УДК 531.38
ББК 22.161.6

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РАЗДЕЛЕНИЮ ПЕРЕМЕННЫХ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ *

М.П. Харламов, А.Ю. Савушкин

Представлены аналитические результаты, полученные с помощью систем символьных вычислений в задаче о движении твердого тела в двойном силовом поле. Интегрируемый по Лиувиллю случай найден А.Г. Рейманом и М.А. Семеновым-Тян-Шанским при условиях типа Ковалевской. Рассматриваются геометрические основания для нахождения разделения переменных. Введены две системы плоских криволинейных координат, в которых проекции интегральных многообразий критических подсистем выпрямляются. Вывод уравнений в разделенных переменных получен для двух критических подсистем в программе Mathematica 7.

Ключевые слова: *интегрируемая система, динамика твердого тела, двойное силовое поле, разделение переменных.*

Введение

Развитие новых алгебраических методов в исследовании явления интегрируемости обеспечило новую волну интереса к точным решениям в динамике. Для гамильтоновых систем много новых случаев коммутативной и некоммутативной интегрируемости было построено или обнаружено в последние годы. Достаточно упомянуть здесь монографии и обзоры [4–7; 22], в которых цитируется более тысячи работ. Большинство известных систем, интегрируемых по Лиувиллю, сводится к системам с двумя степенями свободы, то есть фактически к системе двух уравнений с интегральным инвариантом (последним множителем). Наиболее ярким примером неприводимой системы является обобщенный гиростат Ковалевской. Это — твердое тело с ротором, закрепленное в одной точке и помещенное в два независимых поля с постоянной напряженностью (например, в гравитационное и магнитное при наличии у самого тела постоянного магнитного момента). Этот случай открыт благодаря усилиям многих математиков. Отметим вклад О.И. Богоявленского [2; 3; 25], Х.М. Яхья [32; 33], Л.Н. Гаврилова [26], И.В. Комарова [29]. Окончательный наиболее общий результат был получен А.Г. Рейманом и М.А. Семеновым-Тян-Шанским [8; 31]. Однако, как выяснилось, никаких явных решений построить в общем случае не удается. На сегодня единственным способом исследования этой системы оказался начатый в 2002 г. [18] цикл работ по обнаружению и изучению

---

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и Администрации Волгоградской области № 10-01-970001.

критических подсистем. В итоге это позволило построить для исходной задачи трехмерную бифуркационную диаграмму [13; 27] и приступить к трехмерной классификации критических точек с целью построения инвариантного описания фазовой топологии. С точки зрения явной интегрируемости критические подсистемы оказались по своей общности равными всей классической задаче Ковалевской и обнаружили все черты систем, в которых разделения переменных удается получить алгебраическим путем. В настоящей работе мы называем такие системы алгебраически разделимыми. Однако цель работы состоит в демонстрации геометрических методов построения разделения переменных вместе с преимуществами современных компьютерных систем символьных вычислений. Несмотря на наличие результатов по минимизации количества свободных параметров задачи, технические сложности настолько высоки, что практически выходят за рамки возможности счета «вручную».

Все представленные в настоящей работе выкладки выполнены в системе Mathematica 7 (Academic License # L3298-7174). При этом, конечно, ни одно сколь-нибудь серьезное вычисление не дается просто. Особенно аккуратно следует работать с радикалами и комплексными величинами. Каждый промежуточный результат необходимо анализировать, чтобы «подсказать» компьютеру дальнейшие подстановки или преобразования. Именно поэтому ниже подробно представлен каждый переход. В противном случае проверить предложенные расчеты было бы невозможно. В этом вопросе позиция авторов однозначна — любой результат, полученный аналитически, должен быть изложен в эффективно проверяемой форме.

1. Геометрический подход к разделению переменных

1.1. Геометрия разделенных переменных

Используемый термин «алгебраически разделимые системы» не является общепринятым. Широко используется понятие, для которого английским эквивалентом является «algebraic complete integrable system», где слово «алгебраический» относится к системе, а не к способу интегрирования. Такие системы связаны с якобианами и многообразиями Прима алгебраических кривых и возникают в механике при наличии представления Лакса и возможности явно указать связь фазовых переменных и координат на алгебраической кривой. Однако последняя возможность весьма редка и возникает лишь в том случае, когда род кривой невысок. Поэтому разделения переменных на алгебраических кривых крайне редко сопровождаются явными выражениями фазовых переменных через разделенные, что лишает права такие случаи называться решениями. Здесь предложен другой путь — идти от геометрии, искать такие проекции фазового пространства, при которых интегральные многообразия принимают наиболее простой вид. Если это удается (а общего способа это сделать не существует), то связь с исходными фазовыми переменными сохраняется изначально. Поясним постановку задачи. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений на подмногообразии $\mathcal{P}$ вещественного арифметического пространства

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P} \tag{1.1}$$

относительно набора фазовых переменных $\mathbf{x}$, допускающую разделение переменных вида

$$\frac{ds_i}{d\tau} = \sqrt{P_i(s_i; \mathbf{f})}. \tag{1.2}$$

Здесь s_i — вспомогательные переменные (вектор, составленный из вспомогательных переменных, обозначим через $\mathbf{s}$); функции $P_i(s;\mathbf{f})$ — многочлены от одной переменной s (с коэффициентами, зависящими от набора произвольных постоянных $\mathbf{f}$); τ — «приведенное время», связано с реальным временем t зависимостью $\dot{\tau} = \rho(\mathbf{s}) > 0$. В основном такие разделения переменных имеют механическое происхождение, в связи с чем уравнения (1.2) имеют структуру интеграла энергии. При этом предполагается, что все фазовые переменные x_j выражены через вспомогательные рациональными функциями от набора радикалов $R_{i\alpha} = \sqrt{s_i - e_\alpha}$ ($e_\alpha \in \mathbf{C}$) с коэффициентами, гладко зависящими от $\mathbf{s}$. В совокупность чисел $\{e_\alpha\}$, зависящих, конечно, от постоянных $\mathbf{f}$, включим и корни многочленов P_i. Как показывают классические примеры, именно корни P_i и исчерпывают обычно все множество $\{e_\alpha\}$.

Для системы (1.1) векторный параметр $\mathbf{f}$ является набором произвольных постоянных некоторой совокупности $\mathcal{F}$ первых интегралов. Зависимости

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{s};\mathbf{f}), \quad \mathbf{s} \in \mathrm{Acc}(\mathbf{f}) \tag{1.3}$$

представляют собой (многозначные) параметрические уравнения интегрального многообразия $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}) \subset \mathcal{P}$. Здесь $\mathrm{Acc}(\mathbf{f})$ — область в пространстве вспомогательных переменных, которая заполняется траекториями системы (1.2) при заданном $\mathbf{f}$. Ее традиционно называют [10; 15] термином «область возможности движения» (ОВД). В английских переводах предложен более короткий термин — достижимая область (accessible region), который вполне отражает суть дела и которым обусловлено обозначение области аргументов в (1.3).

Пусть (1.1) — гамильтонова вполне интегрируемая система с двумя степенями свободы, и

$$\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathbf{R}^2 \tag{1.4}$$

— ее интегральное отображение компактного характера. Две степени свободы выбраны для простоты изложения, а также потому, что в рассмотренных ниже примерах число степеней свободы не превосходит двух.

Определение 1. *Множество* $\mathrm{Im}\mathcal{F}$ *назовем допустимой областью (в пространстве констант первых интегралов). Соответственно, точка* $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^2$ *называется допустимой, если интегральное многообразие* $\mathcal{F}_\mathbf{f} \doteq \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}) \neq \emptyset$.

Разделение переменных — это, вообще говоря, некоторое отображение

$$\pi : \mathcal{P} \to \mathbf{R}^2_{(s_1,s_2)} \tag{1.5}$$

фазового пространства на плоскость вспомогательных переменных (s_1, s_2), которое переводит систему (1.1) в систему уравнений (1.2) с $i = 1, 2$. Ясно, что при фиксированном $\mathbf{f}$ мы имеем вполне определенное отображение

$$\pi_\mathbf{f} : \mathcal{F}_\mathbf{f} \to \mathbf{R}^2_{(s_1,s_2)}. \tag{1.6}$$

Определение 2. *Для заданного* $\mathbf{f}$ *назовем достижимой областью образ интегрального многообразия на плоскости вспомогательных переменных*

$$\mathrm{Acc}(\mathbf{f}) = \pi_\mathbf{f}(\mathcal{F}_\mathbf{f}).$$

Ясно, что $\mathrm{Acc}(\mathbf{f})$ есть подмножество в

$$\{(s_1, s_2) : P_i(s_i, \mathbf{f}) \geqslant 0, i = 1, 2\}, \tag{1.7}$$

причем это включение таково, что любая точка включается в $\mathrm{Acc}(\mathbf{f})$ только вместе со всей своей связной компонентой в множестве (1.7). Множество $\mathrm{Acc}(\mathbf{f})$ есть, следовательно, совокупность прямоугольников на плоскости (s_1, s_2) (допускаются и «бесконечные» прямоугольники — полуполосы и даже квадранты). Тот факт, что достижимая область для всех постоянных интегрирования есть прямоугольник (в указанном обобщенном смысле), очевидно, является *необходимым* условием разделения переменных. Вероятно, вооружившись определенными предположениями о нетривиальности проекции вида (1.6) или о существенной зависимости уравнений границ достижимой области от параметров $\mathbf{f}$ в терминах неравенства нулю некоторых якобианов, можно доказать и достаточность, но такая глобальная задача здесь не ставится. Нам необходимо понять, как можно построить разделение, и взять это понимание за основу при выборе направления поиска.

Заметим, что далеко не всегда разделение переменных имеет вид глобального отображения (1.5). Из классических интегрируемых задач динамики твердого тела разделение переменных в виде замены, не зависящей от постоянных интегрирования, известны, например, для случаев Эйлера (одна переменная, которую тоже можно назвать переменной разделения), Горячева — Чаплыгина (и обобщение на гиростат, данное Л.Н. Сретенским [9]), Клебша при нулевой постоянной площадей. Уже в случае Ковалевской [30] замена переменных строится путем, который существенно использует интегральные равенства. Однако, имея отображение (1.6) для *всех* $\mathbf{f}$, можно хотя бы формально подставить $\mathbf{f} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$ и получить некоторое отображение вида (1.5). Здесь важно отметить, что практически во всех важнейших задачах разделение переменных не строится напрямую в виде (1.5). Как правило, вначале находится некоторое промежуточное отображение $\mathcal{P} \to \mathbf{R}^2_{\boldsymbol{\xi}}$ фазового пространства на плоскость (для двух степеней свободы) некоторых вспомогательных переменных (назовем это картинной плоскостью, переменные обозначим ξ_1, ξ_2), после чего переменные разделения вводятся как функции от $\xi_1, \xi_2, \mathbf{f}$, причем не всегда явные, а определенные, например, некоторым уравнением.

В чем состоит геометрическая сущность такого способа действий? При отображении фазового пространства $\mathcal{P}$ на картинную плоскость образ интегрального многообразия $\mathcal{F}_{\mathbf{f}}$ есть область, ограниченная некоторыми кривыми. Если эти кривые удается включить в двухпараметрическое семейство кривых на плоскости $\mathbf{R}^2_{\boldsymbol{\xi}}$, которое может быть взято за координатную сеть, то в такой сети образ интегрального многообразия будет прямоугольником, и, значит, в новых координатах будет выполнено необходимое условие разделения переменных и есть надежда такое разделение построить, получив вывод соответствующих дифференциальных уравнений. При этом неважно, получена ли такая криволинейная координатная сеть единым образом, то есть независимо от постоянных первых интегралов, или, как в случае Ковалевской, эта сеть крайне сложным образом зависит от констант интегрирования (сеть Жуковского).

Изучая проекции $\mathcal{P}$ на картинную плоскость или, в более общем случае, на некоторое картинное многообразие, учтем и то обстоятельство, что на $\mathcal{P}$ может не существовать единой системы локальных координат. Так, в задачах динамики твердого тела $\mathcal{P} = TSO(3)$, где матричная группа естественным образом вложена в $\mathbf{R}^9$, и любая система трех локальных координат либо не покрывает $\mathcal{P}$, либо имеет неустранимые особенности (как, например, углы Эйлера и их модификации). Таким образом, мы рассматриваем $\mathcal{P}$ как подмногообразие в некотором вещественном векторном пространстве

V достаточно большой размерности, заданное как поверхность уровня некоторого гладкого регулярного отображения Γ пространства V в вещественное арифметическое пространство размерности $\dim V - \dim \mathcal{P}$. В динамике твердого тела компоненты такого отображения называют геометрическими интегралами (тождества с направляющими косинусами), а в теории уравнений Эйлера на алгебрах Ли эту роль выполняют функции Казимира.

Объединив $\mathcal{F}$ с Γ, получим задание интегрального многообразия как поверхности уровня некоторого нового, расширенного, интегрального отображения

$$\mathcal{G} : V \to Z,$$

где V, Z — арифметические пространства:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{f}} \equiv \mathcal{G}_{\mathbf{z}} \doteq \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{z}), \qquad \mathbf{z} \in Z.$$

Подходящим выбором глобальных систем координат можно представить $V = X \times Y$, где X — картинная плоскость, и заменить проекцию на $\boldsymbol{\xi}$-плоскость проекцией на первый сомножитель

$$p_X : X \times Y \to X.$$

Эта конструкция легко обобщается на случай, когда X, Y, Z — произвольные гладкие многообразия. Так, например, в осесимметричных задачах динамики твердого тела роль многообразия X часто играет так называемая сфера Пуассона S^2.

При таком подходе имеем вместо $\mathrm{Acc}(\mathbf{f})$ такую же область

$$\mathrm{Acc}(\mathbf{z}) = \mathrm{Im} p_X|_{\mathcal{G}_{\mathbf{z}}} = p_X(\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{z})).$$

Для построения подходящих сетей криволинейных координат на картинной плоскости нам необходимо исследовать границы достижимых областей, но не только топологические границы, а то, что в геометрии и теории волновых фронтов принято называть видимым контуром.

Определение 3 ([15]). *Назовем обобщенной границей достижимой области $\mathcal{G}_{\mathbf{z}}$ множество критических значений отображения*

$$p_X|_{\mathcal{G}_{\mathbf{z}}} : \mathcal{G}_{\mathbf{z}} \to X.$$

Избежать зачастую невозможного построения явных решений уравнения $\mathcal{G} = \mathbf{z}$ при исследовании обобщенных границ позволяет следующий результат [15].

Предложение 1. *Пусть $\mathbf{v} \in V$. Обозначим через $L(\mathbf{v})$ ограничение оператора*

$$T_{\mathbf{v}}\mathcal{G} : X \times Y \to Z$$

на подпространство Y. Образ точки $\mathbf{v} \in \mathcal{G}_{\mathbf{z}}$ принадлежит обобщенной границе достижимой области $\mathrm{Acc}(\mathbf{z})$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank} L(\mathbf{v}) < \dim Z$.

Естественно, что все приведенные рассуждения имеет смысл применять лишь в случае, когда $\dim \mathcal{G}_{\mathbf{z}} \geqslant \dim X$, что равносильно неравенству $\dim Y \geqslant \dim Z$. В глобальных координатах на V, Z условие на ранги легко выписывается в терминах ранга соответствующей матрицы Якоби.

1.2. Интегрируемые задачи динамики твердого тела в двойном поле

Мы применим изложенные выше соображения к системе уравнений, описывающих вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в линейном потенциальном поле

$$\mathbf{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}_2 \times \boldsymbol{\beta}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1.8}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — фазовые переменные. Постоянные векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbf{R}^3$ и диагональная матрица $\mathbf{I}$ служат физическими параметрами. Геометрические интегралы формируют соответствующее отображение $\Gamma : \mathbf{R}^9 \to \mathbf{R}^3$ are $\boldsymbol{\alpha}^2, \boldsymbol{\beta}^2, \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$. Это — функции Казимира для скобок Пуассона на $\mathbf{R}^9$, которые превращают уравнения (1.8) в гамильтонову систему [25]. Если векторы интенсивности силовых полей $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ линейно независимы, то совместный уровень геометрических интегралов есть гладкое шестимерное многообразие $\mathcal{P}$, снабженное симплектической структурой.

Положим $\mathbf{I} = \mathrm{diag}\{2, 2, 1\}$, $\mathbf{r}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (0, 1, 0)$. Тогда уравнения (1.8) описывают движение волчка Ковалевской в двойном силовом поле. Первый частный (то есть с ограничениями на фазовые переменные) случай интегрируемости найден в [2; 3; 25]. В особом случае Яхья [32] (с ограничением на силовые поля $|\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}|, \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$) система имеет группу симметрий и приводится к семейству интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Полная интегрируемость задачи в целом установлена в работах [8; 31]. Более детальное изложение для случая гиростата представлено в [24].

Определение 4. *Пусть $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^3$. Постоянные*

$$p = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2} \geqslant 0, \qquad r = \sqrt[4]{(\boldsymbol{\alpha}^2 - \boldsymbol{\beta}^2)^2 + 4(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \geqslant 0 \tag{1.9}$$

назовем инвариантами пары $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

Очевидно, $p \geqslant r$ и $p = r$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = 0$. Это — классический случай Ковалевской. При $r = 0$ имеем приводимый случай Яхья.

Пусть $\theta \in \mathbf{R}$. Обозначим

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\Theta} = \left(\begin{array}{c|c} \Theta & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right). \tag{1.10}$$

Предложение 2 ([16])**.** *Линейный изоморфизм $\mathbf{R}^9$*

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}' \\ \boldsymbol{\beta}' \end{pmatrix} = \Theta \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \widetilde{\Theta}^{\top}, \qquad \boldsymbol{\omega}' = \widetilde{\Theta}\, \boldsymbol{\omega}. \tag{1.11}$$

сохраняет уравнения (1.8). *Его орбита в пространстве $\mathbf{R}^6 = \{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\}$ состоит из всех пар, имеющих одни и те же инварианты. Любая такая орбита содержит ортогональную пару.*

Отсюда следует, что без ограничения общности можно считать, что фазовое пространство неприводимой системы $\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^9$ задано уравнениями

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = a^2, \qquad \boldsymbol{\beta}^2 = b^2, \qquad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \qquad (a > b > 0). \tag{1.12}$$

Утверждение сохраняется и для случая гиростата в аналогичном силовом поле [12].

Интегрирование обобщенной системы Ковалевской в целом не выполнено. Алгебраическое разделение переменных получено в следующих случаях:

- подсистема с одной степенью свободы, состоящая из трех семейств критических траекторий в первой критической подсистеме с двумя степенями свободы (сама система открыта О.И. Богоявленским в основополагающих работах [2; 3], интегрирование семейств критических траекторий выполнено в [19]);

- вторая критическая подсистема с двумя степенями свободы (найдена в [18], разделение переменных указано в [21; 28]);

- третья критическая подсистема с двумя степенями свободы (найдена в [16], разделение переменных (комплексное) указано в [17]).

Основная система уравнений в скалярной форме такова:

$$\begin{gathered}
2\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3 + \beta_3, \quad 2\dot{\omega}_2 = -\omega_1\omega_3 - \alpha_3, \quad \dot{\omega}_3 = \alpha_2 - \beta_1, \\
\dot{\alpha}_1 = \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, \quad \dot{\beta}_1 = \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2, \\
\dot{\alpha}_2 = \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_3, \quad \dot{\beta}_2 = \beta_3\omega_1 - \beta_1\omega_3, \\
\dot{\alpha}_3 = \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, \quad \dot{\beta}_3 = \beta_1\omega_2 - \beta_2\omega_1.
\end{gathered} \tag{1.13}$$

Ее первые интегралы в инволюции [2; 31]:

$$\begin{aligned}
& H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - (\alpha_1 + \beta_2), \\
& K = (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2, \\
& G = (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\omega_3)^2 + (\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \frac{1}{2}\beta_3\omega_3)^2 + \\
& \qquad + \omega_3(\gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_3) - \alpha_1 b^2 - \beta_2 a^2.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь γ_i — компоненты вектора $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$. Обозначим соответствующие постоянные через h, k, g.

Для компактной записи уравнений критических подсистем используем комплексную замену переменных [16], обобщающую замену С.В. Ковалевской и подсказанную представлением Лакса [31]:

$$\begin{aligned}
& x_1 = (\alpha_1 - \beta_2) + \mathrm{i}(\alpha_2 + \beta_1), \quad x_2 = (\alpha_1 - \beta_2) - \mathrm{i}(\alpha_2 + \beta_1), \\
& y_1 = (\alpha_1 + \beta_2) + \mathrm{i}(\alpha_2 - \beta_1), \quad y_2 = (\alpha_1 + \beta_2) - \mathrm{i}(\alpha_2 - \beta_1), \\
& z_1 = \alpha_3 + \mathrm{i}\beta_3, \quad z_2 = \alpha_3 - \mathrm{i}\beta_3, \\
& w_1 = \omega_1 + \mathrm{i}\omega_2, \quad w_2 = \omega_1 - \mathrm{i}\omega_2, \quad w_3 = \omega_3,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где $\mathrm{i}^2 = -1$. Первые интегралы преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
& H = \frac{1}{2}w_3^2 + w_1 w_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \\
& K = (w_1^2 + x_1)(w_2^2 + x_2), \\
& G = \frac{1}{4}(p^2 - x_1 x_2)w_3^2 + \frac{1}{2}(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2)w_3 + \\
& \qquad + \frac{1}{4}(x_2 w_1 + y_1 w_2)(y_2 w_1 + x_1 w_2) - \frac{1}{4}p^2(y_1 + y_2) + \frac{1}{4}r^2(x_1 + x_2).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Здесь, в соответствии с (1.9), (1.12),

$$p^2 = a^2 + b^2, \qquad r^2 = a^2 - b^2. \tag{1.17}$$

Уравнения (1.12) примут вид

$$z_1^2 + x_1y_2 = r^2, \quad z_2^2 + x_2y_1 = r^2, \tag{1.18}$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2 = 2p^2. \tag{1.19}$$

Первая критическая подсистема $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{P}$ задана соотношениями

$$w_1^2 + x_1 = 0, \qquad w_2^2 + x_2 = 0.$$

На $\mathcal{M}_1$

$$k = 0, \tag{1.20}$$

а в качестве независимого интеграла в дополнение к H принимается интеграл Богоявленского

$$F = w_1w_2w_3 + z_2w_1 + z_1w_2.$$

Вторая критическая подсистема $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{P}$ определена уравнениями

$$x_1x_2w_3 - (x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2) = 0, \qquad \frac{x_2}{x_1}(w_1^2 + x_1) - \frac{x_1}{x_2}(w_2^2 + x_2) = 0. \tag{1.21}$$

На $\mathcal{M}_2$ в качестве пары независимых интегралов принимается

$$M = \frac{1}{2r^2}\Big[\frac{x_2}{x_1}(w_1^2 + x_1) + \frac{x_1}{x_2}(w_2^2 + x_2)\Big], \qquad L = \frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}\big(w_1w_2 + x_1x_2 + z_1z_2M\big). \tag{1.22}$$

Постоянные общих интегралов (1.16) удовлетворяют соотношению

$$(p^2h - 2g^2)^2 - r^4k = 0. \tag{1.23}$$

Третья критическая подсистема $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{P}$ задана уравнениями

$$\begin{gathered}
\frac{w_2x_1 + w_1y_2 + w_3z_1}{w_1} - \frac{w_1x_2 + w_2y_1 + w_3z_2}{w_2} = 0,\\
(w_2z_1 + w_1z_2)w_3^2 + \Big[\frac{w_2z_1^2}{w_1} + \frac{w_1z_2^2}{w_2} + w_1w_2(y_1 + y_2) + \\
+ x_1w_2^2 + x_2w_1^2\Big]w_3 + \frac{w_2^2x_1z_1}{w_1} + \frac{w_1^2x_2z_2}{w_2} + \\
+ x_1z_2w_2 + x_2z_1w_1 + (w_1z_2 - w_2z_1)(y_1 - y_2) = 0.
\end{gathered} \tag{1.24}$$

Здесь в качестве независимых интегралов выступают функции

$$\begin{aligned}
&S = -\frac{1}{4}\Big(\frac{y_2w_1 + x_1w_2 + z_1w_3}{w_1} + \frac{x_2w_1 + y_1w_2 + z_2w_3}{w_2}\Big),\\
&T = \frac{1}{2}[w_1(x_2w_1 + y_1w_2 + z_2w_3) + w_2(y_2w_1 + x_1w_2 + z_1w_3)] + \\
&+ x_1x_2 + z_1z_2,
\end{aligned} \tag{1.25}$$

а постоянные интегралов (1.16) на многообразии $\{S = s, T = \tau\}$ удовлетворяют уравнениям

$$h = \frac{p^2 - \tau}{2s} + s, \quad k = \frac{\tau^2 - 2p^2\tau + r^4}{4s^2} + \tau, \quad g = \frac{p^4 - r^4}{4s} + \frac{1}{2}(p^2 - \tau)s. \tag{1.26}$$

При стремлении b к нулю критические подсистемы переходят в знаменитые классы Аппельрота *особо замечательных движений* волчка Ковалевской [1]. С точки зрения фазовой топологии интегрируемой гамильтоновой системы эти подсистемы формируют множество критических точек отображения момента, а уравнения (1.20), (1.23), (1.26) описывают бифуркационную диаграмму [16].

2. Две системы криволинейных координат

Рассматривая вопрос о решении задач механики, К. Якоби писал [23]:

«Главная трудность при интегрировании дифференциальных уравнений состоит в введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого общего правила. Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена».

Следуя этому указанию, введем две системы криволинейных координат на плоскости, полезные для решения ряда новых задач.

2.1. Система s_1, s_2

Рассмотрим два положительных числа $p > r > 0$. Введем на плоскости (x, z) два однопараметрических семейства окружностей

$$x^2 + z^2 + r^2 = 2s_1 x, \qquad x^2 + z^2 - r^2 = 2s_2 x. \tag{2.1}$$

За исключением точек самих координатных осей Ox, Oz эти семейства образуют сеть криволинейных координат (s_1, s_2) на плоскости (x, z). На рисунке 1 показаны: а) кривые $s_1 = \text{const}$ для $s_1 \geqslant r$; б) кривые $s_2 = \text{const}$ для некоторого интервала изменения, симметричного относительно нуля; в) совместная сеть (s_1, s_2), масштаб искажен для наглядности.

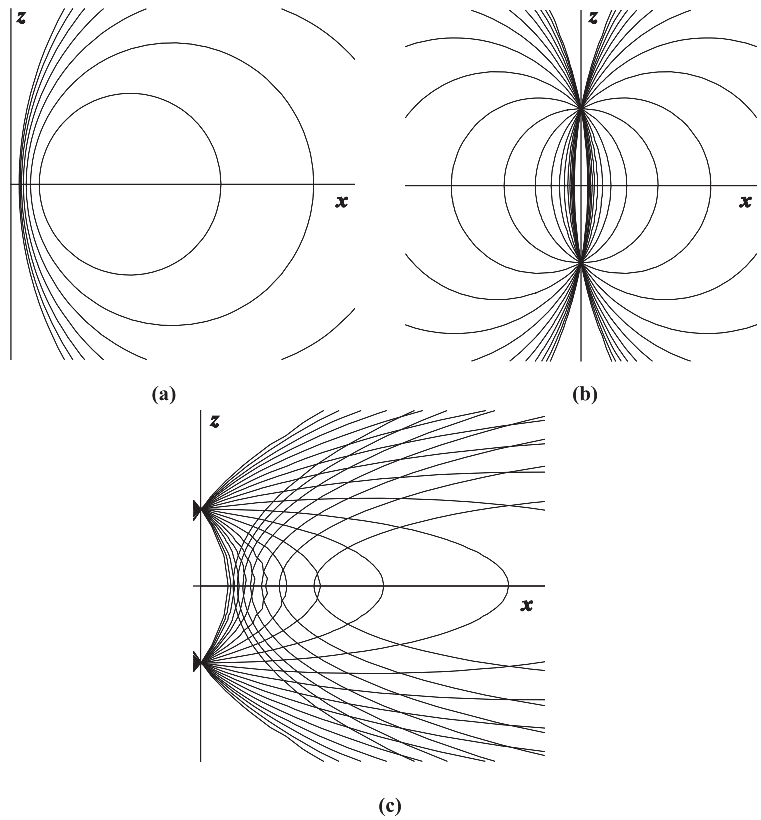

Рис. 1. Координатная сеть (s_1, s_2)

Для дифференциалов имеем

$$ds_1 = \frac{x^2 - z^2 - r^2}{2x^2}dx + \frac{z}{x}dz, \qquad ds_2 = \frac{x^2 - z^2 + r^2}{2x^2}dx + \frac{z}{x}dz. \tag{2.2}$$

Установим связь с конфигурационным пространством твердого тела (1.12) и найдем его образ на плоскости (s_1, s_2).

Выберем параметры p, r в соответствии с (1.17). Введем переменные x, y, z так, что

$$x^2 = x_1 x_2, \quad y^2 = y_1 y_2, \quad z^2 = z_1 z_2. \tag{2.3}$$

Тогда в силу (1.19) получим эллипсоид

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 2p^2.$$

Определим s_1, s_2 согласно (2.1). Из (1.19) выразим

$$y_1 y_2 = 2p^2 - x^2 - 2z^2 \tag{2.4}$$

и представим (1.18) в виде

$$\begin{array}{c} (z_1 + z_2)^2 = 2r^2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2z^2, \\ (z_1 - z_2)^2 = 2r^2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) - 2z^2. \end{array} \tag{2.5}$$

Исключая z_1, z_2 и произведение $y_1 y_2$ из (1.18), (1.19), (2.4), получим

$$r^2(x_1 y_2 + x_2 y_1) = r^4 + 2p^2 x^2 - (x^2 + z^2)^2. \tag{2.6}$$

Обозначим

$$\Phi_\pm(x, z) = (x^2 + z^2 \pm r^2)^2 - 2(p^2 \pm r^2)x^2.$$

Из (2.5), (2.6) найдем выражения

$$r^2(z_1 + z_2)^2 = \Phi_+(x, z), \quad r^2(z_1 - z_2)^2 = \Phi_-(x, z). \tag{2.7}$$

Следовательно, область изменения x, z определяется неравенствами

$$\Phi_+(x, z) \geqslant 0, \quad \Phi_-(x, z) \leqslant 0. \tag{2.8}$$

В соответствии с (2.1) положим

$$s_1 = \frac{x^2 + z^2 + r^2}{2x}, \quad s_2 = \frac{x^2 + z^2 - r^2}{2x}. \tag{2.9}$$

Условия (2.8) примут вид

$$s_1^2 \geqslant a^2, \quad s_2^2 \leqslant b^2. \tag{2.10}$$

Эта прямоугольная (в обобщенном смысле) область есть образ фазового пространства $\mathcal{P}$ при проекции $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \mapsto (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \mapsto (s_1, s_2)$. Образ $\mathcal{P}$ на плоскости (x, z) с соответствующей частью сети (s_1, s_2) показан на рисунке 2 для первого квадранта.

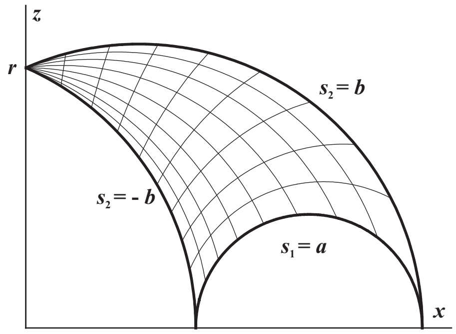

Рис. 2. Образ фазового пространства

2.2. Система t_1, t_2

Рассмотрим на плоскости (ξ, x) кривую 2-го порядка

$$\frac{\xi^2}{\sigma} + \frac{x^2}{\tau} = 1, \tag{2.11}$$

где τ, σ не являются одновременно отрицательными. Пусть (ξ, x) — произвольная точка области

$$\tau\xi^2 + \sigma x^2 > \tau\sigma. \tag{2.12}$$

Тогда из этой точки можно провести ровно две касательных к кривой (2.11). Иначе говоря, система касательных к кривой (2.11) образует в области (2.12) сеть прямых такую, что через каждую точку проходит ровно две различные прямые этого семейства (рис. 3). Этот факт в геометрии, конечно, хорошо известен.

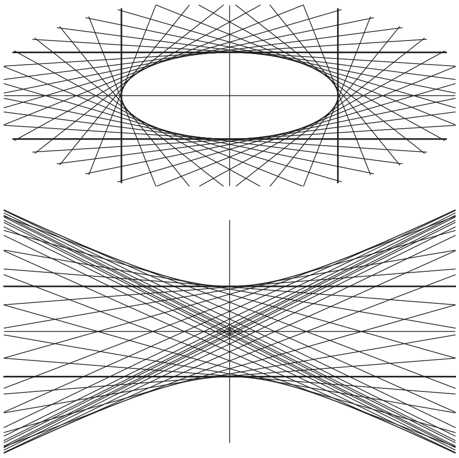

Рис. 3. Сеть касательных к кривой второго порядка

Для описания такой сети введем переменные t_1, t_2 как корни квадратного уравнения

$$t^2 - \frac{2\tau\xi}{\tau - x^2}t + \frac{\tau\xi^2 + \sigma x^2}{\tau - x^2} = 0. \tag{2.13}$$

Его дискриминант всегда положителен в области (2.12), и поэтому следующие выражения вещественны

$$t_1 = \frac{\tau\xi + \mu x}{\tau - x^2}, \quad t_2 = \frac{\tau\xi - \mu x}{\tau - x^2}, \tag{2.14}$$

где

$$\mu = \sqrt{\tau\xi^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma} \in \mathbf{R}.$$

Отметим связь двух введенных систем координат, которая будет полезна в дальнейшем. Пусть по-прежнему заданы параметры p, r, a, b (1.17). Положим в (2.11)

$$\sigma = \tau^2 - 2p^2\tau + r^4,$$

и пусть координаты ξ, x введены на плоскости (s_1, s_2) так, что

$$\xi = \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} r^2 - \tau, \quad x = \frac{r^2}{s_1 - s_2}. \tag{2.15}$$

По отношению к переменным (2.3) будем иметь

$$\xi = x^2 + z^2 - \tau. \tag{2.16}$$

Тогда граничные прямые области (2.9)

$$s_1 = \pm a, \quad s_2 = \pm b \tag{2.17}$$

окажутся и координатными линиями сети (t_1, t_2):

$$t_1 = -\tau \pm r^2, \quad t_2 = -\tau \mp r^2.$$

Соотношения для дифференциалов выпишем ниже для конкретной системы дифференциальных уравнений движения.

3. Пример геометрического разделения

Рассмотрим вторую критическую подсистему. Фиксируем константы первых интегралов (1.22):

$$M = m, \quad L = \ell. \tag{3.1}$$

Исключая из семи уравнений (1.21), (1.18), (1.19), (3.1) шесть величин — переменные w_1, w_2, w_3, y_1, y_2 и выражение $z_1 + z_2$, получим одно уравнение, содержащее переменные x_1, x_2 и произведение $z_1 z_2$:

$$\frac{1}{x_1 x_2}\Big[m(x_1 x_2 + z_1 z_2) + \sqrt{r^4 m^2 - r^2 m(x_1 + x_2) + x_1 x_2}\Big]^2 = \ell^2. \tag{3.2}$$

Положим $x_1 + x_2 = 2x\cos\phi$, получим

$$m(x^2 + z^2) + \sqrt{r^4 m^2 - 2r^2 m x \cos\phi + x^2} \pm \ell x = 0.$$

Согласно предложению 1 обобщенная граница проекции на плоскость (x, z) множества, заданного уравнением вида $f(x, z, \phi) = 0$ при отсутствии ограничений на ϕ, определяется уравнением $\partial f / \partial \phi = 0$, что в нашем случае сразу же дает $\sin\phi = 0$, и тогда на обобщенной границе

$$m(x^2 + z^2) + |r^2 m \pm x| \pm \ell x = 0,$$

то есть

$$x^2 + z^2 \pm r^2 \pm \frac{\ell \pm 1}{m} x = 0.$$

Для любой комбинации знаков эти кривые на плоскости (x, z) служат координатными линиями криволинейной сети (s_1, s_2), заданной формулами (2.1). Поэтому в плоскости (s_1, s_2) все интегральные многообразия (3.1) представляются прямоугольниками (возможно, неограниченными). Покажем, что этот факт действительно приводит к разделению переменных. Запишем уравнения (1.13) для переменных (1.15):

$$\begin{gathered} x_1' = -x_1w_3 + z_1w_1, \quad x_2' = x_2w_3 - z_2w_2, \\ y_1' = -y_1w_3 + z_2w_1, \quad y_2' = y_2w_3 - z_1w_2, \\ 2z_1' = x_1w_2 - y_2w_1, \quad 2z_2' = -x_2w_1 + y_1w_2, \\ 2w_1' = -w_1(w_3 - \lambda) - z_1, \quad 2w_2' = w_2(w_3 - \lambda) + z_2, \quad 2w_3' = y_2 - y_1, \end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по мнимому времени $\mathrm{i}t$. В силу этих уравнений

$$\begin{aligned} &(\frac{1}{x})' = \frac{1}{2(x_1x_2)^{3/2}}(x_1z_2w_2 - x_2z_1w_1), \\ &(\frac{x^2+z^2}{x})' = \frac{1}{2(x_1x_2)^{3/2}}[x_1z_1(z_2^2 + y_2x_1)w_2 - x_2z_2(z_1^2 + y_1x_2)w_1]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Поэтому, учитывая (3.1), из (2.2) находим

$$s_1' = \frac{r^2}{4x^2}(z_1 + z_2)\Big[\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}w_2 - \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}w_1\Big], \qquad s_2' = \frac{r^2}{4x^2}(z_1 - z_2)\Big[\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}w_2 + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}w_1\Big]. \tag{3.5}$$

Обозначим $R_1 = \sqrt{r^2m - x_1}$, $R_2 = \sqrt{r^2m - x_2}$. Тогда из (1.21) выразим

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}w_2 = R_1, \quad \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}w_1 = R_2. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.2) запишем в виде

$$m(x^2 + z^2) + R_1R_2 = \ell x. \tag{3.7}$$

Из определения R_1, R_2 имеем

$$R_1^2 + R_2^2 = 2r^2m - (x_1 + x_2), \qquad R_1^2R_2^2 = r^4m^2 - 2r^2m(x_1 + x_2) + x^2.$$

Поэтому из (3.7) получаем

$$\begin{aligned} &R_1R_2 = \ell x - m(x^2 + z^2), \\ &R_1^2 + R_2^2 = \frac{1}{r^2m}\{[\ell x - m(x^2 + z^2)]^2 - x^2\} + r^2m. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Используя выражения x, $x^2 + z^2$ через s_1, s_2, найдем

$$\begin{gathered} (R_1 \pm R_2)^2 = \frac{r^2}{m(s_1 - s_2)^2}\{(\ell^2 - 1) - 2\ell m[(s_1 + s_2) \mp \\ \mp (s_1 - s_2)] + 2m^2[(s_1^2 + s_2^2) \mp (s_1^2 - s_2^2)]\}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &\Psi(s_1, s_2) = 4ms_1s_2 - 2\ell(s_1 + s_2) + \frac{1}{m}(\ell^2 - 1), \\ &\Phi(s) = \Psi(s, s) = 4ms^2 - 4\ell s + \tfrac{1}{m}(\ell^2 - 1). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Тогда из (3.9) имеем

$$R_1 + R_2 = \frac{r}{s_1 - s_2}\sqrt{\Phi(s_2)}, \qquad R_1 - R_2 = \frac{r}{s_1 - s_2}\sqrt{\Phi(s_1)}. \tag{3.11}$$

Здесь и далее знаки радикалов никак не оговариваются, за исключением общего правила: будучи единожды выбраны при первом определении через них каких-либо переменных, далее эти знаки сохраняют те же значения и в последующих формулах (согласованность). С учетом этого, из (2.7) найдем выражения с двумя новыми радикалами

$$z_1 + z_2 = \frac{2r}{s_1 - s_2}\sqrt{s_1^2 - a^2}, \qquad z_1 - z_2 = \frac{2r}{s_1 - s_2}\sqrt{s_2^2 - b^2}. \tag{3.12}$$

Подставляя (3.6), (3.10), (3.12) в (3.5) и возвращаясь к производной по времени t, получим систему уравнений, описывающую изменение во времени переменных s_1, s_2:

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{s_1^2 - a^2}\sqrt{-\Phi(s_1)}, \qquad \frac{ds_2}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - s_2^2}\sqrt{\Phi(s_2)},$$

в которой переменные разделены. Эта система интегрируется в эллиптических функциях.

Для обоснования того, что разделение переменных действительно дает полное аналитическое решение задачи, необходимо выразить через переменные разделения s_1, s_2 все фазовые переменные. Величины z_1, z_2 однозначно определены из (3.12).

Переменные x_1, x_2 найдем из (3.8), (3.11) и определения (2.1). Из уравнений (1.18) найдем y_1, y_2, а w_1, w_2 определятся из (3.6). Наконец, переменная w_3 выразится из первого уравнения (1.21). В результате получаем зависимость от переменных разделения комплексных фазовых переменных:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{r^2}{2(s_1 - s_2)^2}[\Psi(s_1, s_2) + \sqrt{\Phi(s_1)\Phi(s_2)}],\\
x_2 &= -\frac{r^2}{2(s_1 - s_2)^2}[\Psi(s_1, s_2) - \sqrt{\Phi(s_1)\Phi(s_2)}],\\
y_1 &= 2\frac{(2s_1 s_2 - p^2) - 2\sqrt{(s_1^2 - a^2)(s_2^2 - b^2)}}{\Psi(s_1, s_2) - \sqrt{\Phi(s_1)\Phi(s_2)}},\\
y_2 &= 2\frac{(2s_1 s_2 - p^2) + 2\sqrt{(s_1^2 - a^2)(s_2^2 - b^2)}}{\Psi(s_1, s_2) + \sqrt{\Phi(s_1)\Phi(s_2)}},\\
z_1 &= \frac{r}{s_1 - s_2}(\sqrt{s_1^2 - a^2} + \sqrt{s_2^2 - b^2}),\\
z_2 &= \frac{r}{s_1 - s_2}(\sqrt{s_1^2 - a^2} - \sqrt{s_2^2 - b^2}),\\
w_1 &= r\frac{\sqrt{\Phi(s_2)} - \sqrt{\Phi(s_1)}}{\Psi(s_1, s_2) - \sqrt{\Phi(s_1)\Phi(s_2)}},\\
w_2 &= r\frac{\sqrt{\Phi(s_2)} + \sqrt{\Phi(s_1)}}{\Psi(s_1, s_2) + \sqrt{\Phi(s_1)\Phi(s_2)}},\\
w_3 &= \frac{1}{s_1 - s_2}[\sqrt{(s_2^2 - b^2)\Phi(s_1)} - \sqrt{(s_1^2 - a^2)\Phi(s_2)}].
\end{aligned}$$

Обозначим

$$S_1 = \sqrt{s_1^2 - a^2}, \quad \varphi_1 = \sqrt{-\Phi(s_1)}, \quad S_2 = \sqrt{b^2 - s_2^2}, \quad \varphi_2 = \sqrt{\Phi(s_2)}.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{1}{2(s_1-s_2)^2}[(s_1s_2-a^2)\Psi + S_1S_2\varphi_1\varphi_2],\\
&\alpha_2 = \frac{1}{2(s_1-s_2)^2}[(s_1s_2-a^2)\varphi_1\varphi_2 - S_1S_2\Psi],\\
&\beta_1 = -\frac{1}{2(s_1-s_2)^2}[(s_1s_2-b^2)\varphi_1\varphi_2 - S_1S_2\Psi],\\
&\beta_2 = \frac{1}{2(s_1-s_2)^2}[(s_1s_2-b^2)\Psi + S_1S_2\varphi_1\varphi_2],\\
&\alpha_3 = \frac{r}{s_1-s_2}S_1, \quad \beta_3 = \frac{r}{s_1-s_2}S_2,\\
&\omega_1 = \frac{r}{2(s_1-s_2)}(\ell - 2ms_1)\varphi_2, \quad \omega_2 = \frac{r}{2(s_1-s_2)}(\ell - 2ms_2)\varphi_1,\\
&\omega_3 = \frac{1}{s_1-s_2}(S_2\varphi_1 - S_1\varphi_2).
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Задача аналитически решена.

4. Разделение переменных в гиперэллиптической системе

4.1. Геометрия проекций интегрального многообразия

Рассматривается динамическая система, определенная уравнениями (1.13) на инвариантном почти всюду четырехмерном многообразии $\mathcal{M}_3$, заданном в пространстве $\mathbf{R}^9$ пятью конечными уравнениями (1.18), (1.19), (1.24). Это гамильтонова система с двумя степенями свободы почти всюду, за исключением множества точек меры нуль, в которых либо нарушается независимость уравнений (1.24), либо вырождается индуцированная симплектическая структура. Возможность разделения переменных была предсказана в [11], но потребовалось много усилий, чтобы получить с помощью САВ выражения хотя бы для комплексных переменных разделения [17]. Здесь на основе второй из введенных выше систем координат мы сразу получаем формулы в вещественной области.

Функции S, T, определенные согласно (1.25), образуют полную систему первых интегралов на $\mathcal{M}_3$. В частности, система уравнений интегрального многообразия

$$\{\zeta \in P^6 : H(\zeta) = h, K(\zeta) = k, G(\zeta) = g\}$$

с функциями (1.16) заменяется инвариантными соотношениями (1.24) и уравнениями

$$S = s, \; T = \tau. \tag{4.1}$$

В переменных (1.15) преобразуем систему (1.24), (4.1) к виду

$$
\begin{aligned}
&(y_2+2s)w_1 + x_1w_2 + z_1w_3 = 0,\\
&x_2w_1 + (y_1+2s)w_2 + z_2w_3 = 0,\\
&x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2 + (\tau - x_1x_2)w_3 = 0,\\
&2sw_1w_2 - (x_1x_2 + z_1z_2) + \tau = 0.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Используя для записи функций и уравнений переменные (1.15) и рассматривая соответствующую динамику, как описываемую уравнениями (3.3), отметим, что несмотря на комплексность переменных (1.15), их пространство девятимерно — пары $x_2 = \overline{x_1}$, $y_2 = \overline{y_1}$, $z_2 = \overline{z_1}$ комплексно сопряжены, w_3 вещественно. Семь соотношений (4.2), (1.18), (1.19) определяют в нем интегральное многообразие $\mathcal{F}_{s,\tau}$, которое в случае отсутствия на нем точек зависимости интегралов S, T будет состоять из двумерных торов с условно-периодическими траекториями.

Введем на плоскости (x, z) первую систему криволинейных координат (2.9). Неравенства (2.8) дают (2.10). Это — обещанное ранее обоснование неравенств (2.9). На этом этапе использованы только геометрические интегралы, то есть найденная область есть образ всего фазового пространства $\mathcal{P}$. Соответствующая область на плоскости (x, z) показана на рисунке 2 для первого квадранта. Указана также и координатная сеть (s_1, s_2).

Положения равновесия исключим как конечное множество точек $\mathcal{P}$. На остальных движениях $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ для почти всех моментов времени, и определитель трех первых уравнений (4.2) по w_i $(i = 1, 2, 3)$ тождественно равен нулю. Исключая из этого условия z_1^2, z_2^2 и произведение $y_1 y_2$, с помощью (1.18), (1.19), (2.4), получим

$$\begin{gathered}2s[(r^2x_1 - \tau y_1) + (r^2x_2 - \tau y_2)] = -r^2(x_1y_2 + x_2y_1) + \\ + 2[2s^2(\tau - x^2) + p^2(\tau + x^2) - \tau(x^2 + z^2)].\end{gathered} \tag{4.3}$$

С другой стороны, из (2.3), (2.4)

$$(r^2x_1 - \tau y_1)(r^2x_2 - \tau y_2) = r^4x^2 + \tau(2p^2 - x^2 - 2z^2) - r^2\tau(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{4.4}$$

Обозначим

$$\sigma = \tau^2 - 2p^2\tau + r^4, \quad \chi = \sqrt{k} \geqslant 0. \tag{4.5}$$

Из второго соотношения (1.26) следует тождество

$$4s^2\chi^2 = \sigma + 4s^2\tau.$$

Введем комплексно сопряженные переменные

$$\mu_1 = r^2x_1 - \tau y_1, \quad \mu_2 = r^2x_2 - \tau y_2 \tag{4.6}$$

и обозначим для сокращения записи

$$\xi = x^2 + z^2 - \tau. \tag{4.7}$$

Исключая из (4.3), (4.4) выражение $x_1y_2 + x_2y_1$ с помощью (2.6), получим систему

$$2s(\mu_1 + \mu_2) = \xi^2 - 4s^2(x^2 - \tau) - \sigma, \quad \mu_1\mu_2 = \tau\xi^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma. \tag{4.8}$$

Эти два уравнения от четырех переменных определяют интегральное многообразие $\mathcal{F}_{s,\tau}$ в пространстве (x, z, μ_1, μ_2) $(\mu_2 = \overline{\mu_1})$. Согласно предложению 1 на обобщенной границе его проекции на (x, z) якобиан системы по переменным μ_1, μ_2 равен нулю, или, с учетом (4.5),

$$(\xi - 2sx - 2s\chi)(\xi - 2sx + 2s\chi)(\xi + 2sx - 2s\chi)(\xi + 2sx + 2s\chi) = 0.$$

Сравнивая (4.7) с (2.16), вспомним, что граничные прямые для области (2.10) при замене (2.9) являются касательными к кривой второго порядка

$$\tau\xi^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma = 0. \tag{4.9}$$

Составим результант по ξ любого из уравнений прямых на плоскости (x, ξ)

$$\xi \pm 2sx \pm 2s\chi = 0 \tag{4.10}$$

и уравнения кривой (4.9). Получим $4s^2(\tau \pm \chi x)^2$. Следовательно, все прямые (4.10), ограничивающие вместе с прямыми (2.17) проекцию интегрального многообразия, представленную в переменных (x, ξ), также касаются кривой (4.9), а именно, при $x = \mp\tau/\chi$.

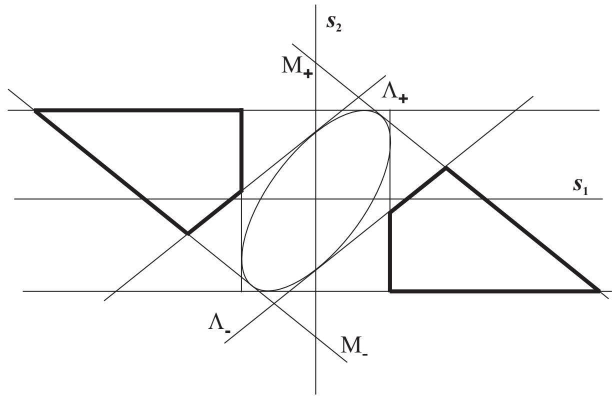

Рис. 4. Пример достижимой области ($a = 1;\ b = 0,4;\ \tau = 1,2;\ s = -0,6$)

Система неравенств (2.8), (4.11) задает на плоскости (x, z) достижимую область $\mathrm{Acc}(s, \tau)$. Изобразим эту область на плоскости переменных (s_1, s_2). Выберем $\lambda_1 = \sqrt{2s\mu_1 + \sigma}$ и $\lambda_2 = \sqrt{2s\mu_2 + \sigma}$ комплексно сопряженными. Тогда система (4.8) запишется в виде

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = \Xi_+(x, z), \quad (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \Xi_-(x, z),$$

где

$$\Xi_\pm(x, z) = (x^2 + z^2 - \tau \pm 2s\chi)^2 - 4s^2x^2.$$

Условия ее разрешимости

$$\Xi_+(x, z) \geqslant 0, \quad \Xi_-(x, z) \leqslant 0. \tag{4.11}$$

Выразим

$$\begin{gathered} x^2 + z^2 - \tau = [s_1 + s_2 - \frac{\tau}{r^2}(s_1 - s_2)]x, \\ \Xi_+(x, z) = x^2\Lambda_+\Lambda_-, \quad \Xi_-(x, z) = x^2\mathrm{M}_+\mathrm{M}_-, \end{gathered} \tag{4.12}$$

где

$$\Lambda_\pm(s_1, s_2) = s_1 + s_2 - \frac{\tau - 2s\chi}{r^2}(s_1 - s_2) \pm 2s,$$

$$\mathrm{M}_\pm(s_1, s_2) = s_1 + s_2 - \frac{\tau + 2s\chi}{r^2}(s_1 - s_2) \pm 2s.$$

Из (4.11), (4.12) имеем

$$\Lambda_+(s_1, s_2)\Lambda_-(s_1, s_2) \geqslant 0, \quad \mathrm{M}_+(s_1, s_2)\mathrm{M}_-(s_1, s_2) \leqslant 0. \tag{4.13}$$

Рассмотрим параллелограмм, образованный прямыми $\Lambda_\pm = 0$, $\mathrm{M}_\pm = 0$. Решения системы неравенств (4.13) заполняют две полуполосы, примыкающие к его сторонам, лежащим на прямых $\Lambda_\pm = 0$. Кроме того, решения неравенств (2.10) образуют две горизонтальные полуполосы, примыкающие к сторонам $s_2 = \pm b$ прямоугольника с вершинами $s_1 = \pm a$, $s_2 = \pm b$. Пересечение указанных множеств и дает достижимую область по переменным s_1, s_2. Пример такой области приведен на рисунке 4. И в этих переменных все граничные прямые являются касательными к кривой 2-го порядка — образу кривой (4.9) после замены (2.15).

Из представленной геометрии проекций интегральных многообразий на плоскости (x,z), (x,ξ), (s_1,s_2) следует вывод о возможности разделения переменных при использовании второй системы криволинейных координат, определенной равенствами (2.14), в котором все остальные обозначения имеют определенный здесь смысл.

4.2. Параметрические уравнения для фазовых переменных

На двумерном интегральном многообразии (4.1) фазовые переменные (1.15) могут быть выражены через две вспомогательные переменные. На первом этапе в качестве таких переменных удобно выбрать x,ξ. С учетом принятых обозначений из уравнений (4.8) получим

$$\begin{aligned}&(\mu_1-2s\tau)+(\mu_2-2s\tau)=\frac{\xi^2}{2s}-2s(x^2+\chi^2),\\&(\mu_1-2s\tau)(\mu_2-2s\tau)=4s^2\chi^2x^2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\mu_1=2s\tau+\frac{1}{8s}(\sqrt{\Psi_1}+\sqrt{\Psi_2})^2,\quad \mu_2=2s\tau+\frac{1}{8s}(\sqrt{\Psi_1}-\sqrt{\Psi_2})^2, \tag{4.14}$$

где обозначено

$$\Psi_1(x,\xi)=\xi^2-4s^2(x+\chi)^2,\quad \Psi_2(x,\xi)=\xi^2-4s^2(x-\chi)^2.$$

Считая величины μ_1,μ_2 известными функциями от x,ξ, рассмотрим два уравнения (4.6), определение $y^2=y_1y_2$ и уравнение

$$y_1y_2=2p^2-2(\xi+\tau)+x^2,$$

вытекающее из (2.4). Из полученной таким образом системы четырех уравнений с учетом (4.14) находим

$$\begin{aligned}&x_1=\frac{2s}{r^2}\frac{4r^4(x^2-\tau)+\tau(\sqrt{\Phi_1}+\sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau+(\sqrt{\Psi_1}-\sqrt{\Psi_2})^2},\\&x_2=\frac{2s}{r^2}\frac{4r^4(x^2-\tau)+\tau(\sqrt{\Phi_1}-\sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau+(\sqrt{\Psi_1}+\sqrt{\Psi_2})^2},\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}&y_1=2s\frac{4[2\tau\xi-\tau(x^2-\tau)+\sigma]-(\sqrt{\Phi_1}-\sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau+(\sqrt{\Psi_1}-\sqrt{\Psi_2})^2},\\&y_2=2s\frac{4[2\tau\xi-\tau(x^2-\tau)+\sigma]-(\sqrt{\Phi_1}+\sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau+(\sqrt{\Psi_1}+\sqrt{\Psi_2})^2},\end{aligned} \tag{4.16}$$

где

$$\Phi_1(x,\xi)=(\xi+\tau+r^2)^2-2(p^2+r^2)x^2,\quad \Phi_2(x,\xi)=(\xi+\tau-r^2)^2-2(p^2-r^2)x^2 \tag{4.17}$$

— многочлены, полученные из $\Phi_\pm$ при замене z на ξ согласно (4.7). В дальнейшем эта замена подразумевается. Из (2.5) сразу же находим

$$z_1=\frac{1}{2r}(\sqrt{\Phi_1}+\sqrt{\Phi_2}),\quad z_2=\frac{1}{2r}(\sqrt{\Phi_1}-\sqrt{\Phi_2}). \tag{4.18}$$

В результате получены выражения для конфигурационной группы переменных. Знаки радикалов в формулах (4.15), (4.16), (4.18) произвольны, но согласованы.

Для нахождения переменных w_i, отвечающих за компоненты угловой скорости, воспользуемся выражениями (1.16) для общих интегралов K, H и соотношениями (1.26), определяющими их постоянные через s, τ. С учетом обозначений (4.5) можем записать

$$K = (w_1^2 + x_1)(w_2^2 + x_2) = \chi^2, \tag{4.19}$$

$$H = \frac{1}{2}w_3^2 + w_1 w_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = s + \frac{p^2 - \tau}{2s}. \tag{4.20}$$

Из (4.19), (1.25) получаем систему

$$x_2 w_1^2 + x_1 w_2^2 = -\frac{1}{4s^2}[\xi^2 + 4s^2(\chi^2 + x^2)], \qquad w_1 w_2 = \frac{\xi}{2s},$$

откуда

$$w_1 = \frac{i}{4s\sqrt{x_2}}(\sqrt{\Theta_1} + \sqrt{\Theta_2}), \quad w_2 = \frac{i}{4s\sqrt{x_1}}(\sqrt{\Theta_1} - \sqrt{\Theta_2}). \tag{4.21}$$

Здесь

$$\Theta_1(x,\xi) = (\xi - 2sx)^2 - 4s^2\chi^2, \quad \Theta_2(x,\xi) = (\xi + 2sx)^2 - 4s^2\chi^2. \tag{4.22}$$

Подставляя (4.21), (4.16) в (4.20), находим

$$w_3^2 = \frac{1}{4s\mu^2}\big(P - \sqrt{\Phi_1\Phi_2\Psi_1\Psi_2}\big), \tag{4.23}$$

где

$$P = 4s^2(x^2 - \chi^2)[2(\tau - p^2)x^2 - \tau^2 + r^4] + 8s^2[(\tau - 2\chi^2)x^2 + \tau\chi^2]\xi -$$
$$- 2[(\tau - p^2 - 2s^2)x^2 + \tau(p^2 - 2s^2) - r^4]\xi^2 - 2\tau\xi^3 - \xi^4.$$

Обозначим

$$Q = (\xi + \tau + 2s^2 - p^2)^2 - 4s^2x^2 - (p^2 - 2s^2)^2 + r^4.$$

Имеем тождество $P^2 - \Phi_1\Phi_2\Psi_1\Psi_2 = 4x^2(\tau\xi^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma)Q^2$. Поэтому с учетом второго уравнения (4.8) из (4.23) получим

$$w_3 = \frac{1}{2\sqrt{2s}\mu}(\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}), \tag{4.24}$$

где

$$P_1 = P + 2x\mu Q, \quad P_2 = P - 2x\mu\delta, \qquad \mu^2 = \mu_1\mu_2. \tag{4.25}$$

При этом, как следует из (4.8),

$$\mu^2 = \tau\xi^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma. \tag{4.26}$$

Таким образом, соотношения (4.15), (4.16), (4.18), (4.21), (4.24) дают искомые зависимости всех переменных (1.15) от двух переменных x, ξ, принятых в качестве промежуточных.

4.3. Замена переменных

Введем на плоскости (x, ξ) локальные координаты t_1, t_2 в соответствии с (2.14). Дискриминант соответствующего уравнения (2.13) теперь совпадает с введенной величиной μ^2 в (4.25) и неотрицателен, поэтому переменные t_1, t_2 вещественны. Разрешая (4.26), (2.14) относительно x, ξ, μ, получим

$$x = \frac{\sqrt{\tau}(U_1+U_2)}{t_1+t_2}, \quad \xi = \frac{t_1t_2+\sigma-U_1U_2}{t_1+t_2}, \quad \mu = \frac{\sqrt{\tau}(t_2U_1-t_1U_2)}{t_1+t_2}, \tag{4.27}$$

где для сокращения записи обозначено

$$U_1 = \sqrt{t_1^2-\sigma}, \quad U_2 = \sqrt{t_2^2-\sigma}. \tag{4.28}$$

Сразу же отметим, что знаки этих радикалов произвольны, различные их сочетания обеспечивают все возможные тройки значений x, ξ, μ в (4.27), удовлетворяющие системе (4.26), (2.14) при заданных значениях t_1, t_2. Далее знаки вводимых радикалов уже не оговариваем в соответствии со сделанным ранее замечанием о согласованности с первоначальным выбором.

Отметим непосредственно проверяемые соотношения

$$x\mu = \frac{t_1-t_2}{t_1+t_2}\tau\xi, \tag{4.29}$$

$$\frac{(t_1t_2+\sigma+U_1U_2)(t_1t_2+\sigma-U_1U_2)}{(t_1+t_2)^2} = \sigma, \tag{4.30}$$

$$\frac{t_1t_2+\sigma-U_1U_2}{t_1t_2-\sigma-U_1U_2} = \frac{(U_1+U_2)^2}{(t_1-t_2)^2}, \tag{4.31}$$

позволяющие значительно упростить некоторые из последующих выкладок.

Вывод явных зависимостей фазовых переменных от t_1, t_2 начнем с выражения переменных μ_1, μ_2, определяющих знаменатели в (4.15), (4.16). Положим $\psi = 16s^2\tau+\Psi_1+\Psi_2$. Согласно (4.14) имеем

$$\mu_1 = \frac{1}{8s}(\psi - 2\sqrt{\Psi_1\Psi_2}), \qquad \mu_2 = \frac{1}{8s}(\psi + 2\sqrt{\Psi_1\Psi_2}).$$

Из определения переменных следует тождество $\psi^2 - 4\Psi_1\Psi_2 = 64s^2\mu^2$, и можно записать

$$2\sqrt{\Psi_1\Psi_2} = \sqrt{\psi+8s\mu}\sqrt{\psi-8s\mu}.$$

Поэтому

$$\mu_1 = \frac{1}{16s}(\sqrt{\psi+8s\mu} - \sqrt{\psi-8s\mu})^2, \quad \mu_2 = \frac{1}{16s}(\sqrt{\psi+8s\mu} + \sqrt{\psi-8s\mu})^2.$$

В подстановке (4.27) находим

$$\psi + 8s\mu = \frac{4R^2\varphi_1^2\varphi_2^2}{(t_1+t_2)^2}, \qquad \psi - 8s\mu = \frac{4R^2\psi_1^2\psi_2^2}{(t_1+t_2)^2},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sqrt{2s\sqrt{\tau}+U_1}, \quad \varphi_2 = \sqrt{2s\sqrt{\tau}+U_2}, \\ \psi_1 &= \sqrt{2s\sqrt{\tau}-U_1}, \quad \psi_2 = \sqrt{2s\sqrt{\tau}-U_2}. \end{aligned}$$

Заметим, что последние обозначения являются промежуточными, знаки этих радикалов на окончательные выражения фазовых переменных не влияют, а существенным является новое обозначение алгебраического значения корня

$$R = \sqrt{t_1t_2+\sigma+U_1U_2}. \tag{4.32}$$

Теперь выражения для μ_1, μ_2 примут вид

$$\mu_1 = \frac{R^2(\varphi_1\varphi_2 - \psi_1\psi_2)^2}{4s(t_1+t_2)^2}, \qquad \mu_2 = \frac{R^2(\varphi_1\varphi_2 + \psi_1\psi_2)^2}{4s(t_1+t_2)^2}. \tag{4.33}$$

Полученные формулы перепишем и в более развернутой форме, не использующей «двойных корней»:

$$\mu_1 = \frac{R^2(4s^2\tau + U_1U_2 - V_1V_2)}{2s(t_1+t_2)^2}, \qquad \mu_2 = \frac{R^2(4s^2\tau + U_1U_2 + V_1V_2)}{2s(t_1+t_2)^2}. \tag{4.34}$$

Здесь введены обозначения алгебраических радикалов

$$V_1 = \sqrt{4s^2\chi^2 - t_1^2}, \quad V_2 = \sqrt{4s^2\chi^2 - t_2^2}. \tag{4.35}$$

Найдем переменные x_1, x_2. В дополнение к (4.28), (4.32), (4.35) обозначим

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{t_1+\tau+r^2}, \quad M_2 = \sqrt{t_2+\tau+r^2}, \\ N_1 &= \sqrt{t_1+\tau-r^2}, \quad N_2 = \sqrt{t_2+\tau-r^2}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Для многочленов (4.17) имеем

$$\Phi_1 = \frac{2R^2M_1^2M_2^2}{(t_1+t_2)^2}, \qquad \Phi_2 = \frac{2R^2N_1^2N_2^2}{(t_1+t_2)^2}. \tag{4.37}$$

Пусть $X = 4r^4(x^2-\tau) + \tau(\Phi_1+\Phi_2)$. Используя (4.37) и тождество (4.30), находим

$$X^2 - 4\tau^2\Phi_1\Phi_2 = \frac{16\tau^2r^4(t_1-t_2)^2R^4}{(t_1+t_2)^4}.$$

Следовательно, $2\tau\sqrt{\Phi_1\Phi_2} = \sqrt{X_1X_2}$, где

$$\begin{aligned} X_1 &= X + \sqrt{X^2 - 4\tau^2\Phi_1\Phi_2} = \frac{4\tau R^2N_1^2M_2^2}{(t_1+t_2)^2}, \\ X_2 &= X - \sqrt{X^2 - 4\tau^2\Phi_1\Phi_2} = \frac{4\tau R^2M_2^2N_1^2}{(t_1+t_2)^2}, \end{aligned}$$

и для числителей в выражениях (4.15) получим

$$4r^4(x^2-\tau) + \tau(\sqrt{\Phi_1} \pm \sqrt{\Phi_2})^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{X_1} \pm \sqrt{X_2})^2.$$

Поэтому из (4.14), (4.15), (4.33) будем иметь

$$x_1 = \frac{2s\tau}{r^2}\left(\frac{M_2N_1 + M_1N_2}{\varphi_1\varphi_2 + \psi_1\psi_2}\right)^2, \qquad x_2 = \frac{2s\tau}{r^2}\left(\frac{M_2N_1 - M_1N_2}{\varphi_1\varphi_2 - \psi_1\psi_2}\right)^2, \tag{4.38}$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2s\tau}{r^2}\frac{(t_1+\tau)(t_2+\tau) - r^4 + M_1N_1M_2N_2}{4s^2\tau + U_1U_2 + V_1V_2}, \\ x_2 &= \frac{2s\tau}{r^2}\frac{(t_1+\tau)(t_2+\tau) - r^4 - M_1N_1M_2N_2}{4s^2\tau + U_1U_2 - V_1V_2}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Выражения переменных y_1, y_2 через t_1, t_2 можно получить из (4.16), но в данном случае удобнее воспользоваться определением (4.6) переменных μ_1, μ_2 и записать

$$\tau y_1\mu_2 = r^2 x_1\mu_2 - \mu^2, \quad \tau y_2\mu_1 = r^2 x_2\mu_1 - \mu^2.$$

Отсюда в подстановке (4.34), (4.39), (4.27) сразу же получаем

$$\begin{aligned} y_1 &= 2s\frac{\tau(t_1+t_2-2p^2+2\tau) - U_1U_2 + M_1N_1M_2N_2}{4s^2\tau + U_1U_2 + V_1V_2}, \\ y_2 &= 2s\frac{\tau(t_1+t_2-2p^2+2\tau) - U_1U_2 - M_1N_1M_2N_2}{4s^2\tau + U_1U_2 - V_1V_2}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Выражения для z_1, z_2 находим из (4.17), (4.18):

$$z_1 = \frac{R}{\sqrt{2}\,r}\frac{M_1M_2+N_1N_2}{t_1+t_2}, \qquad z_2 = \frac{R}{\sqrt{2}\,r}\frac{M_1M_2-N_1N_2}{t_1+t_2}. \tag{4.41}$$

Выразим переменные, связанные с компонентами угловой скорости. Вначале найдем выражение для w_3. Используя тождество (4.30), представим полиномы P, Q в виде

$$P = \frac{4\xi^2}{(t_1+t_2)^2}\,\widetilde{P}, \quad Q = \frac{2\xi}{t_1+t_2}\,\widetilde{Q},$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{P} = &-(t_1^2-r^4)(t_2^2-r^4) + \tau[(2s^2-t_2)t_1^2 + (2s^2-t_1)t_2^2 - p^2(t_1^2+t_2^2) + \\ &+ r^4(t_1+t_2-4s^2+2p^2)] + 2\tau^2(2s^2-p^2)(t_1+t_2) + \\ &+ \tau^3(t_1+t_2+4s^2-2p^2) + \tau^4, \\ \widetilde{Q} = &\; t_1t_2 + (2s^2-p^2)(t_1+t_2) + r^4 + \tau(t_1+t_2+4s^2-2p^2) + \tau^2. \end{aligned}$$

С учетом обозначений (4.35), (4.36) для функций (4.25) получим

$$P_1 = \frac{4\xi^2}{(t_1+t_2)^2}M_1^2N_1^2V_2^2, \qquad P_2 = \frac{4\xi^2}{(t_1+t_2)^2}M_2^2N_2^2V_1^2.$$

Тогда из (4.24), используя тождество (4.29), найдем

$$w_3 = \frac{U_1-U_2}{\sqrt{2s\tau}}\frac{M_2N_2V_1 - M_1N_1V_2}{t_1^2-t_2^2} = \frac{1}{\sqrt{2s\tau}}\frac{M_2N_2V_1-M_1N_1V_2}{U_1+U_2}. \tag{4.42}$$

Для получения выражений переменных w_1, w_2 заметим, что формально в слагаемых числителя в выражении (4.42) можно расставить знаки как угодно, поскольку в формулах для x_i, y_i, z_i фигурирует лишь произведение V_1V_2. Выбрав запись в виде (4.42) и желая применить формулы (4.21), мы должны указать правила, определяющие знаки радикалов $\sqrt{\Theta_1}, \sqrt{\Theta_2}$ так, чтобы получить все их комбинации, удовлетворяющие вместе с (4.42) системе трех линейных по w_i уравнений в составе уравнений (4.2). При этом, поскольку в силу однородности системы ее определитель должен равняться нулю (уравнение (4.3)), можно ограничиться проверкой двух из этих уравнений, например,

$$\begin{aligned} (y_2+2s)w_1 + x_1w_2 + z_1w_3 = 0, \\ x_2w_1 + (y_1+2s)w_2 + z_2w_3 = 0. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Из (4.38) запишем

$$\sqrt{x_1} = \frac{\sqrt{2s\tau}}{r}\frac{M_2N_1 + M_1N_2}{\varphi_1\varphi_2 + \psi_1\psi_2}, \qquad \sqrt{x_2} = \frac{\sqrt{2s\tau}}{r}\frac{M_2N_1 - M_1N_2}{\varphi_1\varphi_2 - \psi_1\psi_2}.$$

Здесь формальные знаки выражений выбраны так, чтобы выполнялось необходимое условие $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \equiv x$, где величина x определена согласно (4.27). Для многочленов Θ_1, Θ_2 уравнения (4.22) и (4.27) дают

$$(t_1 + t_2)^2\Theta_1 = -2R^2\varphi_1^2\psi_2^2, \qquad (t_1 + t_2)^2\Theta_2 = -2R^2\psi_1^2\varphi_2^2,$$

поэтому, вводя $\varepsilon_{1,2} = \pm 1$, запишем

$$(t_1 + t_2)\sqrt{\Theta_1} = \mathrm{i}\,\varepsilon_1\sqrt{2}R\varphi_1\psi_2, \qquad (t_1 + t_2)\sqrt{\Theta_2} = \mathrm{i}\,\varepsilon_2\sqrt{2}R\psi_1\varphi_2.$$

Тогда

$$w_1 = \frac{rR}{4s\sqrt{s\tau}}\frac{(\varepsilon_2\varphi_2^2 - \varepsilon_1\psi_2^2)V_1 + (\varepsilon_1\varphi_1^2 - \varepsilon_2\psi_1^2)V_2}{(t_1 + t_2)(M_1N_2 - M_2N_1)},$$
$$w_2 = \frac{rR}{4s\sqrt{s\tau}}\frac{(\varepsilon_2\varphi_2^2 - \varepsilon_1\psi_2^2)V_1 - (\varepsilon_1\varphi_1^2 - \varepsilon_2\psi_1^2)V_2}{(t_1 + t_2)(M_1N_2 + M_2N_1)}.$$

Выберем $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$. Получим выражения

$$w_1 = \pm\frac{rR}{\sqrt{s}(t_1 + t_2)}\frac{V_1 - V_2}{M_2N_1 - M_1N_2}, \qquad w_2 = \mp\frac{rR}{\sqrt{s}(t_1 + t_2)}\frac{V_1 + V_2}{M_2N_1 + M_1N_2},$$

не удовлетворяющие (4.43) ни при каком выборе знаков. Для $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ из двух вариантов $\varepsilon = \pm 1$ с (4.42), (4.43) оказывается совместным только один

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{r(U_1V_2 + U_2V_1)R}{2s\sqrt{s\tau}(t_1 + t_2)(M_2N_1 - M_1N_2)}, \\ w_2 &= \frac{r(U_1V_2 - U_2V_1)R}{2s\sqrt{s\tau}(t_1 + t_2)(M_2N_1 + M_1N_2)}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Для завершения построения алгебраических выражений заметим, что пока еще присутствует «двойной корень» R, который на самом деле можно извлечь. Вводя обозначение $\varkappa = \sqrt{\sigma}$ и не задаваясь здесь вопросом о вещественности этого числа, обозначим

$$K_1 = \sqrt{t_1 + \varkappa}, \quad K_2 = \sqrt{t_2 + \varkappa},$$
$$L_1 = \sqrt{t_1 - \varkappa}, \quad L_2 = \sqrt{t_2 - \varkappa}.$$

Тогда

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_1K_2 + L_1L_2), \qquad U_1 = K_1L_1, \qquad U_2 = K_2L_2.$$

Итак, формулы (4.39)–(4.42) и (4.44) в алгебраической форме определяют значения комплексных координат (1.15) для заданных t_1, t_2 с точностью до выбора знаков следующих радикалов

$$\sqrt{s\tau},\ K_1,\ K_2,\ L_1,\ L_2,\ V_1,\ V_2,\ M_1,\ M_2,\ N_1,\ N_2,$$

значения которых могут быть как вещественными, так и чисто мнимыми, а пары K_1, K_2 и L_1, L_2 могут быть даже комплексно сопряженными. Области изменения вспомогательных переменных определяются требованием вещественности переменных $\alpha_j, \beta_j, \omega_j$ $(j = 1, 2, 3)$ в (1.15).

4.4. Уравнения движения и вещественная форма решения

Для вывода дифференциальных уравнений, которым подчинены предполагаемые переменные разделения t_1, t_2, используем переменные s_1, s_2 в качестве промежуточных. Из (2.9), (4.7) имеем

$$s_1 = \frac{\xi + \tau + r^2}{2x}, \quad s_2 = \frac{\xi + \tau - r^2}{2x}. \tag{4.45}$$

Их производные в силу системы (3.3) получим из (3.4):

$$\frac{ds_1}{dt} = i\frac{r^2}{4x^3}(z_1 + z_2)(x_1 w_2 - x_2 w_1), \quad \frac{ds_2}{dt} = i\frac{r^2}{4x^3}(z_1 - z_2)(x_1 w_2 + x_2 w_1). \tag{4.46}$$

С другой стороны, запишем

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{\partial s_1}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dt} + \frac{\partial s_1}{\partial t_2}\frac{dt_2}{dt}, \quad \frac{ds_2}{dt} = \frac{\partial s_2}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dt} + \frac{\partial s_2}{\partial t_2}\frac{dt_2}{dt}. \tag{4.47}$$

В подстановке (4.27) из (4.45) найдем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial s_1}{\partial t_1} = -\frac{t_1 t_2 - \sigma + U_1 U_2}{2\sqrt{\tau}(t_1 - t_2)^2}\frac{M_2^2}{U_1}, \quad \frac{\partial s_1}{\partial t_2} = \frac{t_1 t_2 - \sigma + U_1 U_2}{2\sqrt{\tau}(t_1 - t_2)^2}\frac{M_1^2}{U_2}, \\
\frac{\partial s_2}{\partial t_1} = -\frac{t_1 t_2 - \sigma + U_1 U_2}{2\sqrt{\tau}(t_1 - t_2)^2}\frac{N_2^2}{U_1}, \quad \frac{\partial s_2}{\partial t_2} = \frac{t_1 t_2 - \sigma + U_1 U_2}{2\sqrt{\tau}(t_1 - t_2)^2}\frac{N_1^2}{U_2}.
\end{gathered} \tag{4.48}$$

Из (4.47), (4.48) находим

$$\begin{gathered}
\frac{dt_1}{dt} = \frac{\sqrt{\tau}(t_1 - t_2)U_1}{r^2(t_1 t_2 - \sigma + U_1 U_2)}(M_1^2\frac{ds_2}{dt} - N_1^2\frac{ds_1}{dt}), \\
\frac{dt_2}{dt} = \frac{\sqrt{\tau}(t_1 - t_2)U_2}{r^2(t_1 t_2 - \sigma + U_1 U_2)}(M_2^2\frac{ds_2}{dt} - N_2^2\frac{ds_1}{dt}).
\end{gathered} \tag{4.49}$$

Выразим через t_1, t_2 значения (4.46), используя (4.39), (4.41), (4.44). Получим

$$\begin{gathered}
\frac{ds_1}{dt} = \mathrm{i}\frac{(t_1 t_2 + \sigma + U_1 U_2)M_1 M_2(M_1 N_2 V_2 - M_2 N_1 V_1)}{2\sqrt{2s}\,\tau(U_1 - U_2)^2(t_1 - t_2)}, \\
\frac{ds_2}{dt} = \mathrm{i}\frac{(t_1 t_2 + \sigma + U_1 U_2)N_1 N_2(M_2 N_1 V_2 - M_1 N_2 V_1)}{2\sqrt{2s}\,\tau(U_1 - U_2)^2(t_1 - t_2)}.
\end{gathered}$$

Подставляя эти выражения в (4.49), учтем отмеченное ранее соотношение (4.31). После очевидных преобразований приходим к системе уравнений типа Ковалевской

$$\begin{gathered}
(t_1 - t_2)\frac{dt_1}{dt} = \sqrt{\frac{1}{2s\tau}(4s^2\chi^2 - t_1^2)(t_1^2 - \sigma)[r^4 - (t_1 + \tau)^2]}\,, \\
(t_1 - t_2)\frac{dt_2}{dt} = \sqrt{\frac{1}{2s\tau}(4s^2\chi^2 - t_2^2)(t_2^2 - \sigma)[r^4 - (t_2 + \tau)^2]}\,.
\end{gathered}$$

Наличие явных алгебраических выражений через переменные разделения всех исходных фазовых переменных доказывает тот факт, что эти уравнения действительно представляют собой разделение переменных и аналитически задача решена.

Обращая замену (1.15), из формул (4.39), (4.40), (4.41) найдем выражения для вещественных конфигурационных переменных α_j, β_j $(j = 1, 2, 3)$:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(\mathcal{A} - r^2 U_1 U_2)(4s^2\tau + U_1 U_2) - (\tau + r^2) M_1 N_1 M_2 N_2 V_1 V_2}{4r^2 s\, \tau (U_1 + U_2)^2}, \\
\alpha_2 &= \mathrm{i}\frac{(\mathcal{A} - r^2 U_1 U_2) V_1 V_2 - (4s^2\tau + U_1 U_2)(\tau + r^2) M_1 N_1 M_2 N_2}{4r^2 s\, \tau (U_1 + U_2)^2}, \\
\alpha_3 &= \frac{R}{r\sqrt{2}}\, \frac{M_1 M_2}{t_1 + t_2}, \\
\beta_1 &= \mathrm{i}\frac{(\mathcal{B} + r^2 U_1 U_2) V_1 V_2 - (4s^2\tau + U_1 U_2)(\tau - r^2) M_1 N_1 M_2 N_2}{4r^2 s\, \tau (U_1 + U_2)^2}, \\
\beta_2 &= -\frac{(\mathcal{B} + r^2 U_1 U_2)(4s^2\tau + U_1 U_2) - (\tau - r^2) M_1 N_1 M_2 N_2 V_1 V_2}{4r^2 s\, \tau (U_1 + U_2)^2}, \\
\beta_3 &= -\mathrm{i}\frac{R}{r\sqrt{2}}\, \frac{N_1 N_2}{t_1 + t_2}.
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= [(t_1 + \tau + r^2)(t_2 + \tau + r^2) - 2(p^2 + r^2) r^2]\tau, \\
\mathcal{B} &= [(t_1 + \tau - r^2)(t_2 + \tau - r^2) + 2(p^2 - r^2) r^2]\tau.
\end{aligned}
$$

Для угловых скоростей ω_j $(j = 1, 2, 3)$ из (1.15), (4.42), (4.44) найдем:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{R}{4rs\sqrt{s\,\tau}}\, \frac{M_2 N_1 U_1 V_2 + M_1 N_2 U_2 V_1}{t_1^2 - t_2^2}, \\
\omega_2 &= -\frac{\mathrm{i}\, R}{4rs\sqrt{s\,\tau}}\, \frac{M_2 N_1 U_2 V_1 + M_1 N_2 U_1 V_2}{t_1^2 - t_2^2}, \\
\omega_3 &= \frac{U_1 - U_2}{\sqrt{2s\tau}}\, \frac{M_2 N_2 V_1 - M_1 N_1 V_2}{t_1^2 - t_2^2}.
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

Полученные явные выражения фазовых переменных через переменные t_1, t_2 вместе с разделенными дифференциальными уравнениями дают полное аналитическое решение для третьей критической подсистемы.

Заключение

В работе представлены результаты, относящиеся к построению аналитических решений для обобщенного волчка Ковалевской. Вопросы качественного и топологического анализа возникающих интегрируемых подсистем связаны с исследованием многозначных зависимостей (3.13) и (4.50), (4.51). Формально они являются обращением накрытий фазовым пространством плоскости вспомогательных переменных кратности 2^n, где n — количество радикалов произвольного знака. Недавно были разработаны новые методы исследования фазовой топологии алгебраически разделимых систем [20], основанные на вычислении некоторых инвариантов $\mathbb{Z}_2$-линейных отображений булевых пространств.

До настоящего времени первая критическая подсистема (случай Богоявленского) так и не проинтегрирована, несмотря на наличие различных форм представлений Лакса [25; 31].

Для задачи о движении *гиростата* Ковалевской в двойном поле никаких аналитических решений не найдено, за исключением особых периодических решений и их бифуркаций, изученных в [14], притом что все критические подсистемы аналитически описаны в [12].

Случай Ковалевской в динамике твердого тела порождает все больше задач, несмотря на всю свою 120-летнюю историю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аппельрот, Г. Г. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы [Текст] / Г. Г. Аппельрот // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1940. — С. 61–156.

2. Богоявленский, О. И. Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле [Текст] / О. И. Богоявленский // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 275, № 6. — С. 1359–1363.

3. Богоявленский, О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики [Текст] / О. И. Богоявленский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — Т. 48, № 5. — С. 883–938.

4. Борисов, А. В. Динамика твердого тела [Текст] / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. — М. ; Ижевск : Изд-во RCD, 2001. — 384 с.

5. Борисов, А. В. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос [Текст] / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. — М. ; Ижевск : Изд-во RCD, 2005. — 575 с.

6. Борисов, А. В. Современные методы теории интегрируемых систем [Текст] / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. — М. ; Ижевск : Изд-во ИКИ, 2003. — 296 с.

7. Рейман, А. Г. Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход [Текст] / А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский. — М. ; Ижевск : Изд-во ИКИ, 2003. — 352 с.

8. Рейман, А. Г. Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений [Текст] / А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский // Функцион. анализ и его приложения. — 1988. — Т. 22, № 2. — С. 87–88.

9. Сретенский, Л. Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата [Текст] / Л. Н. Сретенский // Докл. АН СССР. — Т. 149, № 2. — 1963. — С. 292–294.

10. Татаринов, Я. В. К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметриями [Текст] / Я. В. Татаринов // Вестн. МГУ. Сер. мат. мех. — 1973. — Т. 5. — С. 70–77.

11. Харламов, М. П. Бифуркационная диаграмма обобщения 4-го класса Аппельрота [Текст] / М. П. Харламов // Механика твердого тела — 2005. — № 35. — С. 38–48.

12. Харламов, М. П. Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях [Текст] / М. П. Харламов // Нелинейная динамика. — 2007. — Т. 3, № 3. — С. 331–348.

13. Харламов, М. П. Области существования критических движений обобщенного волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы [Текст] / М. П. Харламов // Механика твердого тела. — 2006. — № 36. — С. 13–22.

14. Харламов, М. П. Особые периодические движения гиростата Ковалевской в двойном поле [Текст] / М. П. Харламов // Механика твердого тела. — 2007. — № 37. — С. 85–96.

15. Харламов, М. П. К исследованию областей возможности движения в механических системах [Текст] / М. П. Харламов // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 267, № 3. — С. 571–573.

16. Харламов, М. П. Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле [Текст] / М. П. Харламов // Механика твердого тела. — 2004. — № 34. — С. 47–58.

17. Харламов, М. П. Обобщение 4-го класса Аппельрота: область существования движений и разделение переменных [Текст] / М. П. Харламов // Нелинейная динамика. — 2006. — Т. 2, № 4. — С. 453–472.

18. Харламов, М. П. Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле [Текст] / М. П. Харламов // Механика твердого тела. — 2002. — № 32. — С. 32–38.

19. Харламов, М. П. Особые периодические решения обобщенного случая Делоне [Текст] / М. П. Харламов // Механика твердого тела. — 2006. — № 36. — С. 23–33.

20. Харламов М. П. Топологический анализ и булевы функции. I. Методы и приложения к классическим системам [Текст] / М. П. Харламов // Нелинейная динамика. — (В печати.)

21. Харламов, М. П. Явное интегрирование одной задачи о движении обобщенного волчка Ковалевской [Текст] / М. П. Харламов, А. Ю. Савушкин // Докл. РАН. — 2005. — Т. 401, № 3. — С. 321–323.

22. Цыганов, А. В. Интегрируемые системы в методе разделения переменных [Текст] / А. В. Цыганов. — М. ; Ижевск : Изд-во RCD, 2005. — 384 с.

23. Якоби, К. Лекции по динамике [Текст] / К. Якоби. — М. ; Л. : ОНТИ, 1936. — 272 с.

24. Bobenko, A. I. The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions [Text] / A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky // Commun. Math. Phys. — 1989. — V. 122. — № 2. — P. 321–354.

25. Bogoyavlensky, O. I. Euler equations on finite-dimension Lie algebras arising in physical problems [Text] / O. I. Bogoyavlensky // Commun. Math. Phys. — 1984. — V. 95. — P. 307–315.

26. Gavrilov, L. N. On the geometry of Gorjatchev-Tchaplygin top [Text] / L. N. Gavrilov // C.R. Acad. Bulg. Sci. — 1987. — V. 40. — P. 33–36.

27. Kharlamov, M. P. Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields [Text] / M. P. Kharlamov // Regular and Chaotic Dynamics. — 2005. — V. 10. — № 4. — P. 381–398.

28. Kharlamov, M. P. Explicit integration of one problem of motion of the generalized Kowalevski top [Text] / M. P. Kharlamov, A. Y. Savushkin // Mechanics Research Communications. — 2005. — № 32. — P. 547–552.

29. Komarov, I. V. A generalization of the Kovalevskaya top [Text] / I. V. Komarov // Phys. Letters. — 1987. — V. 123, № 1. — P. 14–15.

30. Kowalevski, S. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe [Text] / S. Kowalevski // Acta Mathematica. — 1889. — V. 2. — P. 177–232.

31. Reyman, A. G. Lax representation with a spectral parameter for the Kowalewski top and its generalizations [Text] / A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky // Lett. Math. Phys. — 1987. — V. 14. — № 1. — P. 55–61.

32. Yehia, H. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies [Text] / H. Yehia // Mech. Res. Commun. — 1986. — V. 13, № 3. — P. 169–172.

33. Yehia, H. On certain integrable motions of a rigid body acted upon by gravity and magnetic fields [Text] / H. Yehia // Int. J. of Non-Linear Mech. — 2001. — V. 36, № 7. — P. 1173–1175.

GEOMETRICAL APPROACH TO THE SEPARATION OF VARIABLES IN MECHANICAL SYSTEMS

M.P. Kharlamov, A.Yu. Savushkin

The article presents the analytical results received with the help of computer aided symbolic calculations in the problem of motion of the rigid body in two constant fields. The Liouville integrability of this system under certain condition of the Kowalevski type was established by A.G. Reyman and M.A. Semenov-Tian-Shansky. We consider the geometrical basis for obtaining a separation of variables. Two systems of local planar coordinates are introduced in which the projections of integral manifolds of the critical subsystems become rectangular. The separated equations are obtained for two subsystems with the help of Mathematica 7.

Key words: *integrable system, rigid body dynamics, double force field, separation of variables.*