МАТЕМАТИКА

ТРУДЫ II МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ»

УДК 517.95
ББК 22.161

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАД ПОЛОСООБРАЗНОЙ ОБЛАСТЬЮ

Акопян Рипсиме Сергоевна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики
Волгоградского государственного аграрного университета
akrim111@yandex.ru
просп. Университетский, 26, 400002 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Решения уравнения минимальных поверхностей, заданных над неограниченными областями, рассматривались во многих работах (см., например, [1–3; 5]), где изучались различные задачи асимптотического поведения минимальных поверхностей, включая вопросы допустимой скорости стабилизации и теоремы Фрагмена — Линделефа.

В настоящей работе объектом исследования являются решения уравнения минимальных поверхностей, заданных над полосообразными областями специального вида и удовлетворяющих некоторым граничным значениям. Получены оценки возможного предельного поведения гауссовой кривизны. Используется традиционный для решения подобного вида задач подход, заключающийся в построении вспомогательного конформного отображения, соответствующие свойства которого и изучаются. Рассмотрим два частных случая.

Ключевые слова: уравнения минимальных поверхностей, полосообразная область, гауссова кривизна, асимптотическое поведение, голоморфные функции.

1. Пусть $z = f(x,y)$ — C^2-решение уравнения минимальных поверхностей

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'_x(x,y)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f'_y(x,y)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\right)=0, \qquad (1)$$

заданное над областью $\Pi = \{(x,y) \in R^2 : 0 < x < +\infty,\ -\varphi(x) < y < \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция ($|\varphi'(x)| < M$).

Символами $\partial'\Pi$ и $\partial''\Pi$ обозначим участки границы $\partial\Pi$:

$$\partial'\Pi = \partial\Pi \cap \{(x,y) \in R^2 : x = 0\}, \quad \partial''\Pi = \partial\Pi \setminus \partial'\Pi.$$

Предположим, что решение $f(x,y)$ удовлетворяет на границе $\partial''\Pi$ следующим условиям:

i) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial n}\Big|_{\partial''\Pi} = (f'_x(x,y)n_x + f'_y(x,y)n_y)\Big|_{\partial''\Pi} = 0$, где $n = (n_x, n_y)$ — внешняя нормаль;

ii) $|f'_x(x,-\varphi(x))| = |f'_x(x,\varphi(x))|$.

На вертикальном участке $\partial'\Pi$ границы решение произвольно.

Для любого $x > 0$ введем в рассмотрение величину

$$\mu(x) = \int\limits_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} \frac{1 + f'^2_y(x,y)}{\sqrt{1 + |\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\, dy.$$

Пусть $x_2 > x_1 > 0$. Тогда, как было показано в [3], можно получить равенство

$$\mu(x_2) - \mu(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (1 + \varphi'^2(x)) f'^2_x(x,\varphi(x))}\varphi'(x)\, dx -$$

$$- \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (1 + \varphi'^2(x)) f'^2_x(x,-\varphi(x))}(-\varphi'(x))\, dx.$$

Следовательно, используя второе граничное условие, получим

$$\mu(x_2) - \mu(x_1) = 2\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (1 + \varphi'^2(x)) f'^2_x(x,\varphi(x))}\varphi'(x)\, dx. \tag{2}$$

Возьмем произвольно точку $(x_0, y_0) \in \overline{\Pi}$ и введем в рассмотрение однозначную в $\overline{\Pi}$ функцию

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{f'_x(t,s) f'_y(t,s)}{\sqrt{1 + |\bigtriangledown f(t,s)|^2}}\, dt + \frac{1 + f'^2_y(t,s)}{\sqrt{1 + |\bigtriangledown f(t,s)|^2}}\, ds. \tag{3}$$

Известно, что отображение $w = u + iv$, где

$$u = x, \quad v = v(x,y),$$

является голоморфным в метрике поверхности $z = f(x,y)$ и осуществляет введение на графике изотермических координат (u,v) [4].

Обозначим подынтегральное дифференциальное выражение в (3) через dv. Тогда на границе $\partial''\Pi$ будем иметь:

$$v(x,-\varphi(x)) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,-\varphi(x))} dv = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,-\varphi(x_0))} dv - \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (1 + \varphi'^2(x)) f'^2_x(x,\varphi(x))}\varphi'(x)\, dx.$$

$$v(x,\varphi(x)) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,\varphi(x))} dv = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,\varphi(x_0))} dv + \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1+(1+\varphi'^2(x))f'^2_x(x,\varphi(x))}\varphi'(x)\ dx.$$

Используя равенство (2), получим

$$v(x,\varphi(x)) - v(x,-\varphi(x)) = \mu(x_0) + \mu(x) - \mu(x_0) = \mu(x),$$

причем $\Phi(x) = \frac{1}{2}(v(x,\varphi(x)) + v(x,-\varphi(x))) \equiv c$.

Таким образом, можно показать, что отображение $w(x,y)$ есть диффеоморфизм $\overline{\Pi}$ на $\overline{\Pi}_w$, где

$$\Pi_w = \{(u,v) \in R^2 : 0 < u < +\infty,\ c - \frac{1}{2}\mu(u) < v < c + \frac{1}{2}\mu(u)\}.$$

Обозначим $K(x,y)$ гауссову кривизну минимальной поверхности $z = f(x,y)$. Отметим, что $K(x,y) \leq 0$. Используя результаты, полученные в [3] и [4] о допустимой скорости стремления к нулю гауссовой кривизны минимальной поверхности, заданной над полосообразной областью, выводим, что при вышеуказанных предположениях на минимальную поверхность $z = f(x,y)$ будут справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\nu(x)$ — положительная, неубывающая, непрерывная на $(0,+\infty)$ функция, для которой*

$$\int\limits_0^{+\infty} \nu(x)e^{-\sigma(x)}\frac{dx}{\mu(x)} = +\infty, \qquad \textit{где } \sigma(x) = \pi\int\limits_0^x \frac{dt}{\mu(t)}.$$

Тогда, если всюду в Π выполнено

$$\log(-K(x,y)) \leq -\nu(x),$$

то $f(x,y) \equiv const.$

Положим

$$\lambda(x) = \pi\int\limits_0^x \frac{1+\frac{1}{12}\mu'^2(t)}{\mu(t)}\ dt.$$

Теорема 2. *Пусть L — кривая, начинающаяся в какой-либо конечной точке области Π и идущая в бесконечность, оставаясь в области Π.*

Если $K(x,y)$ ограничена в $\overline{\Pi}$ и

$$\frac{\log(-K(x,y))}{e^{\lambda(x)}} \to -\infty, \qquad (x,y)\in L, \qquad x\to+\infty,$$

то $f(x,y) \equiv const.$

Теорема 3. *Если $K(x,y)$ — ограничена в Π и непрерывна в ее замыкании и, кроме того, удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\log|K(x,-\varphi(x))K(x,\varphi(x))|}{e^{\lambda(x)}\mu(x)}dx = -\infty,$$

то $f(x,y) \equiv const.$

2. Пусть $z = f(x,y)$ — C^2-решение уравнения минимальных поверхностей (1), заданное над областью $\Pi = \{(x,y) \in R^2 : 0 < x < +\infty,\ \varphi(x) < y < \varphi(x) + c\}$, где $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция ($|\varphi'(x)| < M$).

Предположим, что решение $f(x,y)$ удовлетворяет на границе $\partial''\Pi$ условиям (i) и (ii), причем второе условие имеет вид: $|f'_x(x,\varphi(x))| = |f'_x(x,\varphi(x)+c)|$.

Для любого $x > 0$ введем в рассмотрение величину

$$\mu(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(x)+c} \frac{1+f'^2_y(x,y)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\ dy.$$

При $x_2 > x_1 > 0$ будем иметь

$$\mu(x_2) - \mu(x_1) =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(1+\varphi'^2(x))f'^2_x(x,\varphi(x)+c)}\varphi'(x)\ dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(1+\varphi'^2(x))f'^2_x(x,\varphi(x))}\varphi'(x)\ dx.$$

Следовательно, используя второе граничное условие, получим

$$\mu(x_2) - \mu(x_1) = 0.$$

Значит, $\mu(x)$ есть величина постоянная, которую в дальнейшем будем обозначать через μ.

Тогда на границе $\partial''\Pi$ получим:

$$v(x,\varphi(x)+c) - v(x,\varphi(x)) = \mu,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(v(x,\varphi(x)+c) + v(x,\varphi(x))) =$$

$$= \frac{1}{2}(\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,-\varphi(x_0))} dv + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,\varphi(x_0))} dv) + \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1+(1+\varphi'^2(x))f'^2_x(x,\varphi(x))}\varphi'(x)\ dx.$$

Причем $\Phi'(x) = \sqrt{1+(1+\varphi'^2(x))f'^2_x(x,\varphi(x))}\varphi'(x)$.

Отображение $w(x,y)$ есть диффеоморфизм $\overline{\Pi}$ на $\overline{\Pi}_w$, где

$$\Pi_w = \{(u,v) \in R^2 : 0 < u < +\infty,\ \Phi(u) - \frac{1}{2}\mu < v < \Phi(u) + \frac{1}{2}\mu\}.$$

Для данного случая полосообразной области Π результаты, аналогичные теоремам 1–3, будут иметь вид.

Теорема 4. *Пусть $\nu(x)$ — положительная, неубывающая, непрерывная на $(0,+\infty)$ функция, для которой*

$$\int\limits_0^{+\infty} \nu(x) e^{-\frac{\pi}{\mu}(x+\alpha(x))}\ dx = +\infty, \qquad \text{где } \alpha(x) = \int\limits_0^x \Phi'^2(t)\ dt.$$

Тогда, если всюду в Π *выполнено*

$$\log(-K(x,y)) \leq -\nu(x),$$

то $f(x,y) \equiv const.$

Теорема 5. *Пусть* L *— кривая, начинающаяся в какой-либо конечной точке области* Π *и идущая в бесконечность, оставаясь в области* Π.

Если $K(x,y)$ *ограничена в* $\overline{\Pi}$ *и*

$$\frac{\log(-K(x,y))}{e^{\frac{\pi}{\mu}(x+\alpha(x))}} \to -\infty, \qquad (x,y) \in L, \qquad x \to +\infty,$$

то $f(x,y) \equiv const.$

Теорема 6. *Если* $K(x,y)$ *— ограничена в* Π *и непрерывна в ее замыкании и, кроме того, удовлетворяет условию*

$$\int_0^\infty \frac{\log|K(x,\varphi(x))K(x,\varphi(x)+c)|}{e^{\frac{\pi}{\mu}(x+\alpha(x))}} dx = -\infty,$$

то $f(x,y) \equiv const.$

Близкие по содержанию результаты, касающиеся минимальных поверхностей над неограниченными областями $\mathbf{R^2}$, получены в [3] и [5]. Аналогичные оценки допустимой скорости стабилизации минимальной поверхности автором приведены в [1; 2]. Вместе с тем, при большей общности, они менее точны в рассматриваемых нами частных случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян, Р. С. О допустимой скорости стремления к нулю гауссовой кривизны минимальной поверхности над полосообразной областью / Р. С. Акопян // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 2. — С. 4–8.

2. Акопян, Р. С. Теоремы типа Фрагмена — Линделефа для минимальной поверхности над полосообразной областью / Р. С. Акопян // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 2. — С. 6–12.

3. Миклюков, В. М. Некоторые вопросы качественной теории уравнений типа минимальной поверхности / В. М. Миклюков // Граничные задачи математической физики. — Киев : Наукова думка, 1983. — С. 137–146.

4. Осерман, Р. Минимальные поверхности / Р. Осерман // Успехи мат. наук. — 1967. — Т. XXII, № 4. — С. 55–136.

5. Пелих, В. И. Теоремы Фрагмена — Линделефа на минимальных поверхностях / В. И. Пелих // Геометрический анализ и его приложения: Научные школы ВолГУ. — 1999. — № 1. — С. 352–368.

REFERENCES

1. Akopyan R.S. O dopustimoy skorosti stremleniya k nulyu gaussovoy krivizny minimalnoy poverkhnosti nad polosoobraznoy oblastyu [On the Admissible Speed of Approaching to Zero of Gaussian Curvature of Minimal Surface Over Strip Domain]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarctvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics]. 2012, no. 2, pp. 4–8.

2. Akopyan R.S. Teoremy tipa Fragmena — Lindelefa dlya minimalnoy poverkhnosti nad polosoobraznoy oblastyu [Theorems Fragmen–Lindelef Type for the Minimal Surface Over Strip Domain]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarctvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics]. 2013, no. 2, pp. 6–12.

3. Miklyukov V.M. Nekotorye voprosy kachestvennoy teorii uravneniy tipa minimalnoy poverkhnosti [Some Issues of Quality Theory on the Equations of Minimal Surface Type]. *Granichnye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1983, pp. 137–146.

4. Oserman R. Minimalnye poverkhnosti [Minimal surfaces]. *Uspekhi mat. nauk* [Russian Mathematical Surveys]. 1967, vol. XXII, no. 4, pp. 55–136.

5. Pelikh V.I. Teoremy Fragmena — Lindelefa na minimalnykh poverkhnostyakh [Theorems of Fragmen — Lindelef on Minimal Surfaces]. *Geometricheskiy analiz i ego prilozheniya: Nauchnye shkoly VolGU* [Geometrical Analysis and Its Applications: Scientific Schools of VolSU]. 1999, no. 1, pp. 352–368.

SOME ESTIMATES OF THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE MINIMAL SURFACE OVER STRIP DOMAIN

Akopyan Ripsime Sergoevna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Higher Mathematics,
Volgograd State Agricultural University
akrim111@yandex.ru
Prosp. Universitetsky, 26, 400002 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The solutions of equation of the minimal surfaces given over unbounded domains were studied in many works (for example, see [1 - 3; 5]) dealing with various problems of asymptotic behavior of the minimal surfaces, including the questions of admissible speed of stabilization and the theorem by Fragmen — Lindelef. The object of the present research is solution of equations of the minimal surfaces given over strip domains of special type and satisfying some zero boundary values. The author estimates the possible asymptotic behavior of Gaussian curvature using the traditional for such kind of problems approach consisting in construction of auxiliary conformal mapping, the appropriate properties of which are investigated. Two special cases are studied.

Let $z = f(x, y)$ be the C^2-solution of the equation of minimal surfaces (1) given over strip domain $\Pi = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < +\infty,\ -\varphi(x) < y < \varphi(x)\}$, where $\varphi(x)$ — continuously differentiable function. Let us denote by the symbols $\partial'\Pi$ and $\partial''\Pi$ sectors of the boundary $\partial\Pi$:

$$\partial'\Pi = \partial\Pi \cap \{(x, y) \in R^2 : x = 0\}, \quad \partial''\Pi = \partial\Pi \setminus \partial'\Pi.$$

Assume that the solution $z = f(x, y)$ satisfies the conditions (i) and (ii).

For the Gaussian curvature of minimal surfaces $K(x, y)$ the following theorems are suggested:

Theorem 1. Let $\nu(x)$ — positive, non-decreasing continuous on $(0, +\infty)$ the function to which

$$\int_0^{+\infty} \nu(x) e^{-\sigma(x)} \frac{dx}{\mu(x)} = +\infty, \qquad \text{где } \sigma(x) = \pi \int_0^x \frac{dt}{\mu(t)}.$$

Then, if everywhere in Π executed

$$\log(-K(x,y)) \leq -\nu(x),$$

then $f(x,y) \equiv const$.

Let $\lambda(x) = \pi \int\limits_0^x \frac{1+\frac{1}{12}\mu'^2(t)}{\mu(t)}\,dt$.

Theorem 2. Let L — curve starting at any endpoint of the border domain Π and goes to infinity, remaining in Π.

If $K(x,y)$ is bounded in $\overline{\Pi}$, and

$$\frac{\log(-K(x,y))}{e^{\lambda(x)}} \to -\infty, \qquad (x,y) \in L, \qquad x \to +\infty,$$

then $f(x,y) \equiv const$.

Similar results on the speed of approach to zero of Gaussian curvature the minimal surface were obtained in [1; 2]. However, in the considered special cases at the greater community, they are less exact.

Key words: equations of the minimal surfaces, strip domain, gaussian curvature, asymptotic behavior, holomorphic functions.