



УДК 517.95
ББК 22.161.6

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА КОНУСАХ МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ¹

Гончаров Юрий Владимирович

Студент Института математики и информационных технологий
Волгоградского государственного университета
goncharov.uv@gmail.com, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Лосев Александр Георгиевич

Доктор физико-математических наук, директор института математики
и информационных технологий
Волгоградского государственного университета
alexander.losev@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Светлов Андрей Владимирович

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа
и теории функций
Волгоградского государственного университета
andrew.svetlov@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе исследуется асимптотическое поведение решений уравнения Лапласа — Бельтрами на конусах модельных многообразий. Доказаны две теоремы типа Лиувилля для ограниченных и положительных гармонических функций.

Ключевые слова: уравнение Лапласа — Бельтрами, теоремы типа Лиувилля, модельные римановы многообразия, конусы модельных многообразий, размерность пространства решений.

Данная работа посвящена исследованию поведения решений уравнения Лапласа — Бельтрами на конусах модельных многообразий.

В исследованиях последних десятилетий была отмечена глубокая связь между классическими проблемами теории функций, теорией уравнений в частных производных эллиптического типа второго порядка, в частности уравнения Лапласа — Бельтрами и стационарного уравнения Шредингера, и геометрией римановых многообразий.

В качестве модельного примера для построения общей теории и выявления ее главных направлений, как правило, используется теория гармонических (субгармонических) функций в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n .

С общей точки зрения представляет особый интерес выявление такого класса некомпактных римановых многообразий, который, с одной стороны, включал бы в себя евклидово пространство, гиперболическое пространство и все пространства со сферически-симметричной метрикой (далее — модельные многообразия), а с другой стороны, для которого существовала бы возможность построения достаточно полной и законченной теории указанных ранее операторов и их обобщений.

В настоящей работе вводится класс римановых многообразий с непустым краем, и на основе спектральных свойств таких многообразий получена достаточно полная качественная теория решений уравнения Лапласа — Бельтрами.

Истоки указанной проблематики восходят к классификационной теории двумерных некомпактных римановых многообразий и поверхностей, основанной на изучении некоторых функциональных классов на поверхностях. Из теоремы об униформизации следует, что всякая односвязная риманова поверхность конформно эквивалентна одной из следующих модельных поверхностей:

1. Сфере (поверхность эллиптического типа).
2. Комплексной плоскости (поверхность параболического типа).
3. Единичному диску, или, что то же самое, гиперболической плоскости с ее комплексно аналитической структурой (поверхность гиперболического типа).

Определение эллиптичности типа достаточно просто и заключается в определении компактности поверхности. Значительно больший интерес вызывает задача определения параболического и гиперболического типов. Отличительным свойством двумерных поверхностей параболического (гиперболического) типа является выполнение (невыполнение) для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данной поверхности является тождественной постоянной. Данное свойство служит основой для распространения понятий параболичности и гиперболичности на римановы многообразия размерности выше двух. А именно, многообразия, на которых всякая ограниченная снизу супергармоническая функция равна константе, называют многообразиями *параболического* типа.

К числу одного из первых эффектных геометрических результатов в определении типа риманова многообразия относится теорема С.Я. Ченга и С.Т. Яу [11], утверждающая, что полное многообразие является параболическим, если объем геодезического шара радиуса R растет не быстрее, чем R^2 при $R \rightarrow \infty$. Однако существуют многообразия параболического типа с произвольным ростом объема геодезического шара.

В работе [1] А.А. Григорьян доказал, что параболичность типа полного риманова многообразия M эквивалентна тому, что вариационная емкость любого компакта в M равна нулю.

Вообще, поиски признаков параболичности типа имеют большую историю. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить из обзоров А.А. Григорьяна [12], В.М. Миклюкова [9], С.Т. Яу [17].

Вопросы существования нетривиальных гармонических и супергармонических функций естественным образом приводят к теоремам типа Лиувилля. Классическая формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в \mathbf{R}^n функция является тождественной постоянной. Хорошо известна справедливость следующих утверждений, носящих название теорем типа Лиувилля.

1. Если гармоническая функция u в \mathbf{R}^n имеет конечный интеграл Дирихле, то $u \equiv \text{const}$.
2. Если $u \in L^p(\mathbf{R}^n)$ является гармонической функцией и $1 \leq p < \infty$, то $u \equiv 0$.
3. Если функция u — гармоническая в \mathbf{R}^n и удовлетворяет неравенству $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^m$, то u — гармонический полином степени, не превышающей m .

В последнее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L . Будем говорить, что на M выполнено (A, L) -лиувиллево свойство, если любое решение уравнения $Lu = 0$, принадлежащее функциональному классу A , является тождественной постоянной.

Вместе с тем класс полных многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции, достаточно обширен. В последнее время наметилась тенденция к более общему подходу к теоремам типа Лиувилля, а именно, оцениваются размерности различных пространств гармонических функций (см., например: [2–5; 7; 14; 15]).

Достаточно серьезный интерес вызывают вопросы разрешимости задачи Дирихле. Вообще говоря, на произвольном некомпактном римановом многообразии поставить задачу Дирихле о восстановлении гармонической функции по граничным данным на «бесконечности» достаточно затруднительно. Однако в некоторых случаях геометрическая компактификация многообразия позволяет сделать это. Например, в [10] и [16] показано, что для односвязного риманового многообразия отрицательной секционной кривизны $\text{sect } M$, удовлетворяющей условиям

$$-b^2 \leq \text{sect } M \leq -a^2 < 0,$$

существует геометрическая компактификация, добавляющая сферу на бесконечности $S(\infty)$, и доказано, что на $\bar{M} = M \cup S(\infty)$ разрешима задача Дирихле для непрерывных граничных данных на $S(\infty)$.

Работы ряда математиков были посвящены изучению сферически-симметричных многообразий, которые также называют модельными многообразиями. Опишем данные многообразия подробнее.

Фиксируем начало координат $O \in \mathbf{R}^n$ и некоторую гладкую функцию g на интервале $[0, R_0)$ (R_0 может быть ∞) такую, что $g(0) = 0$ и $g'(0) = 1$. Определим модельное риманово многообразие M_g следующим образом:

1) множество точек M_g является открытым шаром в \mathbf{R}^n радиуса R_0 с центром в O (если $R_0 = \infty$, то все \mathbf{R}^n);

2) в полярных координатах (r, θ) (где $r \in (0, R_0)$ и $\theta \in S^{n-1}$) риманова метрика на $M_g \setminus \{O\}$ определяется как

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2, \quad (1)$$

где $d\theta$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n-1} ;

3) риманова метрика в O является гладким продолжением (1).

Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство \mathbf{R}^n , гиперболическое пространство \mathbf{H}^n , поверхности вращения и т. д.

Замечание 1. Отметим, что многообразие M_g является параболическим тогда и только тогда, когда

$$\int_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t) dt = \infty.$$

Введем обозначение

$$J = \int_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t g^{n-3}(\xi) d\xi \right) dt,$$

где $r_0 = \text{const} > 0$, $n = \dim M$.

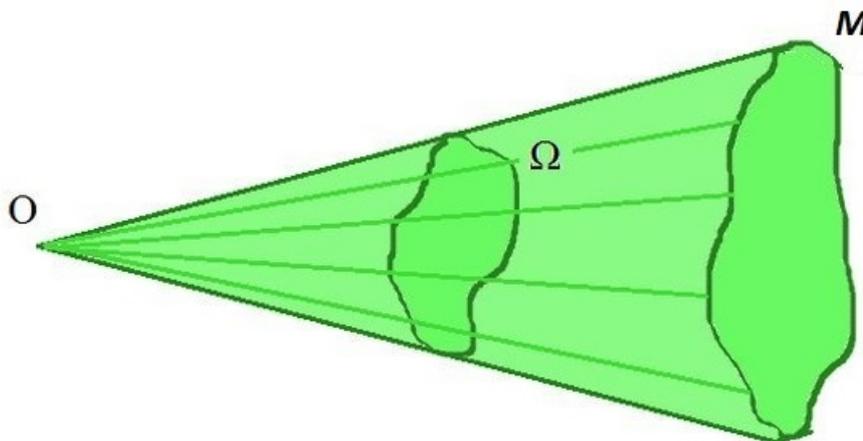
Замечание 2. В работах [7; 8], в частности, доказаны следующие результаты:

1. Если $J = \infty$, то всякая положительная гармоническая на M_g функция является тождественной постоянной.
2. Если $J < \infty$, то для любой $\varphi(\theta) \in C(S^{n-1})$ существует единственная гармоническая на M_g функция, такая что $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta) = \varphi(\theta)$.

Далее будем говорить, что M — конус модельного многообразия, если $M = B \cup D$, где B — некоторый предкомпакт с непустой внутренностью, а D изометрично прямому произведению $[r_0, +\infty) \times \Omega$ (где $r_0 > 0$, Ω — компактное риманово многообразие с непустым гладким краем) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$

Здесь $g(r)$ — положительная гладкая на $[r_0, +\infty)$ функция, а $d\theta$ — метрика на Ω . Отметим, что в случае Ω — компактное риманово многообразие с пустым краем (или, в частности, $\Omega = S^{n-1}$, как выше), получаем определение модельного многообразия.



Конус модельного многообразия

Обозначим через $H_0(M)$ пространство гармонических на M функций, для которых выполнено нулевое условие Дирихле на ∂M , то есть

$$H_0(M) = \{u : \Delta u = 0, u|_{\partial M} = 0\}.$$

Теорема 1. Пусть многообразии M такое, что $J = \infty$. Тогда всякая ограниченная функция $u \in H_0(M)$ является тождественным нулем.

Доказательство. Покажем вначале, что для любой ограниченной функции $u \in H_0(M)$ выполнено $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta) = 0$.

Заметим, что в координатах (r, θ) оператор Лапласа — Бельтрами на D имеет вид (см., например: [7])

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n - 1) \frac{g'(r)}{g(r)} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{g^2(r)} \Delta_\theta, \quad (2)$$

где Δ_θ — внутренний лапласиан на Ω .

Пусть $\{w_k(\theta)\}$ — ортонормированный базис в $L^2(\Omega)$ из собственных функций оператора Лапласа Δ_θ с нулевым условием Дирихле на $\partial\Omega$, а λ_k — соответствующие собственные числа ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$). Тогда для любого r справедливо разложение

$$u(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta),$$

где

$$v_k(r) = \int_{\Omega} u(r, \theta) w_k(\theta) d\theta. \quad (3)$$

Из (2) следует, что для любого номера k функция $v_k(r)$ является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$v''(r) + (n - 1) \frac{g'(r)}{g(r)} v'(r) - \frac{\lambda}{g^2(r)} v(r) = 0, \quad (4)$$

где $\lambda = \lambda_k$.

Замечание 3. Асимптотическое поведение решений уравнения (4) достаточно подробно изучено в [7]. В частности, там доказана справедливость следующих положений:

1. Если $J < \infty$, то для любых констант a и b существует решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $v(r_0) = a$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} v(r) = b$.
2. Если $J = \infty$, то любое ограниченное решение уравнения (4) удовлетворяет условию $\lim_{r \rightarrow \infty} v_k(r) = 0$, причем $|v_k(r)|$ — монотонно убывает.
3. Если $J = \infty$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ и $v_{k+1} \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow \infty$, то $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{v_{k+1}(r)}{v_k(r)} = \infty$.

Из ограниченности $u(r, \theta)$ и (3) следует ограниченность $v_k(r)$ для любого номера k . Тогда, учитывая п. 2 замечания 3, получаем, что $\lim_{r \rightarrow \infty} v_k(r) = 0$ для всех k . В [1] показано, что для любой константы p справедливо неравенство

$$|v_k(r_0)| \leq \frac{c_1}{\lambda_k^p}, \quad (5)$$

где c_1 — константа, зависящая от Ω и p . В [13] показано, что

$$|w_k(\theta)| \leq c_2 \lambda^{(n-2)/2}, \quad (6)$$

где c_2 — константа, зависящая от Ω . Учитывая монотонное убывание $|v_k(r)|$ (см. п. 2 замечания 3), а также неравенства (5) и (6), получаем справедливость неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r)w_k(\theta) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r)||w_k(\theta)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r_0)||w_k(\theta)| \leq c_3 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{\frac{n-2}{2}-p}. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая асимптотику Вейля

$$c_4^{-1}(\Omega)k^{\frac{2}{n-1}} \leq \lambda_k \leq c_4(\Omega)k^{\frac{2}{n-1}},$$

получаем, что при достаточно больших p ряд, стоящий в правой части (7), сходится. Тогда из признака Вейерштрасса получаем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(r)w_k(\theta).$$

Далее, из того, что $\lim_{r \rightarrow \infty} v_k(r) = 0$, получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r)w_k(\theta) = 0.$$

Применяя признак максимума, приходим к выводу, что функция $u \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть многообразие M такое, что $J = \infty$. Тогда размерность конуса положительных гармонических функций из класса $H_0(M)$ равна единице.

Доказательство. Пусть u — положительная гармоническая на M функция из $H_0(M)$. Тогда на D для любого $r \in [r_0, +\infty)$ справедливо разложение

$$u(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r)w_k(\theta),$$

где $v_k(r)$ представимо в виде (3) и удовлетворяет уравнению (4). Учитывая положительность $w_1(\theta)$ и знакопеременность $w_k(\theta)$ при $k \geq 2$, запишем:

$$u(r, \theta) = v_1(r)w_1(\theta) + \sum_{k=2}^{\infty} v_k(r)w_k(\theta).$$

Из положительности функции $u(r, \theta)$, линейной независимости $\{w_k(\theta)\}$, учитывая п. 3 замечания 3, получаем, что при $k \geq 2$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_k(r) = 0.$$

Более того, точно так же, как в предыдущей теореме, несложно показать, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{\infty} v_k(r)w_k(\theta) = 0.$$

Тогда из [6] следует, что любая положительная гармоническая на M функция представима в виде $u = Av_1(r)w_1(\theta)$, где A — некоторая константа. Теорема доказана.

Замечание 4. В работе [3] доказано, что если $J < \infty$, то для любых $\varphi(\theta) \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\partial M)$, таких что $\limsup_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(r, \theta) - \varphi(\theta)| = 0$, существует единственная гармоническая функция u , такая что $u(r, \theta)|_{\partial M} = f(r, \theta)|_{\partial M}$, $\limsup_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u(r, \theta) - \varphi(\theta)| = 0$, то есть однозначно разрешима задача Дирихле.

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-97038-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьян, А. А. О существовании положительных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях / А. А. Григорьян // Мат. сб. — 1985. — Т. 128, № 3. — С. 354–363.
2. Корольков, С. А. Гармонические функции на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 1319–1332.
3. Королькова, Е. С. Краевые задачи для гармонических функций в неограниченных областях римановых многообразий / Е. С. Королькова, С. А. Корольков // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 1 (18). — С. 45–58.
4. Корольков, С. А. Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 1 (14). — С. 23–40.
5. Корольков, С. А. О гармонических функциях на римановых многообразиях с квазимодельными концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Вестник Самарского государственного университета. — 2008. — № 62. — С. 175–191.
6. Корольков, С. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера в неограниченных областях римановых многообразий / С. А. Корольков, А. В. Светлов // Наука и образование в современной конкурентной среде. — Уфа : РИО ИЦИПТ, 2014. — С. 215–221.
7. Лосев, А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 12. — С. 15–24.
8. Лосев, А. Г. Об одной критерии гиперболичности некомпактных римановых многообразий специального вида / А. Г. Лосев // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 4. — С. 558–564.
9. Миклюков, В. М. Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей / В. М. Миклюков // Изв. РАН. Сер. мат. — 1996. — Т. 60, № 4. — С. 111–158.
10. Anderson, M. T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature / M. T. Anderson // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 4. — P. 701–721.
11. Cheng, S. Y. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications / S. Y. Cheng, S. T. Yau // Comm. Pure and Appl. Math. — 1975. — Vol. 28, № 3. — P. 333–354.
12. Grigor'yan, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36. — P. 135–249.

13. Grieser, D. Uniform bounds for eigenfunctions of the Laplacian on manifolds with boundary / D. Grieser // Commun. partial diff. eqns. — 2002. — Vol. 27. — P. 1283–1299.
14. Korolkov, S. A. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends / S. A. Korolkov, A. G. Losev // Mathematische zeitschrift. — 2012. — Vol. 272, № 1–2. — P. 459–472.
15. Losev, A. G. Elliptic partial differential equation on the warped products of Riemannian manifolds / A. G. Losev // Applicable Analysis. — 1999. — Vol. 71 (1–4). — P. 325–339.
16. Sullivan, D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds / D. Sullivan // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 4. — P. 723–732.
17. Yau, S. T. Nonlinear analysis in geometry / S. T. Yau // L'Enseignement Mathematique. — 1987. — Vol. 33. — P. 109–158.

REFERENCES

1. Grigoryan A.A. O sushchestvovanii polozhitelnykh resheniy uravneniya Laplasya na rimanovykh mnogoobraziyakh [On Existence of Positive Solutions for Laplace Equations on Riemannian Manifolds]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics]. 1985, vol. 128, no. 3, pp. 354–363.
2. Korolkov S.A. Garmonicheskie funktsii na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Harmonic Functions on Riemannian Manifolds with Ends]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal]. 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1319–1332.
3. Korolkova E.S., Korolkov S.A. Kraevye zadachi dlya garmonicheskikh funktsiy v neogranichennykh oblastyakh rimanovykh mnogoobraziy [Boundary problems for harmonic functions on unbounded open sets of Riemannian manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics]. 2013, no. 1 (18), pp. 45–58.
4. Korolkov S.A., Losev A.G. Resheniya ellipticheskikh uravneniy na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Solutions for Elliptic Equations on Riemannian Manifolds with Ends]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics]. 2011, no. 1 (14), pp. 23–40.
5. Korolkov S.A., Losev A.G., Mazepa E.A. O garmonicheskikh funktsiyakh na rimanovykh mnogoobraziyakh s kvazimodelnyimi kontsami [On Harmonic Functions on Riemannian Manifolds with Quasimodel Ends]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta.* 2008, no. 62, pp. 175–191.
6. Korolkov S.A., Svetlov A.V. Kraevye zadachi dlya statsionarnogo uravneniya Shredingera v neogranichennykh oblastyakh rimanovykh mnogoobraziy [Boundary Problems for Stationary Schrödinger Equation on Unbounded Domain of Riemannian Manifolds]. *Nauka i obrazovanie v sovremennoy konkurentnoy srede* [Science and Education in the Present Competitive Environment]. Ufa, RIO ITsIPT Publ., 2014, pp. 215–221.
7. Losev A.G. Nekotorye liuvillevy teoremy na rimanovykh mnogoobraziyakh spetsialnogo vida [Some Liouville Theorems on Riemannian Manifolds of Special Type]. *Izv. vuzov. Matematika* [Soviet Mathematics]. 1991, no. 12, pp. 15–24.
8. Losev A.G. Ob odnom kriterii giperbolicnosti nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziy spetsialnogo vida [On the Hyperbolicity Criterion for Noncompact Riemannian Manifolds of Special Type]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes]. 1996, vol. 59, no. 4, pp. 558–564.
9. Miklyukov V.M. Nekotorye priznaki parabolicnosti i giperbolicnosti granichnykh mnozhestv poverkhnostey [Some Parabolicity and Hyperbolicity Conditions for Boundary Sets of Surfaces]. *Izv. RAN. Ser. mat.* [Izvestiya: Mathematics]. 1996, vol. 60, no. 4, pp. 111–158.
10. Anderson M.T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature. *J. Diff. Geom.* 1983, vol. 18, no. 4, pp. 701–721.
11. Cheng S.Y., Yau S.T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications. *Comm. Pure and Appl. Math.* 1975, vol. 28, no. 3, pp. 333–354.

12. Grigor'yan A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*. 1999, vol. 36, pp. 135–249.
13. Grieser D. Uniform bounds for eigenfunctions of the Laplacian on manifolds with boundary. *Commun. partial diff. eqns.*. 2002, vol. 27, pp. 1283–1299.
14. Korolkov S.A., Losev A.G. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends. *Mathematische zeitschrift*. 2012, vol. 272, no. 1–2, pp. 459–472.
15. Losev A.G. Elliptic partial differential equation on the warped products of Riemannian manifolds. *Applicable Analysis*. 1999, vol. 71 (1–4), pp. 325–339.
16. Sullivan D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds. *J. Diff. Geom.*. 1983, vol. 18, no. 4, pp. 723–732.
17. Yau S.T. Nonlinear analysis in geometry. *L'Enseignement Mathematique*. 1987, vol. 33, pp. 109–158.

HARMONIC FUNCTIONS ON CONES OF MODEL MANIFOLDS

Goncharov Yuriy Vladimirovich

Student, Institute of Mathematics and IT,
Volgograd State University
goncharov.uv@gmail.com, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Losev Alexander Georgievich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Director,
Institute of Mathematics and IT,
Volgograd State University
alexander.losev@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Svetlov Andrey Vladimirovich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
andrew.svetlov@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The paper deals with harmonic functions on cones of model manifolds. M is called a cone of model manifold, if $M = B \cup D$, where B is a non-empty precompact set and D is isometric to the product $[r_0, +\infty) \times \Omega$ ($r_0 > 0$, Ω is a compact Riemannian manifold with non-empty smooth boundary) with the metric

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$

Here $g(r)$ is a positive smooth on $[r_0, +\infty)$ function, and $d\theta$ is a metric on Ω . Note if Ω is a compact Riemannian manifold with no boundary, we have just a definition of model manifold.

Let's

$$H_0(M) = \{u : \Delta u = 0, u|_{\partial M} = 0\},$$

and

$$J = \int_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t g^{n-3}(\xi) d\xi \right) dt,$$

where $r_0 = \text{const} > 0$, $n = \dim M$.

The main results of the paper are following.

Theorem 1. *Let's manifold M has $J = \infty$. Then any bounded function $u \in H_0(M)$ is equal to zero identically.*

Theorem 2. *Let's manifold M has $J = \infty$. Then for cone of positive harmonic functions from class $H_0(M)$ the dimension is equal to 1.*

Key words: Laplace — Beltrami equation, Liouville type theorems, model Riemannian manifolds, cones of model manifolds, dimension of solutions' space.