=0,\quad i\neq j\neq k\neq i, \tag{26}$$

$$K=\frac{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}{\left(\sqrt{\nu+1}\right)^{n+2}}. \tag{27}$$

Доказательство. Мы имеем $\Phi_i=2\lambda_i x_i$, $\Phi_{n+1}=-2$, $\Phi_{ii}=2\lambda_i$, $\Phi_{ij}=0$ при $i\neq j$, $\Phi_{n+1,n+1}=0$, $\Phi_{i,n+1}=0$, $|\mathrm{grad}\Phi|^2=4(\nu+1)$. Подставив полученные выражения в формулы (10) и (4) и используя обозначение (23), приходим соответственно к формулам (24) и (25).

Используя (24), (25), имеем

$$\partial_i b_{ii}=-\frac{\lambda_i^3x_i}{(\sqrt{\nu+1})^3},\quad \partial_j b_{ii}=-\frac{\lambda_i\lambda_j^2x_j}{(\sqrt{\nu+1})^3},\quad \partial_k b_{ij}=0,\quad i\neq j\neq k\neq i,$$

$$\Gamma_{ii}^m b_{im}=\frac{\lambda_i^3x_i}{(\sqrt{\nu+1})^3},\quad \Gamma_{ij}^m b_{im}=0,\quad i\neq j\quad \Gamma_{ij}^m b_{km}=0,\quad i\neq j\neq k\neq i.$$

Отсюда получим равенства (26).

Для доказательства равенства (27) вычисляем

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1}\Phi_\alpha\Phi_\beta H_{\alpha\beta}=\Phi_{n+1}^2H_{n+1,n+1}=2^{n+2}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n,\quad |\mathrm{grad}\Phi|^{n+2}=\left(2\sqrt{\nu+1}\right)^{n+2},$$

где функция ν определена равенством (23). Отсюда, учитывая (13), приходим к (27).

4. Доказательство теоремы 1

1. Пусть F^n — центральная невырожденная гиперповерхность второго порядка в E^{n+1}, точка $P_0\in F^n$. Тогда в E^{n+1} существует декартова прямоугольная система координат $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$, в которой F^n задается уравнением

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_{n+1}x_{n+1}^2-1=0,\quad \text{где } \lambda_\alpha\neq 0,\ \alpha=\overline{1,n+1}.$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $\mathring{x}_{n+1}\neq 0$ в точке $P_0=P(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_{n+1})$. Тогда в силу леммы 1 в некоторой окрестности точки P_0 на F^n можно ввести локальные координаты $u_1 = x_1, \dots, u_n = x_n$, в которых функция $K(x_1, \dots, x_n)$ вычисляется по формуле (21). Из (21) находим

$$\partial_m \ln|K| = -(n+2)\frac{\lambda_m(\lambda_m - \lambda_{n+1})x_m}{\tau + \lambda_{n+1}}, \quad m = \overline{1, n}. \tag{28}$$

Из (17) и (28) имеем

$$\frac{b_{ii}\partial_i \ln|K|}{n+2} = \frac{\lambda_i^2(\lambda_i - \lambda_{n+1})x_i(1 + \lambda_i x_i^2 - \sigma)}{(1-\sigma)(\sqrt{\tau + \lambda_{n+1}})^3},$$

$$\frac{b_{ii}\partial_j \ln|K| + 2b_{ij}\partial_i \ln|K|}{n+2} = \frac{\lambda_i\lambda_j(\lambda_j - \lambda_{n+1})x_j(1 + \lambda_i x_i^2 - \sigma)}{(1-\sigma)(\sqrt{\tau + \lambda_{n+1}})^3} +$$

$$+ \frac{2\lambda_i^2\lambda_j x_i^2 x_j(\lambda_i - \lambda_{n+1})}{(1-\sigma)(\sqrt{\tau + \lambda_{n+1}})^3}, \quad i \neq j,$$

$$\frac{b_{ij}\partial_k \ln|K| + b_{jk}\partial_i \ln|K| + b_{ki}\partial_j \ln|K|}{n+2} = \frac{\lambda_i\lambda_j\lambda_k x_i x_j x_k(\lambda_k - \lambda_{n+1})}{(1-\sigma)(\sqrt{\tau + \lambda_{n+1}})^3} +$$

$$+ \frac{\lambda_i\lambda_j\lambda_k x_i x_j x_k(\lambda_i - \lambda_{n+1})}{(1-\sigma)(\sqrt{\tau + \lambda_{n+1}})^3} + \frac{\lambda_i\lambda_j\lambda_k x_i x_j x_k(\lambda_j - \lambda_{n+1})}{(1-\sigma)(\sqrt{\tau + \lambda_{n+1}})^3}, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

Отсюда, учитывая равенства (18)–(20), получим соотношения:

$$\nabla_i b_{ii} = \frac{1}{n+2}\left(3b_{ii}\partial_i \ln|K|\right),$$

$$\nabla_i b_{ji} = \nabla_j b_{ii} = \frac{1}{n+2}\left(b_{ii}\partial_j \ln|K| + 2b_{ij}\partial_i \ln|K|\right), \quad i \neq j,$$

$$\nabla_k b_{ij} = \frac{1}{n+2}\left(b_{ij}\partial_k \ln|K| + b_{jk}\partial_i \ln|K| + b_{ki}\partial_j \ln|K|\right), \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

Таким образом, на F^n выполняются соотношения (1), где коэффициенты 1-формы μ определены равенством

$$\mu_i = \frac{1}{n+2}\partial_i \ln|K|, \tag{29}$$

и функция K вычисляется по формуле (21).

2. Пусть теперь F^n — нецентральная невырожденная гиперповерхность второго порядка в E^{n+1}. Тогда в некоторой декартовой прямоугольной системе координат $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ уравнение F^n имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 - 2x_{n+1} = 0, \quad \text{где } \lambda_i \neq 0,\ i = \overline{1, n}.$$

Векторное параметрическое уравнение F^n можно записать в виде

$$r = \left\{x_1, \dots, x_n, \frac{1}{2}\left(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2\right)\right\}.$$

Для функции $K(x_1, \dots, x_n)$ из равенства (27) находим

$$\partial_m \ln|K| = -(n+2)\frac{\lambda_m^2 x_m}{\nu + 1}, \quad m = \overline{1, n}. \tag{30}$$

Из (25) и (30) получим

$$\frac{b_{ii}\partial_i \ln|K|}{n+2} = -\frac{\lambda_i^3 x_i}{(\sqrt{\nu+1})^3},$$

$$\frac{b_{ii}\partial_j \ln|K| + 2b_{ij}\partial_i \ln|K|}{n+2} = -\frac{\lambda_i \lambda_j^2 x_j}{(\sqrt{\nu+1})^3}, \quad i \neq j,$$

$$\frac{b_{ij}\partial_k \ln|K| + b_{jk}\partial_i \ln|K| + b_{ki}\partial_j \ln|K|}{n+2} = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

Отсюда, в силу (26), получим соотношения (1), где коэффициенты 1-формы μ определены равенством (29), функция $K(x_1, \ldots, x_n)$ на F^n вычисляется по формуле (27).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакельман, И. Я. Введение в дифференциальную геометрию «в целом» / И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор. — М. : Наука, 1973. — 440 с.

ON HYPERSURFACES WITH CYCLIC RECURRENT THE SECOND FUNDAMENTAL FORM IN EUCLIDEAN SPACE

I.I. Bodrenko

In this article, author proved the following statement: any nondegenerate n-dimensional $(n \geq 2)$ hypersurface of the second order in $(n+1)$-dimensional Euclidean space has cyclic recurrent the second fundamental form.

Key words: *second fundamental form, connection of van der Waerden — Bortolotti.*