УДК 517.95
ББК 22.161.6

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ *

Е.А. Гульманова, А.А. Клячин, Е.А. Мазепа

В работе изучаются обобщенные решения (в смысле работы [1]) задачи Дирихле для стационарного уравнения Шредингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \tag{1}$$

где $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция на гладком связном некомпактном римановом многообразии M без края.

В данной статье введено понятие обобщенного решения задачи Дирихле на римановом многообразии, и сведено изучение вопроса о разрешимости задачи Дирихле к исследованию данного обобщенного решения.

Ключевые слова: *уравнение Шредингера, обобщенные решения задачи Дирихле, римановые многообразия.*

Введение

Проблема разрешимости краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений на римановых многообразиях с предписанным поведением решений на «бесконечности» является достаточно актуальной. В частности, особый интерес представляет собой постановка задачи Дирихле на некомпактных римановых многообразиях. Для исследования вопросов о разрешимости задачи Дирихле чрезвычайно существенным оказалось введенное Винером понятие обобщенного решения задачи Дирихле для гармонических функций в областях $\mathbb{R}^n$, получившее в нашей работе обобщение на случай некомпактных римановых многообразий. Кроме того, в данной работе использован подход к постановке краевых задач, основанный на введении класса $[f]$, эквивалентных на M непрерывных функций (см., напр., [3]–[5]).

Пусть M — гладкое связное некомпактное риманово многообразие без края, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-970004 р_Поволжье_а).

Определение 1. *Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные ограниченные на M функции. Будем говорить, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ эквивалентны на M, и использовать обозначения $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено равенство:*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|f_1(x) - f_2(x)\|_{C^0(M \ B_k)} = 0,$$

где $\|f(x)\|_{C^0(G)} = \sup\limits_{G} |f(x)|$.

Введенное определение корректно, поскольку не зависит от выбора исчерпания многообразия (см. [3]). Класс функций, эквивалентных функции f, будем обозначать $[f]$.

Определение 2. *Предположим, что f — непрерывная функция на M. Будем говорить, что для уравнения (1) на M разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$. Класс $[f]$ в этом случае будем называть допустимым для уравнения (1).*

Введем понятие обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения (1) на многообразии M.

Всюду в дальнейшем будем считать, что $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия с гладкими границами ∂B_k.

Рассмотрим последовательность решений задач Дирихле в B_k

$$\begin{cases} Lu_{k,f} = 0, \\ u_{k,f}|_{\partial B_k} = f|_{\partial B_k}. \end{cases} \tag{2}$$

Определение 3. *Пусть f — некоторая непрерывная на M функция. Если существует предел*

$$u_f = \lim_{k \longrightarrow \infty} u_{k,f},$$

в каждой точке $x \in M$, то функция u_f называется обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения (1) с граничными условиями из класса $[f]$.

Замечание. Данное определение обобщенного решения задачи Дирихле было впервые введено Винером (см. [1]) для эллиптических дифференциальных уравнений в областях $\mathbb{R}^n$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть f — некоторая непрерывная на M функция такая, что класс $[f]$ является допустимым для уравнения (1).*

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Последовательность решений $u_{1,f}, u_{2,f}, ..., u_{k,f}, ...$ задач (2) сходится равномерно на M к обобщенному решению u_f.*

2. *Предельная функция u_f не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}$ многообразия M.*

3. *Если u — решение краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями из класса $[f]$, то функция u совпадает с u_f.*

Необходимо пояснить, что означает равномерная сходимость последовательности решений $u_{k,f}$ задач (2) на многообразии M.

Определение 4. *Будем говорить, что последовательность решений $u_{k,f}$ задач (2) сходится равномерно на M, если $\forall\epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon)$: $\forall n > m > N\ \forall x \in B_N$ выполнено*

$$|u_{n,f}(x) - u_{m,f}(x)| < \epsilon.$$

1. Доказательство теоремы

Рассмотрим последовательность решений задач (2). Используя принцип максимума для любых $k \in N$, $x \in B_k$, имеем

$$|u_{k,f}(x)| \leq \sup_{\partial B_k} |u_{k,f}| \leq \sup_{M} |f|.$$

Отсюда следует равномерная ограниченность семейства функций $\{u_{k,f}\}_{k=1}^{\infty}$ на всем многообразии M и, следовательно, компактность в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на любом компактном подмножестве $G \subset M$ (см., напр., [2]).

Без ограничения общности можем считать, что $\overline{G} \subset B_k$ для всех $k \in N$. Тогда существует последовательность $u^1_{n,f}$, сходящаяся к некоторой функции u^1_f в B_1. Выберем из нее подпоследовательность функций $u^2_{n,f}$, сходящуюся в B_2 к некоторой функции u^2_f, при этом u^2_f будет совпадать с u^1_f в B_1. Аналогично для каждого $k \in N$ найдется подпоследовательность функций $u^k_{n,f}$, сходящаяся в B_k к некоторой функции u^k_f, причем $u^k_f = u^{k-1}_f$ во множестве B_{k-1}. Таким образом, продолжая процесс бесконечно, можно построить функцию

$$u_f = \begin{cases} u^1_f, \text{ в } B_1, \\ .... \\ u^k_f, \text{ в } B_k \backslash B_{k-1}, \\ .... \end{cases}.$$

Выберем теперь диагональную последовательность $u^1_{1,f}, u^2_{2,f}, ..., u^k_{k,f}, ...$. Ясно, что $u^k_{k,f}$ сходится к функции u_f в каждой точке $x \in M$.

Покажем равномерную сходимость последовательности решений $u_{k,f}$ задач (2) на всем многообразии M. Выберем произвольное $\epsilon > 0$. Используя принцип максимума, для достаточно больших $n, m \in N$, $n > m$ получаем

$$\sup_G |u_{n,f}(x) - u_{m,f}(x)| \leq \sup_{B_m} |u_{n,f}(x) - u_{m,f}(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{B_n} |u_{n,f} - u(x)| + \sup_{B_m} |u_{m,f}(x) - u(x)| < \epsilon.$$

Действительно, так как класс $[f]$ является допустимым для уравнения (1), то существует функция $u \in [f]$ такая, что $Lu \equiv 0$. Тогда, по принципу максимума, имеем

$$\sup_{B_n} |u_{n,f}(x) - u(x)| = \sup_{\partial B_n} |f - u| < \frac{\epsilon}{2},\ \sup_{B_m} |u_{m,f}(x) - u(x)| = \sup_{\partial B_m} |f - u| < \frac{\epsilon}{2}.$$

В силу равномерной сходимости последовательности $\{u_{k,f}\}_{k=1}^{\infty}$ на M существует функция $u_f = \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} u_{k,f}$, и, следовательно, u_f является обобщенным решением уравнения (1) на M (по определению).

Покажем, что предельная функция u_f не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ на M.

Предположим противное: пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ — два произвольных исчерпания многообразия M, $\{u_{k,f}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{u_{k,f}^*\}_{k=1}^{\infty}$ — соответствующие им последовательности решений задач (2), сходящиеся к различным предельным функциям u_f и u_f^*. Построим новое исчерпание $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M. Пусть $C_1 = B_1$. В качестве множества C_2 возьмем множество D_k, где k — наименьший номер, начиная с которого множество $\overline{B}_1 \subset D_k$. Множество C_3 будем искать в $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы $\overline{C}_2 \subset B_k$, где k — наименьший номер. Аналогично найдем все остальные множества C_k, $k = 4, 5, ...$, где $\overline{C_k} \subset C_{k+1}$, $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ для любого k. Тогда соответствующая последовательность решений задач (2) для нового исчерпания $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$: $u_{k_1,f}, u_{k_2,f}^*, ...$ является расходящейся, что противоречит доказанному выше утверждению. Следовательно, предельная функция u_f не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ на многообразии M.

Покажем, что построенное обобщенное решение u_f задачи Дирихле для уравнения (1) не зависит от выбора представителя из класса $[f]$.

Предположим противное, возьмем $f_1 \in [f]$, $f_2 \in [f]$, $f_1 \neq f_2$, тогда для них соответствующие задачи (2) во множестве B_k перепишутся в виде

$$\begin{cases} Lu_{k,f_1} = 0, \\ u_{k,f_1}|_{\partial B_k} = f_1|_{\partial B_k}, \end{cases}, \quad \begin{cases} Lu_{k,f_2} = 0, \\ u_{k,f_2}|_{\partial B_k} = f_2|_{\partial B_k}. \end{cases}$$

Согласно доказанному выше, на M существуют обобщенные решения u_{f_1} и u_{f_2}.

Тогда для любых $\epsilon > 0$, $x \in M$ имеем

$$0 \le |u_{f_1}(x) - u_{f_2}(x)| \le |u_{f_1}(x) - u_{k,f_1}(x)| + |u_{f_2}(x) - u_{k,f_2}(x)| + |u_{k,f_1}(x) - u_{k,f_2}(x)| < \epsilon,$$

для достаточно больших k.

Первые две оценки: $|u_{f_1}(x) - u_{k,f_1}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, $|u_{f_2}(x) - u_{k,f_2}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ имеют место в силу равномерной сходимости последовательностей функций $\{u_{k,f_1}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{u_{k,f_2}\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно к функциям u_{f_1} и u_{f_2}, доказанной выше.

Покажем, что $|u_{k,f_1}(x) - u_{k,f_2}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. Функция $u_{k,f_1} - u_{k,f_2}$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} L(u_{k,f_1} - u_{k,f_2}) = 0, \\ (u_{k,f_1} - u_{k,f_2})|_{\partial B_k} = (f_1 - f_2)|_{\partial B_k}. \end{cases}$$

Следовательно, для любого $x \in B_k$ выполнено

$$|u_{k,f_1}(x) - u_{k,f_2}(x)| \le \sup_{\partial B_k} |u_{k,f_1}(x) - u_{k,f_2}(x)| = \sup_{\partial B_k} |f_1 - f_2| < \frac{1}{3}\epsilon,$$

для достаточно больших k (так как $f_1 \in [f]$, $f_2 \in [f]$). В силу произвольности $\epsilon > 0$ следует $u_{f_1} \equiv u_{f_2}$. Таким образом, предельная функция u_f не зависит от выбора представителя из класса $[f]$.

Так как класс $[f]$ является допустимым для уравнения (1), то на M существует решение u краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями из класса $[f]$, то есть $Lu = 0$, $u \in [f]$. Покажем, что данное решение u совпадает с функцией u_f.

Действительно, так как $u \in [f]$, то в качестве граничного значения f для задач (2) в B_k выберем функцию u, то есть

$$\begin{cases} Lu_{k,f} = 0, \\ u_{k,f}|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k}. \end{cases}$$

Но, с другой стороны, u является решением уравнения (1) в B_k для любого k. Таким образом, имеем

$$Lu_{k,f} = Lu \text{ в } B_k,\ u_{k,f}|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k}.$$

Тогда, в силу теоремы единственности решения задачи Дирихле в области B_k, получаем $u_{k,f}(x) = u(x)$ для любого $x \in B_k$. По доказанному выше $u_f = \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} u_{k,f}(x)$, следовательно, $u_f(x) \equiv u(x)$ в каждой точке $x \in M$.

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш, М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле / М. В. Келдыш // Избр. тр. Математика. — 1941. — С. 171–231.

2. Лосев, А. Г. О неограниченных решениях стационарного уравнения Шредингера на модельных многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа, В. Ю. Чебаненко // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 7. — С. 46–56.

3. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43. — № 3. — С. 591–599.

4. Мазепа, Е. А. Краевые задачи и лиувиллевы теоремы для полулинейных эллиптических уравнений на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 3 (514). — С. 59–65.

5. Losev, A. G. Unbounded Solution of the Stationary Schrodinger Equation on Riemannian Manifolds / A. G. Losev, E. A. Mazepa, V. Y. Chebanenko // Computational Methods and Functional Theory. — 2002. — Vol. 3. — № 2. — P. 443–451.

GENERALIZED SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE STATIONARY SCHRODINGER EQUATION ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

E.A. Gulmanova, A.A. Klyachin, E.A. Mazepa

We study questions of existence of generalized solutions of the Dirichlet problem for the basic models of elliptical equations: the Laplace equation $\Delta u = 0$, and the stationary Schrodinger equations $Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0$, where $c(x)$ is a smooth non-negative function on a non-compact Riemannian manifolds M without boundary.

In this arcticle the concept of generalized solutions of the problem is specified and the investigation of guestions of existence Dirichlet problem is affoded to investigation this generalized solution.

Key words: *the stationary Schrodinger equation, the deneralized solution of Dirichlet problems, Riemannian manifolds.*