УДК 517.95
ББК 22.161.6

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ [1]

Е.А. Мазепа

В работе исследуется асимптотическое поведение решений полулинейных уравнений на некомпактных римановых многообразиях. Изучается взаимосвязь разрешимости некоторых краевых и внешних краевых задач. Также найдены условия выполнения и устойчивости теорем типа Лиувилля для решений полулинейных уравнений на таких многообразиях. Кроме того, получены критерии однозначной разрешимости задачи Дирихле и выполнения лиувиллева свойства для ограниченных решений полулинейных уравнений на квазимодельных римановых многообразиях.

Ключевые слова: *полулинейные эллиптические уравнения, лиувиллево свойство, краевая задача, риманово многообразие, задача Дирихле.*

Введение

Работа посвящена изучению поведения решений некоторых полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях, в частности, на квазимодельных многообразиях. Изучение эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях является достаточно новым направлением в современной математике. Истоки указанной проблематики восходят к классификационной теории двумерных некомпактных римановых поверхностей, основанной на изучении некоторых функциональных классов на поверхностях и развитой в работах А. Альфорса, А. Бейрлинга, Л. Сарио и других математиков. Из теоремы Ф. Клейна, П. Кебе и А. Пуанкаре об униформизации, в частности, следует, что всякая некомпактная односвязная риманова поверхность конформно эквивалентна либо комплексной плоскости (поверхность параболического типа), либо гиперболической плоскости с ее комплексно-аналитической структурой (поверхность гиперболического типа). Отличительным свойством двумерных поверхностей параболического (гиперболического) типа является выполнение (невыполнение) для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данной поверхности является тождественной постоянной.

Данное свойство служит основой для распространения понятий параболичности и гиперболичности на римановы многообразия размерности выше двух. А именно, многообразия, на которых всякая ограниченная снизу супергармоническая функция равна константе, называют многообразиями параболического типа. Вообще, многие проблемы, относящиеся к данному направлению, можно переформулировать в виде теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность пространств решений некоторых эллиптических уравнений на римановых многообразиях или областях евклидова пространства. Общее представление об истории развития и современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из работ [19; 20; 22].

Первоначально большее внимание уделялось изучению гармонических функций на многообразиях. Считающаяся ныне классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция является тождественной постоянной. С другой стороны, класс многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции, достаточно обширен. Более того, обнаружены множества некомпактных римановых многообразий, на которых разрешима задача Дирихле о восстановлении гармонической функции по непрерывным граничным данным для случая идеальной границы. Вообще, проблема разрешимости задачи Дирихле о восстановлении решения уравнения по граничным данным на «бесконечности» является в некотором смысле двойственной по отношению к справедливости теорем типа Лиувилля. С этой точки зрения наибольший интерес представляют некомпактные римановы многообразия. Заметим, что сама постановка задачи Дирихле на таких многообразиях может оказаться проблематичной. В некоторых случаях геометрическая компактификация многообразия позволяет сделать это аналогично постановке классической задачи Дирихле в ограниченных областях $\mathbb{R}^n$ (см., например, [9–13; 17]). С другой стороны, в работе [14] предложен достаточно новый подход к постановке краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях.

Рядом авторов решались аналогичные задачи для уравнений более общих, чем уравнение Лапласа — Бельтрами. Например, рассматривались различные множества решений стационарного уравнения Шредингера

$$\Delta u = c(x)u, \tag{1}$$

где $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция, и в частности,

$$\Delta u = u. \tag{2}$$

Известно (см. [18]), что существование ненулевого ограниченного решения уравнения (2) эквивалентно стохастической неполноте рассматриваемого многообразия. Многообразие называют стохастически полным, если минимальный винеровский процесс на нем имеет бесконечное время жизни (более подробно о таких многообразиях см.: [21]). Так как для уравнений (1) и (2) ненулевая постоянная не является решением, то и лиувиллево свойство для них формулируется несколько иначе, чем для гармонических функций.

Будем говорить, что на некомпактном многообразии M выполнено *лиувиллево свойство* для ограниченных решений уравнения (1) [аналогично, (2)], если любое такое решение есть тождественный нуль.

Отдельный интерес вызывает установление взаимосвязи между выполнением лиувиллева свойства для решений различных эллиптических уравнений, а также разрешимостью краевых и внешних краевых задач для них на рассматриваемых многообразиях. Изучению указанных вопросов для решений уравнения (1) посвящены работы [2; 5–7; 14].

В последние годы все более активно изучаются решения уравнения

$$Lu = g(x, u), \tag{3}$$

где L — линейный эллиптический оператор второго порядка, с различными структурными требованиями на правую часть $g(x, \xi)$ (см., например, [3; 4; 15; 16]).

Одним из частных случаев уравнения (3) является уравнение вида

$$\Delta u = \phi(|u|)u, \tag{4}$$

где $\phi(\xi)$ — неотрицательная, монотонно неубывающая функция при $\xi \geq 0$. Поведение ограниченных решений этого уравнения, вопросы разрешимости краевых и внешних краевых задач, выполнения лиувиллева свойства, а также их устойчивость при вариациях правой части достаточно подробно изучены в работах [15] и [16].

Всюду в работе будем полагать M — произвольное полное гладкое связное некомпактное риманово многообразие, L — линейный эллиптический оператор вида

$$Lu \equiv \Delta u + \langle \mathbf{b}(x), \nabla u \rangle,$$

где $\mathbf{b}(x) = (b^1(x), \ldots, b^n(x))$ — векторное поле такое, что $b^i(x) \in C^{\gamma}_{loc}(M)$ для всех i $(0 < \gamma < 1)$, $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Доказательство основных результатов опирается на принцип максимума, теоремы сравнения и единственности для решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений на предкомпактных подмножествах многообразия M. Их справедливость доказывается также, как и для ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [1, с. 39–40]). Кроме того, в работе применяются аналогичные утверждения для решений полулинейных эллиптических дифференциальных уравнений. Доказательства этих утверждений можно найти в Приложении.

1. Лиувиллево свойство для полулинейного уравнения

В данном параграфе будем предполагать, что правая часть уравнения (3) удовлетворяет следующим структурным условиям:

1) $g(x, \xi) \in \mathbf{Lip}(M \times \mathbb{R})$;
2) $g(x, -\xi) = -g(x, \xi)$;
3) $g(x, \xi_1) \geq g(x, \xi_2)$ для всех $\xi_1 > \xi_2$;
4) существует постоянная $A > 0$ такая, что $Ag(x, \xi) \geq \xi$ для всех $\xi \geq 0$.

Перейдем к точным формулировкам.

Пусть G_1, G_2 — некоторые предкомпактные области многообразия M такие, что $B \subset G_1$ и $\overline{G_1} \subset G_2$. Обозначим

$$M_i(v) = \sup_{\partial G_i} v, \quad m_i(v) = \inf_{\partial G_i} v, \quad a^+ = \max\{0, a\}, \quad a^- = \min\{0, a\}.$$

Теорема 1. *На полном некомпактном римановом многообразии M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения* (3) *тогда и только тогда, когда на $M \setminus B$ существует ненулевое ограниченное решение $v(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям*

$$M_1(v) < M_2(v^+), \quad m_1(v) > m_2(v^-). \tag{5}$$

Теорема 2. *На полном некомпактном римановом многообразии M для ограниченных решений уравнения* (3) *справедливо лиувиллево свойство тогда и только тогда, когда на M выполнено лиувиллево свойство для ограниченных решений уравнения $Lu = u$.*

Замечание. Аналогичное теореме 1 утверждение для решений уравнения (1) было получено в [2], аналоги теорем 1 и 2 для решений уравнения (4) — в [15] и [16].

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если на M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения* (3)*, то на M существует и нетривиальное неотрицательное ограниченное решение этого уравнения.*

Доказательство. Пусть $u_0 \not\equiv 0$ — ограниченное решение уравнения (3) на M. Покажем, что на M существует неотрицательное ограниченное решение этого уравнения.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$Lu_k = g(x, u_k) \quad \text{в} \quad B_k, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u_0^+\big|_{\partial B_k}. \tag{6}$$

Решения u_k существуют в силу структурных условий 1)–3) для уравнения (3) (см. [1, с. 347–351]).

Рассмотрим два случая $u_0^+ \equiv 0$ и $u_0^+ \not\equiv 0$.

В первом случае имеем $u_0 \le 0$ на M. Тогда в силу нечетности функции $g(x, \xi)$ по второму аргументу (см. структурное условие 2)) функция $-u_0$ является нетривиальным неотрицательным решением уравнения (3) на M.

Пусть теперь $u_0^+ \not\equiv 0$. Тогда, учитывая принцип максимума (см. Приложение) для решений задачи (6), для всех k имеем $0 \le u_k \le \sup_M u_0^+$.

Кроме того, в B_k выполнено

$$Lu_0 = g(x, u_0), \qquad u_0\,|_{\partial B_k} \le u_0^+\big|_{\partial B_k} = u_k\,|_{\partial B_k}.$$

Тогда, применяя принцип сравнения 1 (см. Приложение), получаем $u_k \ge u_0$ в B_k и, следовательно, $u_k \ge u_0^+$ в B_k для всех k.

Используя внутренние оценки градиентов в комбинации с внутренними оценками в пространстве Гёльдера $C^{\gamma}(\Omega)$ производных для произвольного компактного подмножества $\Omega \subset M$ (см., например, [1, с. 294, 346]), получаем, что семейство функций $g_k(x) = g(x, u_k(x))$ имеет равномерно ограниченные нормы в $C^{\gamma}(\Omega)$. Тогда с учетом внутренних оценок Шаудера ([1, с. 91, 94–95]) получаем компактность семейства $\{u_k\}$ в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$. Последнее условие влечет существование предельной функции $u = \lim_{k\to\infty} u_k$, которая является нетривиальным ограниченным неотрицательным решением уравнения (3) на M. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству основных утверждений. Докажем вначале теорему 1.

Доказательство. Пусть $u(x)$ — ненулевое ограниченное решение уравнения (3) на M. Положим $v(x) \equiv u(x)$ на $M \setminus B$. Тогда функция $v(x)$ является ненулевым ограниченным решением уравнения (3) на $M \setminus B$. Условия (5) выполняются в силу принципа максимума (см. Приложение). Необходимость доказана.

Докажем достаточное условие. Пусть $v(x)$ — ограниченное решение уравнения (3) на $M \setminus B$, для которого выполняются условия (5). Обозначим $K = \sup_{M\setminus B} |v|$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M. Без ограничения общности можем считать, что $\overline{G_2} \subset B_k$ для всех k. Рассмотрим последовательность функций u_k, которые являются решениями следующих задач

$$Lu_k = g(x, u_k) \quad \text{в} \quad B_k, \qquad u_k|_{\partial B_k} = v|_{\partial B_k}.$$

Тогда в силу принципа максимума (см. Приложение) для всех k имеем

$$|u_k| \le \sup_{B_k} |u_k| = \sup_{\partial B_k} |u_k| \le K.$$

Как и при доказательстве леммы 1, получаем компактность семейства функций $\{u_k\}$ в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ для произвольного компактного подмножества $\Omega \subset M$. Последнее условие влечет существование функции $u = \lim_{k\to\infty} u_k$, которая является ограниченным решением уравнения (3) на M. Покажем, что $u \not\equiv 0$.

Предположим противное, $u \equiv 0$. Рассмотрим последовательность функций $w_k = v - u_k$, каждая из которых является решением уравнения

$$Lw_k - c_k w_k = 0,$$

где

$$c_k = \frac{g(x, v) - g(x, u_k)}{v - u_k} \quad \text{п} \quad w_k \ne 0, \qquad c_k = 0 \quad \text{п} \quad w_k = 0.$$

Ясно, что $c_k \ge 0$.

Кроме того, для всех k имеет место равенство $w_k|_{\partial B_k} = 0$, и $w_k \to v$ при $k \to \infty$.

Тогда в силу выполнения условий (5) для функции v при достаточно больших k имеем

$$M_1(w_k) < M_2(w_k^+), \quad m_1(w_k) > m_2(w_k^-). \tag{7}$$

Применяя принцип максимума для решений эллиптических уравнений к функции w_k в $B_k \setminus \overline{G_1}$ (см., например, [1, с. 39–40]), легко получить неравенства:

$$M_1(w_k^+) \ge M_2(w_k) \quad \text{и} \quad m_1(w_k^-) \le m_2(w_k). \tag{8}$$

Объединяя условия (7) и (8), легко получить

$$M_2(w_k) \le 0, \quad M_1(w_k) < 0. \tag{9}$$

Действительно, рассмотрим два случая: $M_2(w_k^+) > 0$ и $M_2(w_k^+) = 0$. Если $M_2(w_k^+) > 0$, то $M_2(w_k) = M_2(w_k^+) > 0$, и из (7) и (8) имеем

$$M_1(w_k) < M_2(w_k^+) = M_2(w_k) \le M_1(w_k^+).$$

Последнее неравенство возможно лишь в случае, если $M_1(w_k) < 0$ и $M_1(w_k^+) = 0$. Тогда из (8) $M_2(w_k) \leq 0$. Пришли к противоречию с тем, что $M_2(w_k) > 0$.

Значит, единственно возможный вариант, когда $M_2(w_k^+) = 0$. Следовательно, из (7) имеем $M_1(w_k^+) = 0$, $M_1(w_k) < 0$, а из (8) — $M_2(w_k) \leq 0$.

Аналогично получаем

$$m_2(w_k) \geq 0 \quad \text{и} \quad m_1(w_k) > 0,$$

что невозможно одновременно с (9). Таким образом, $u \not\equiv 0$ и теорема доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Заметим сначала, что если структурное условие 4), наложенное на функцию $g(x, \xi)$, выполнено с некоторой константой $A < 1$, то оно будет выполнено и при $A \geq 1$. Поэтому без ограничения общности можем считать $A \geq 1$.

Достаточность. Предположим противное. Пусть на M существует функция $u_0 \not\equiv 0$ — ограниченное решение уравнения (3). По лемме 1 можем считать, что $u_0 \geq 0$. Покажем, что на M существует нетривиальное неотрицательное ограниченное решение уравнения

$$Lu = Ag(x, u). \tag{3a}$$

Рассмотрим решения следующих краевых задач

$$Lu_k = Ag(x, u_k) \quad \text{в} \quad B_k, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}.$$

Так как $0 \leq u_k \leq \sup\limits_M u_0$, то существует функция $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, причем $0 \leq u \leq \sup_M u_0$. Кроме того, $0 \leq Lu_0 = g(x, u_0) \leq Ag(x, u_0)$ в B_k, тогда с учетом принципа сравнения 1 (см. Приложение) выполнено $0 \leq u_k \leq u_0$, и следовательно, $0 \leq u \leq u_0$. Покажем, что $u \not\equiv 0$.

Рассмотрим функции w_k, $\overline{u_k}$, $\overline{v_k}$, которые являются решениями соответствующих краевых задач в области B_k

$$Lw_k = 0, \qquad w_k\,|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k},$$

$$L\overline{v_k} = -g(x, u_0), \qquad \overline{v_k}\,|_{\partial B_k} = 0, \qquad L\overline{u_k} = -Ag(x, u_k), \qquad \overline{u_k}\,|_{\partial B_k} = 0.$$

Ясно, что $Lw_k = L(u_k + \overline{u_k}) = 0$ и $w_k\,|_{\partial B_k} = (u_k + \overline{u_k})|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$. С другой стороны, $Lw_k = L(u_0 + \overline{v_k}) = 0$ и $w_k\,|_{\partial B_k} = (u_0 + \overline{v_k})|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$. Тогда по теореме единственности для решений линейных эллиптических уравнений в каждой области B_k выполнено $w_k = \overline{u_k} + u_k$, $w_k = \overline{v_k} + u_0$. Кроме того, $u_0 \leq w_k \leq \sup_M u_0$ и $u_k \leq w_k \leq \sup_M u_0$, следовательно, $\overline{v_k} \geq 0$ и $\overline{u_k} \geq 0$.

Покажем, что $\overline{u_k} \leq A\overline{v_k}$ (где $A \geq 1$ константа, определенная выше).

Действительно, так как функция $g(x, \xi)$ монотонно не убывает по второму аргументу (см. структурное условие 3)), то из условия $0 \leq u_k \leq u_0$ получаем $0 \leq g(x, u_k) \leq g(x, u_0)$. Следовательно,

$$L(A\overline{v_k}) = -Ag(x, u_0) \leq -Ag(x, u_k) = L\overline{u_k}.$$

Тогда, учитывая равенство $A\overline{v_k}|_{\partial B_k} = \overline{u_k}|_{\partial B_k} = 0$, из принципа сравнения (см. [1, с. 41]) получаем $A\overline{v_k} \geq \overline{u_k}$.

Далее выберем точку x_0, в которой $u_0(x_0) > \sup_M u_0 - \varepsilon$. Тогда

$$w_k(x_0) > \sup_M u_0 - \varepsilon,$$

$$\overline{v_k}(x_0) = w_k(x_0) - u_0(x_0) \leq \sup_M u_0 - u_0(x_0) < \varepsilon,$$

$$\overline{u_k}(x_0) < A\overline{v_k}(x_0) < A\varepsilon, \qquad u_k(x_0) = w_k(x_0) - \overline{u_k}(x_0) > \sup_M u_0 - (A+1)\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем

$$u(x_0) \geq \sup_M u_0 - (A+1)\varepsilon > 0.$$

Таким образом, функция $u \not\equiv 0$ является неотрицательным ограниченным решением уравнения $(3a)$.

Покажем теперь, что на M существует положительное ограниченное решение уравнения $Lu = u$.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$Lu_k - u_k = 0 \quad \text{в} \quad B_k, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k}.$$

Тогда, учитывая принцип максимума для решений линейных эллиптических уравнений (см. [1, с. 39–40]), для всех k имеем $0 \leq u_k \leq \sup_M u$.

Так как $Lu_k = u_k \leq Ag(x, u_k)$ (в силу выполнения структурного условия 4)) и $Lu = Ag(x, u)$, $u_k\,|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k}$, то, применяя принцип сравнения 1 (см. Приложение), получаем $u_k \geq u \geq 0$ в B_k.

Далее, как и в лемме 1, доказывается существование предельной функции для последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая, в свою очередь, является положительным ограниченным решением уравнения $Lu = u$ на M, что противоречит условию.

Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим противное. Пусть теперь на M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения $Lu = u$. Тогда на M существует положительное ограниченное решение этого уравнения v_0 (см., например, [2; 15]).

Положим $C = \sup_M v_0 > 0$. Покажем сначала, что на M существует нетривиальное неотрицательное ограниченное решение уравнения $(3a)$.

Как и выше, рассмотрим последовательность решений следующих краевых задач

$$Lu_k = Ag(x, u_k) \quad \text{в} \quad B_k, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = v_0|_{\partial B_k}.$$

Так как $0 \leq u_k \leq \sup_M v_0$, то, как и выше, существует предельная функция $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, причем $0 \leq u \leq C$. Кроме того, $Lv_0 = v_0 \leq Ag(x, v_0)$ (см. структурное условие 4)), тогда с учетом принципа сравнения 1 из Приложения в B_k выполнено $0 \leq u_k \leq v_0$ для любого k и, следовательно, $0 \leq u \leq v_0$. Покажем, что $u \not\equiv 0$.

Рассмотрим функции w_k, $\overline{u_k}$, $\overline{v_k}$, которые являются решениями соответствующих краевых задач в области B_k

$$Lw_k = 0, \qquad w_k\,|_{\partial B_k} = v_0|_{\partial B_k},$$

$$L\overline{v_k} = -v_0, \qquad \overline{v_k}\,|_{\partial B_k} = 0,$$

$$L\overline{u_k} = -Ag(x, u_k), \qquad \overline{u_k}\,|_{\partial B_k} = 0.$$

Тогда, как и при доказательстве достаточного условия, по теореме единственности имеем $w_k = u_k + \overline{u_k}$, $w_k = v_0 + \overline{v_k}$, причем $Lv_0 = v_0 > 0$, $Lu_k = Ag(x, u_k)$, следовательно, $0 \le u_k \le v_0 \le w_k \le C$ и, соответственно, $\overline{u_k} \ge 0$, $\overline{v_k} \ge 0$.

Так как функция $g(x,\xi) \in \mathbf{Lip}(M \times \mathbb{R})$ (см. структурное условие 1)), то существует константа $C_1 > 0$ такая, что $|g(x,\xi_1) - g(x,\xi_2)| \le C_1|\xi_1 - \xi_2|$. Полагая $\xi_1 = v_0 > 0$, $\xi_2 = 0$, получим неравенство $g(x, v_0) \le C_1 v_0$.

Тогда для всех k в B_k выполнено

$$L(\overline{u_k}) = -Ag(x, u_k) \ge -Ag(x, v_0) \ge -AC_1 v_0 = L(AC_1\overline{v_k}).$$

Кроме того, $\overline{u_k}\,|_{\partial B_k} = \overline{v_k}\,|_{\partial B_k} = 0$, тогда из принципа сравнения (см. [1, с. 41]) получаем

$$\overline{u_k} \le AC_1\overline{v_k}.$$

Далее выберем точку $x_0 \in M$, в которой $v_0(x_0) > C - \varepsilon$. Тогда для достаточно больших k справедливы следующие неравенства:

$$w_k(x_0) \ge v_0(x_0) > C - \varepsilon,$$

$$\overline{v_k}(x_0) = w_k(x_0) - v_0(x_0) \le C - v_0(x_0) < \varepsilon,$$

$$\overline{u_k}(x_0) \le AC_1\overline{v_k}(x_0) < AC_1\varepsilon,$$

$$u_k(x_0) = w_k(x_0) - \overline{u_k}(x_0) > C - \varepsilon - AC_1\varepsilon = C - \varepsilon(1 + AC_1).$$

Переходим к пределу при $k \to \infty$, получим $u(x_0) \ge C - \varepsilon(1 + AC_1) > 0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Значит, функция $u \ge 0$ является нетривиальным ограниченным решением уравнения $(3a)$.

Так как $A \ge 1$, то для всех $x \in M$ и для любого $\xi \ge 0$ выполнено $g(x,\xi) \le Ag(x,\xi)$. А из существования нетривиального неотрицательного ограниченного решения для уравнения $(3a)$ следует существование аналогичного решения для уравнения (3).

Действительно, рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$Lu_k = g(x, u_k) \quad \text{в} \quad B_k, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k}.$$

Тогда, учитывая принцип максимума (см. Приложение), для всех k имеем $0 \le u_k \le$ $\le \sup\limits_M u$.

Так как

$$Lu_k = g(x, u_k) \le Ag(x, u_k), \qquad Lu = Ag(x, u), \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k},$$

то, применяя принцип сравнения 1, получаем $u_k \ge u \ge 0$ в B_k, причем $u \not\equiv 0$.

В заключение, как и в лемме 1, доказывается существование предельной функции для последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая, в свою очередь, является нетривиальным ограниченным решением уравнения (3) на M. Получили противоречие с условием. Теорема доказана.

Далее наряду с уравнением (3) будем рассматривать уравнение

$$Lu = g_1(x, u), \tag{3b}$$

где функция $g_1(x,\xi)$ удовлетворяет структурным условиям 1)–4), $g_1(x,\xi) \not\equiv 0$ при $\xi \ge 0$ и $0 \le g_1(x,\xi) \le A^* g(x,\xi)$ для некоторой константы $A^* > 0$.

Теорема 3. *Пусть на M выполнено лиувиллево свойство для ограниченных решений уравнения* (3*b*). *Тогда лиувиллево свойство выполнено и для ограниченных решений уравнения* (3).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $g_1(x,\xi) \leq g(x,\xi)$ для $\xi \geq 0$. Пусть существует функция $u_0 \not\equiv 0$ — ограниченное решение уравнения (3), то есть $Lu_0 = g(x,u_0)$ на M. Покажем, что на M существует неотрицательное ограниченное решение уравнения $Lu = g_1(x,u)$.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задач

$$Lu_k = g_1(x,u_k) \qquad \text{в} \quad B_k, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u_0^+|_{\partial B_k}\,.$$

Можем считать, что $u_0^+ \not\equiv 0$. Тогда, учитывая принцип максимума (см. Приложение), для всех k имеем

$$0 \leq u_k \leq \sup_M u_0.$$

Так как

$$Lu_k = g_1(x,u_k) \leq g(x,u_k), \qquad Lu_0 = g(x,u_0), \qquad u_k\,|_{\partial B_k} \geq u_0|_{\partial B_k}\,,$$

то по принципу сравнения 1 $u_k \geq u_0$ и, следовательно, $u_k \geq u_0^+$ в B_k.

Как и в лемме 1 доказывается существование предельной функции для последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая в силу принципа максимума является нетривиальным, неотрицательным ограниченным решением уравнения (3*b*) на M.

Пусть теперь $g_1(x,\xi) \leq A^* g(x,\xi)$ для $\xi \geq 0$, $A^* \geq 1$. Можем считать, что u_0 — неотрицательное ограниченное решение уравнения (3), в противном случае вместо u_0 возьмем u_0^+. Покажем, что на M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения $Lu = A^* g(x,u)$.

Рассмотрим решения следующих краевых задач

$$Lu_k = A^* g(x,u_k) \qquad \text{в} \quad B_k, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}\,.$$

С учетом принципа сравнения 1 в B_k выполнено $u_k \leq u_0$. Кроме того, так как $0 \leq u_k \leq \sup\limits_M u_0$, то существует функция $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является ограниченным решением уравнения $Lu = A^* g(x,u)$, причем $0 \leq u \leq \sup\limits_M u_0$. Доказательство того, что $u \not\equiv 0$, дословно совпадает с доказательством аналогичного факта в теореме 2 с точностью до замены константы A на A^*. Таким образом, функция u является нетривиальным ограниченным решением уравнения $Lu = A^* g(x,u)$. Возвращаясь к случаю, разобранному в начале доказательства, окончательно заключаем справедливость теоремы.

Замечание. Утверждение леммы 1, теоремы 1, а также достаточное условие теоремы 2 остаются справедливыми, если вместо глобальной липшицевости функции $g(x,\xi)$ на $M \times \mathbb{R}$ потребовать только ее локальную липшицевость на $\Omega \times \mathbb{R}$ для любой подобласти $\Omega \subset\subset M$.

2. Краевые и внешние краевые задачи для полулинейного уравнения

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные ограниченные на M функции.

Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M и обозначать $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено

$$\lim_{k\to\infty} ||f_1(x) - f_2(x)||_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $||f(x)||_{C^0(G)} = \sup_G |f(x)|$.

Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$. Ясно, что введенное отношение не зависит от выбора исчерпания многообразия M и характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$.

Будем называть функцию f *асимптотически неотрицательной*, если на M существует непрерывная ограниченная функция $w \geq 0$ такая, что $w \sim f$.

Будем говорить, что на M *разрешима краевая задача для уравнения* (3) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (3) такое, что $u \in [f]$.

Пусть $\Phi(x)$ — произвольная непрерывная на ∂B функция.

Будем говорить, что для непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (3) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на $M \setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (3) такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Аналогичным образом можно осуществить постановку краевых задач на произвольных некомпактных римановых многообразиях для уравнений (1), (2), (4) и ряда других эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка (см.: [14–16]).

Заметим, что если многообразие M имеет компактный край или существует естественная геометрическая компактификация многообразия M (например, на многообразиях отрицательной секционной кривизны, на сферически-симметричных, квазимодельных многообразиях), добавляющая границу на бесконечности, данный подход естественным образом приводит к классической постановке задачи Дирихле (см., например, [9–13; 17]).

Далее вместо структурных условий 1)–4) будем рассматривать следующие условия:

1a) $g(x,\xi) \in C^{\gamma}(\Omega \times \mathbb{R})$ для любого подмножества $\Omega \subset\subset M$, $0 < \gamma < 1$;

2a) $g(x,0) \equiv 0$;

3a) $g(x,\xi_1) \geq g(x,\xi_2)$ для всех $\xi_1 > \xi_2$.

Тогда справедливо утверждение.

Теорема 4. *Пусть на* $M \setminus B$ *для уравнения* (3) *для любой постоянной на* ∂B *функции* Φ *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$. *Тогда на* M *для уравнения* (3) *разрешима краевая задача с граничными условиями из того же класса.*

Доказательство. Обозначим v — решение внешней краевой задачи для уравнения (3) на $M \setminus B$, удовлетворяющее условиям $v \in [f]$ и $v|_{\partial B} = 0$.

Рассмотрим последовательность функций u_k, являющихся решением задач

$$Lu_k = g(x, u_k) \quad \text{в} \quad B_k, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = v|_{\partial B_k}.$$

Данные решения существуют в силу выполнения структурных условий 1a)–3a) (см. [1, с. 347–351]).

Как и при доказательстве леммы 1 получаем компактность семейства функций $\{u_k\}$ в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M$. Последнее условие влечет существование функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является ограниченным решением уравнения (3) на M.

Докажем далее, что $u \in [f]$. Действительно, в силу непрерывности функции $u(x)$ существуют $U_1 = \min\limits_{\partial B} u(x)$, $U_2 = \max\limits_{\partial B} u(x)$.

Тогда $U_1 \le u|_{\partial B} \le U_2$ и, следовательно, при достаточно больших k выполнено

$$U_1 - 1 \le u_k|_{\partial B} \le U_2 + 1.$$

Пусть $A_1 = \min\{0, U_1 - 1\}$, $A_2 = \max\{0, U_2 + 1\}$.

Учитывая, что $v|_{\partial B} = 0$, имеем $A_1 \le v|_{\partial B} \le A_2$, и для достаточно больших k $A_1 \le u_k|_{\partial B} \le A_2$.

Согласно условию теоремы, на $M \setminus B$ существуют решения $v_1 \in [f]$ и $v_2 \in [f]$ уравнения (3), удовлетворяющие условиям

$$v_1|_{\partial B} = A_1, \;\; v_2|_{\partial B} = A_2.$$

Так как $v_1 \sim v_2 \sim v$ и $v_1|_{\partial B} \le v|_{\partial B} \le v_2|_{\partial B}$, то согласно принципу сравнения 2 (см. Приложение) на $M \setminus B$ получаем $v_1 \le v \le v_2$.

Тогда для достаточно больших k выполнено

$$v_1|_{\partial B_k} \le u_k|_{\partial B_k} = v|_{\partial B_k} \le v_2|_{\partial B_k},$$

$$v_1|_{\partial B} \le u_k|_{\partial B} \le v_2|_{\partial B}.$$

Применяя принцип сравнения 1 к функциям u_k, на множестве $B_k \setminus B$ имеем $v_1 \le u_k \le v_2$.

Перейдем к пределу при $k \to \infty$, на $M \setminus B$ получим $v_1 \le u \le v_2$. Учитывая, что $v_1 \sim v_2 \sim v$, получаем $u \sim v$ и, следовательно, $u \in [f]$. Теорема 4 доказана.

Замечание. Если f — асимптотически неотрицательная функция, то условие теоремы можно ослабить, потребовав разрешимость внешних краевых задач в классе $[f]$ только для неотрицательных постоянных на ∂B функций.

В следующей теореме исследуются вопросы устойчивости разрешимости краевых и внешних краевых задач при вариациях правой части полулинейного уравнения. Для этого наряду с решениями уравнения (3) будем рассматривать решения уравнений

$$Lu = g_l(x, u), \tag{3c}$$

где функции $g_l(x,\xi)$ удовлетворяют структурным условиям 1a)–3a), $l = 1, 2$ и $g_1(x,\xi) \le$ $\le g(x,\xi) \le g_2(x,\xi)$.

Теорема 5. *Пусть на $M \setminus B$ для любых постоянных неотрицательных на ∂B функций разрешимы внешние краевые задачи для уравнений* (3c) *при $l = 1, 2$ с граничными условиями из класса $[f]$, где f — асимптотически неотрицательная на M функция. Тогда*

1) на $M \setminus B$ для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x) \ge 0$ для уравнения (3) *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$;*

2) на M для уравнения (3) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$.*

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — произвольная непрерывная неотрицательная на ∂B функция. Обозначим $C_1 = \sup\limits_{\partial B} \Phi(x) \geq 0$. По условию существует функция u_0 — ограниченное решение внешней краевой задачи для уравнения $(3c)$ при $l = 1$ на $M \setminus B$ такая, что $u_0 \in [f]$ и $u_0|_{\partial B} = A_1|_{\partial B}$. Причем $0 \leq u_0 \leq K$ на $M \setminus B$, где $K = \sup\limits_{M \setminus B} u_0$.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$Lu_k = g(x, u_k) \quad \text{в} \quad B_k \setminus B, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k} \qquad u_k\,|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}\,.$$

Учитывая принцип максимума (см. Приложение), для всех k имеем

$$0 \leq u_k \leq \sup_{\partial B_k \cup \partial B} u_k \leq K,$$

откуда получаем равномерную ограниченность последовательности функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ на $M \setminus B$ и, следовательно, ее компактность в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M \setminus B$. Последнее влечет за собой существование предельной функции $u = \lim\limits_{k \to \infty} u_k$, которая является ограниченным решением уравнения (3) на $M \setminus B$ таким, что $u\,|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Кроме того, $Lu_0 = g_1(x, u_0) \leq g(x, u_0)$, $Lu_k = g(x, u_k)$ в B_k, $u_k\,|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$, $u_k\,|_{\partial B} \leq u_0|_{\partial B}$. Тогда с учетом принципа сравнения 1 в $B_k \setminus B$ получаем $u_k \leq u_0$. Следовательно, $0 \leq u \leq u_0$ на $M \setminus B$.

Покажем, что $u \sim u_0$.

Согласно условию на $M \setminus B$ существует решение v_0 уравнения $(3c)$ при $l = 2$ такое, что $v_0|_{\partial B} = 0$ и $v_0 \in [f]$. Используя принцип сравнения 2 (см. Приложение) на $M \setminus B$, получаем $u_0 \geq v_0 \geq 0$.

Более того, для каждого k имеют место следующие неравенства:

$$Lu_k = g(x, u_k) \leq g_2(x, u_k) \quad \text{в} \quad B_k \setminus B,$$

$$v_0|_{\partial B} \leq u_k\,|_{\partial B}\,, \quad v_0|_{\partial B_k} \leq u_k\,|_{\partial B_k}\,.$$

Тогда по принципу сравнения 1 в $B_k \setminus B$ имеем $u_k \geq v_0$, и, следовательно, $u_0 \geq u_k \geq v_0 \geq 0$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$, на $M \setminus B$ получаем $u_0 \geq u \geq v_0$. Так как $u_0 \sim v_0 \sim f$, то $u \sim f$. Первое утверждение теоремы доказано.

Доказательство второго утверждения следует из теоремы 4 и последнего замечания. Теорема доказана полностью.

В частности, если существуют такие функции $c_l(x) \geq 0$, $c_l(x) \in C^{\gamma}(\Omega)$ (где $l = 1, 2$, $\Omega \subset\subset M$, $\quad 0 < \gamma < 1$), что $g_l(x, \xi) = c_l(x)\xi$ и $c_1(x)\xi \leq g(x, \xi) \leq c_2(x)\xi$, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть на* $M \setminus B$ *для любой постоянной* $C \geq 0$ *разрешимы внешние краевые задачи для уравнений* $Lu = c_l(x)u$ *при* $l = 1, 2$ *с граничными условиями из класса* $[f]$, *где* f *— асимптотически неотрицательная на* M *функция. Тогда:*

1) на $M \setminus B$ *для любой непрерывной на* ∂B *функции* $\Phi(x) \geq 0$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (3) *с граничными условиями из класса* $[f]$;

2) на M *для уравнения* (3) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$.

3. Лиувиллево свойство и разрешимость задачи Дирихле для полулинейных уравнений на квазимодельных многообразиях

В данном параграфе будут получены условия выполнения лиувиллева свойства и разрешимости задачи Дирихле для уравнения (3) при $\mathbf{b}(x) = 0$ на квазимодельных многообразиях.

Пусть M — полное риманово многообразие, представимое в виде $M = B \cup D_1 \cup \cup D_2 \cup \ldots \cup D_p$, где B — некоторый компакт, а каждая область D_i — искривленное произведение порядка k, то есть изометрична прямому произведению $\mathbb{R}_+ \times S_{i1} \times S_{i2} \ldots \times \times S_{ik}$ (где $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, а S_{ij} — компактные римановы многообразия без края) с метрикой

$$ds^2 = h_i^2(r)dr^2 + q_{i1}^2(r)d\theta_{i1}^2 + \cdots + q_{ik}^2(r)d\theta_{ik}^2.$$

Здесь $h_i(r)$ и $q_{ij}(r)$ — положительные, гладкие на $\mathbb{R}_+$ функции, а $d\theta_{ij}^2$ — метрика на S_{ij}. Обозначим $\dim S_{ij} = n_{ij}$, $S_i = S_{i1} \times S_{i2} \ldots \times S_{ik}$, а $\theta_i = (\theta_{i1}, \ldots, \theta_{ik})$. Области D_i будем называть также концами многообразия M.

Пусть функция $g(x, \xi)$ удовлетворяет структурным условиям 1a)–3a) параграфа 3 и существуют такие функции $c_l(x) \geq 0$, $c_l(x) \in C^\gamma(\Omega)$ (где $l = 1, 2$, $\Omega \subset\subset M$, $0 < \gamma < 1$), что в каждой области D_i выполнены условия

$$c_l(r, \theta_i) \equiv c_{li}(r) \qquad c_{1i}(r)\xi \leq g(x, \xi) \leq c_{2i}(r)\xi.$$

Будем говорить, что на многообразии M *однозначно разрешима задача Дирихле* для уравнения (3) (соответственно, (1) и (2)), если для любого набора $(\Psi_1, \ldots, \Psi_p)$ непрерывных на S_i $(i = 1, \ldots, p)$ функций существует единственное решение $u(x)$ уравнения (3) (соответственно, (1) и (2)), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{r \to \infty} u(r, \theta_i) = \Psi_i(\theta_i).$$

Введем обозначения:

$$s_i(t) = q_{i1}^{n_{i1}}(t) \cdots q_{ik}^{n_{ik}}(t),$$

$$I_{li} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{h_i(t)}{s_i(t)} \left(\int_{r_0}^{t} c_{li}(z) h_i(z) s_i(z) dz \right) dt,$$

$$J_{ij} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{h_i(t)}{s_i(t)} \left(\int_{r_0}^{t} \frac{h_i(t) s_i(t)}{q_{ij}^2(t)}, dz \right) dt,$$

$$K_i = \int_{r_0}^{\infty} \frac{h_i(t)}{s_i(t)} dt,$$

где $r_0 > 0$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, k$, $l = 1, 2$.

Ясно, что в случае $c_l(x) \not\equiv 0$ при $l = 1$, 2 в каждой области D_i выполнено в точности одно из условий:

$\alpha_l)$ $J_{ij} = \infty$ при $j \leq s$, где $0 \leq s < k$, $J_{ij} < \infty$ при $j = s+1, \ldots, k$, $I_{li} < \infty$;
$\beta_l)$ $J_{ij} = \infty$, для всех j, $I_{li} < \infty$;
$\gamma)$ $K_i = \infty$;
$\delta_l)$ $I_{li} = \infty$, $K_i < \infty$.

Переформулируем в наших обозначениях следующие утверждения из работы [12].

Утверждение 1. *Пусть в области D_i выполнены условия пункта α_l. Тогда для любых непрерывных на S_i функций $\Psi(\theta_{i(s+1)},\ldots,\theta_{ik})$ и $\chi(\theta_i)$ для каждого из уравнений $Lu=c_l(r)u$ $(l=1,\,2)$ на D_i существует ограниченное решение $u_l(r,\theta_i)$ такое, что*

$$u_l(r_0,\theta_i)=\chi(\theta_i),\qquad \lim_{r\to+\infty}u_l(r,\theta_i)=\Psi(\theta_{i(s+1)},\ldots,\theta_{ik}).$$

В этом случае область D_i называют также *L-строго гиперболическим* искривленным произведением порядка (k,s) $(0\le s<k)$ (см. [13]).

Утверждение 2. *Пусть в области D_i выполнены условия пункта β_l. Тогда для любой непрерывной на S_i функции $\chi(\theta_i)$ и для любой константы C для каждого из уравнений $Lu=c_l(r)u$ $(l=1,\,2)$ на D_i существует ограниченное решение $u_l(r,\theta_i)$ такое, что*

$$u_l(r_0,\theta_1,\ldots,\theta_k)=\chi(\theta_1,\ldots,\theta_k),\qquad \lim_{r\to\infty}u_l(r,\theta_1,\ldots,\theta_k)=C.$$

В этом случае область D_i называют также *L-гиперболическим* искривленным произведением (см. [13]).

Утверждение 3. *Пусть квазимодельное многообразие M имеет p_1 L-строго гиперболических концов D_i, p_2 L-гиперболических концов D_i, где $p_1{+}p_2\ge1$. Тогда для любого заданного набора $(\Psi_1,\ldots,\Psi_{p_1},C_{p_1+1},\ldots,C_{p_1+p_2})$, где $\Psi_i=\Psi_i(\theta_{i(s+1)},\ldots,\theta_{ik})$ — непрерывные на S_i функции, а C_i — произвольные константы, для каждого из уравнений $Lu=c_l(r)u$ $(l=1,\,2)$ на M существует единственное ограниченное решение $u_l(r,\theta_i)$ такое, что на концах D_i при $i=1,\ldots,p_1$ выполнено*

$$\lim_{r\to\infty}u_l(r,\theta_i)=\Psi_i(\theta_{i(s+1)},\ldots,\theta_{ik}),$$

при $i=p_1+1,\ldots,p_1+p_2$

$$\lim_{r\to\infty}u_l(r,\theta_i)=C_i.$$

Утверждение 4. *Пусть в области D_i выполнены условия пункта δ_l. Тогда для любых ограниченных решений $u_l(x)$ уравнений $Lu=c_l(x)u$ $(l=1,\,2)$ на D_i выполнено*

$$\lim_{r\to\infty}u_l(r,\theta_i)=0.$$

В этом случае область D_i называют также *L-слабо гиперболическим* искривленным произведением (см. [13]).

Утверждение 5. *Пусть M — квазимодельное многообразие. Тогда на нем выполнено лиувиллево свойство для ограниченных решений уравнения $Lu=c_l(x)u$ $(l=1,\,2)$ тогда и только тогда, когда оно не содержит L-строго гиперболических концов любого порядка и L-гиперболических концов.*

Аналогичное утверждение справедливо и для уравнения (2).

Известно также [13], что если в области D_i выполнены условия пункта γ), то искривленное произведение D_i имеет *параболический* тип.

Пусть квазимодельное многообразие M имеет p_1 L-строго гиперболических концов D_i, p_2 L-гиперболических концов D_i, где $p_1 + p_2 \geq 1$ и не содержит параболических концов. Рассмотрим набор функций $(\Psi_1, \ldots, \Psi_{p_1}, C_{p_1+1}, \ldots, C_{p_1+p_2})$, где $\Psi_i = \Psi_i(\theta_{i(s+1)}, \ldots, \theta_{ik})$ — произвольные непрерывные на S_i функции, а C_i — произвольные константы. Из сформулированных выше утверждений 1–4 и результатов работы [14] следует, что на $M \setminus B$ для каждого из уравнений $Lu = c_l(r)u$ $(l = 1, 2)$ разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$, где $f(x)$ — непрерывная ограниченная на M функция такая, что

$$f|_{D_i} = \begin{cases} \Psi_i & \text{при } i = 1, \ldots, p_1, \\ C_i & \text{при } i = p_1 + 1, \ldots, p_1 + p_2, \\ 0 & \text{при } i = p_1 + p_2 + 1, \ldots, p. \end{cases}$$

Как следствия из результатов первого и второго параграфов данной работы (теорема 2, следствие 1), а также работ [12] и [14], сформулируем необходимые и достаточные условия выполнения лиувиллева свойства и разрешимости задачи Дирихле для ограниченных решений уравнения (3) на квазимодельном многообразии M.

Теорема 6. *Пусть квазимодельное многообразие M имеет p_1 L-строго гиперболических концов D_i, p_2 L-гиперболических концов D_i, где $p_1+p_2 \geq 1$ и не содержит параболических концов. Тогда для любого заданного набора $(\Psi_1, \ldots, \Psi_{p_1}, C_{p_1+1}, \ldots, C_{p_1+p_2})$, где $\Psi_i = \Psi_i(\theta_{i(s+1)}, \ldots, \theta_{ik}) \geq 0$ — непрерывные на S_i функции, а $C_i \geq 0$ — произвольные константы, на M существует единственное ограниченное решение $u(x)$ уравнения* (3) *такое, что на концах D_i при $i = 1, \ldots, p_1$ выполнено*

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta_i) = \Psi_i(\theta_{i(s+1)}, \ldots, \theta_{ik}),$$

при $i = p_1 + 1, \ldots, p_1 + p_2$

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta_i) = C_i,$$

при $i = p_1 + p_2 + 1, \ldots, p$

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta_i) = 0.$$

Следствие 2. *Пусть квазимодельное многообразие M имеет p L-строго гиперболических концов D_i порядка $(k, 0)$. Тогда для любого заданного набора $(\Psi_1, \ldots, \Psi_p)$, где $\Psi_i = \Psi_i(\theta_i) \geq 0$ — непрерывные на S_i функции, на M однозначно разрешима задача Дирихле для уравнения* (3).

Далее будем считать, что функция $g(x, \xi)$ удовлетворяет структурным условиям 1)–4) параграфа 2. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть M — квазимодельное многообразие. Тогда на нем выполнено лиувиллево свойство для ограниченных решений уравнения* (3) *тогда и только тогда, когда оно не содержит L-строго гиперболических концов любого порядка и L-гиперболических концов.*

4. Приложение

Предложение 1. (Принцип сравнения 1). *Пусть $\Omega \subset M$ — предкомпактное подмножество и $u, \ v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ удовлетворяют в Ω неравенствам*

$$Lu \geq g(x,u), \qquad Lv \leq g(x,v)$$

и $u|_{\partial\Omega} \leq v|_{\partial\Omega}$. Тогда $u \leq v$ в Ω.

Доказательство. Допустим, что утверждение не верно. Обозначим

$$D = \{x \in \Omega : \ u(x) > v(x)\} \neq \emptyset \quad -$$

открытое подмножество в Ω. Пусть D_0 — одна из его компонент связности такая, что $u > v$ внутри D_0 и $u|_{\partial D_0} = v|_{\partial D_0}$. Рассмотрим в D_0 функцию $w = u - v > 0$. При этом выполнено $w|_{\partial D_0} = 0$ и $Lw = Lu - Lv \geq g(x,u) - g(x,v) \geq 0$ в D_0 (в силу монотонности функции $g(x,\xi)$ по второму аргументу). Применяя к функции w в D_0 принцип максимума для субрешений линейных эллиптических уравнений (см., например, [14]), имеем $w \leq 0$, что противоречит выбору области D_0.

Предложение 2. (Принцип максимума). *Пусть $\Omega \subset M$ — предкомпактное подмножество и $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ удовлетворяет в Ω неравенству $Lu \geq g(x,u)$ $(Lu \leq g(x,u))$. Тогда*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

Если же $Lu = g(x,u)$ в Ω, то

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $v = \sup\limits_{\partial\Omega} u^+ \geq 0$, которая в Ω удовлетворяет неравенству $Lv \leq g(x,v)$. По условию для функции u выполнено $Lu \geq g(x,u)$. Тогда имеем

$$Lu \geq g(x,u), \qquad Lv \leq g(x,v), \qquad u|_{\partial\Omega} \leq v|_{\partial\Omega}.$$

Применяя принцип сравнения 1 к функциям u и v в Ω, имеем $u \leq v$, то есть $u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$. Следовательно, $\sup\limits_{\Omega} u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$.

Аналогично доказывается второе неравенство $\inf\limits_{\Omega} u \geq \inf\limits_{\partial\Omega} u^-$.

Пусть теперь $Lu = g(x,u)$ в Ω, что, в свою очередь, равносильно одновременному выполнению в Ω двух неравенств $Lu \geq g(x,u)$ и $Lu \leq g(x,u)$. Тогда по первой части доказательства имеем

$$\inf_{\partial\Omega} u^- \leq u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+. \tag{5}$$

С другой стороны, справедливы неравенства

$$\sup_{\partial\Omega} u^+ \leq \sup_{\partial\Omega} |u|, \qquad \text{и} \qquad \inf_{\partial\Omega} u^- \geq -\sup_{\partial\Omega} |u|. \tag{6}$$

Объединяя (5) и (6), получим $-\sup\limits_{\partial\Omega} |u| \leq u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} |u|$, то есть в Ω выполнено $|u| \leq \leq \sup\limits_{\partial\Omega} |u|$, следовательно,

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Но так как Ω — предкомпактное подмножество в M и $u \in C^0(\overline{\Omega})$, то

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\overline{\Omega}} |u| \geq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Последние два неравенства влекут выполнение окончательного равенства

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Предложение 3. (Принцип сравнения 2). *Пусть $Lv \leq g(x,v)$, $Lu \geq g(x,u)$ на $M \setminus B$, $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $v \sim u$. Тогда $v \geq u$ на $M \setminus B$.*

Пусть $Lv \leq g(x,v)$, $Lu \geq g(x,u)$ на M и $v \sim u$. Тогда $v \geq u$ на M.

Доказательство. Допустим, что первое утверждение не верно. Обозначим

$$D = \{x \in M \setminus B: \ u(x) > v(x)\} \neq \emptyset \quad -$$

открытое подмножество в $M \setminus B$. Пусть D_0 — одна из ограниченных компонент связности подмножества D такая, что $u > v$ внутри D_0 и $u|_{\partial D_0} = v|_{\partial D_0}$. Рассмотрим в D_0 функцию $w = u - v > 0$. При этом выполнено $w|_{\partial D_0} = 0$ и $Lw = Lu - Lv \geq g(x,u) - g(x,v) \geq 0$ в D_0 (в силу монотонности функции $g(x,\xi)$ по второму аргументу). Применяя к функции w в D_0 принцип максимума для субрешений линейных эллиптических уравнений, имеем $w \leq 0$, что противоречит выбору области D_0.

Пусть теперь D_0 — одна из неограниченных компонент связности, для которой выполнено $u|_{\partial D_0} = v|_{\partial D_0}$, $v < u$ внутри D_0 и $v \sim u$ в D_0, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} ||v(x) - u(x)||_{C^0((M \setminus B_k)\cap D_0)} = 0$. Как и выше, рассмотрим в D_0 функцию $w = u - v > 0$. При этом $w|_{\partial D_0} = 0$, $Lw = Lu - Lv \geq g(x,u) - g(x,v) \geq 0$ в D_0 и $v \sim 0$. По принципу максимума для субрешений в D_0 получаем $w \leq 0$ и приходим к противоречию.

Доказательство второго утверждения проводится аналогично.

Из принципа сравнения непосредственно следует теорема единственности решений краевых и внешних краевых задач для уравнения (3).

Предложение 4. (Теорема единственности). *Пусть $Lv = g(x,v)$ и $Lu = g(x,u)$ на $M \setminus B$ и $v|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $v \sim u$. Тогда $w = u$ на $M \setminus B$.*

Пусть $Lv = g(x,v)$, $Lu = g(x,u)$ на M и $v \sim u$. Тогда $v = u$ на M.

Примечания

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-97004-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка : Пер. с англ. / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, 2007. — 464 с.
2. Григорьян, А. А. Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи / А. А. Григорьян, Н. С. Надирашвили // Изв. вузов. Математика. — 1987. — № 5. — С. 25–33.

3. Кондратьев, В. А. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка / В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис // Мат. сб. — 1988. — Т. 135 (177), № 3. — С. 346–360.
4. Коньков, А. А. Поведение решений квазилинейных эллиптических неравенств / А. А. Коньков // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — № 7. — С. 3–158.
5. Корольков, С. А. О гармонических функциях на римановых многообразиях с квазимодельными концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2008. — Т. 62, № 3. — С. 175–191.
6. Корольков, С. А. Решения стационарного уравнения Шредингера на многообразиях с квазимодельными концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. «Естественные науки». — 2009. — № 1. — С. 9–14.
7. Лосев, А. Г. О взаимосвязи некоторых лиувиллевых теорем на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 10. — С. 31–37.
8. Лосев, А. Г. О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Сиб. мат. журн. — 1998. — Т. 39, № 1. — С. 87–93.
9. Лосев, А. Г. О поведении ограниченных решений уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 1998. — Вып. 3. — С. 32–43.
10. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — Т. 445, № 6. — С. 41–49. .
11. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // ДАН. — 1999. — Т. 367, № 2. — С. 166–167.
12. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, вып. 1. — С. 84–110.
13. Лосев, А. Г. Стационарное уравнение Шредингера на квазимодельных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Труды кафедры математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2002. — С. 94–124.
14. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 591–599.
15. Мазепа, Е. А. Краевые задачи и лиувиллевы теоремы для полулинейных эллиптических уравнений на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 2005. — Т. 514, № 3. — С. 59–66.
16. Мазепа, Е. А. О существовании целых решений одного полулинейного эллиптического уравнения на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 1. — С. 153–156.
17. Anderson, M. T. Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature / M. T. Anderson, R. Schoen // Ann. of Math. — 1985. — V. 121. — P. 429–461.
18. Davies, E. B. L^1 properties of second order elliptic operators / E. B. Davies // Bull. London Math. Soc. — 1985. — V. 17, № 5. — P. 417–436.
19. Gidas, B. Global and local behavior of positive solutions of non-linear elliptic equations / B. Gidas, J. Spruck // Comm. pure Appl. Math. — 1981. — V. 34. — P. 525–598.

20. Grigor'yan, A. A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. A. Grigor'yan. // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 36. — P. 135–249.
21. Grigor'yan, A. A. Heat Kernel and Analysis on Manifolds. Studies in advanced mathematics, v. 47 / A. A. Grigor'yan. — USA : AMS/IP, 2009. — 484 p.
22. Serrin, J. Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities / J. Serrin, H. Zou // Acta Math. — 2002. — V. 189, № 1. — P. 79–142.

ON ASYMPTOTICAL BEHAVIOR OF THE SOLUTIONS SOME SEMILINEAR ELLIPTICAL EQUATIONS ON NONCOMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

E.A. Mazepa

This paper is devoted to studying the asymptotical behavior of the solutions of some semilinear equations on noncompact Riemannian manifolds. We establish some interrelation between validity of the Liouville property for linear elliptical equations with constant positive potential and validity of the Liouville theorem for one semilinear elliptic equation on these manifolds. Also we receive the necessary and sufficient conditions of existence of the nontrivial (positive) bounded entire solutions of the semilinear elliptic equations and solvability of some boundary value problems on the quasi-model Riemannian manifolds.

Key words: *semilinear elliptic equation, Liouville property, boundary value problem, Riemannian manifold, Dirichlet problem.*