УДК 514.174.3
ББК 22.151.5

О ЛИНЕЙНЫХ ПРООБРАЗАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ ОРИЕНТАЦИЮ СИМПЛЕКСОВ

Клячин Владимир Александрович

Доктор физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики
Волгоградского государственного университета
klchnv@mail.ru, knem03@mail.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Чебаненко Никита Алексеевич

Аспирант кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики
Волгоградского государственного университета
windbagy@gmail.com, knem03@mail.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В статье описаны дифференциальные свойства непрерывных отображений $f : D \to R^n$, которые сохраняют ориентацию симплексов из некоторого, заранее данного подмножества множества $S(D)$.

Ключевые слова: ориентация треугольников, ориентация симплексов, линейные отображения, контингенция множества, монотонные отображения.

Классическая теорема Лебега [2] утверждает, что неубывающая функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ почти всюду дифференцируема. Это же справедливо и для любых монотонных функций. В многомерном случае понятие монотонности отображения является неоднозначным. Например, отображение $f : D \to R^n$ называется монотонным по Лебегу, если

$$\operatorname{osc}\{f, D'\} \le \operatorname{osc}\{f, \partial D'\}$$

для всякой подобласти $D' \subset D$. Здесь

$$\operatorname{osc}\{f, D'\} = \sup_{x,y \in D'} |f(x) - f(y)|.$$

В работе В.М. Миклюкова [1] было доказано, что монотонное по Лебегу отображение, принадлежащее весовому пространству Соболева, почти всюду имеет полный дифференциал при определенных условиях на весовую функцию. С другой стороны, понятию монотонности можно придать и другую форму.

Рассмотрим сначала одномерный случай. Будем говорить, что невырожденный отрезок $[P_0, P_1]$ числовой прямой имеет положительную ориентацию, если $P_0 < P_1$, и отрицательную ориентацию, если $P_0 > P_1$. Тогда функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, является неубывающей, если $f(x)$ сохраняет ориентацию каждого отрезка $[P_0, P_1] \subset [a, b]$. Пусть в $R^n, n \geq 1$ заданы точки $P_0, P_1, ..., P_n$. Выпуклую оболочку этих точек назовем симплексом $S = S(P_0, ..., P_n)$. Симплекс называется невырожденным, если векторы $P_1 - P_0, P_2 - P_0, ..., P_n - P_0$ линейно независимы или, что тоже самое,

$$\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, ..., P_n - P_0) \neq 0.$$

Здесь $\det(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ обозначает определитель матрицы, столбцами которой являются векторы $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \in R^n$.

Будем говорить, что невырожденный симплекс $S(P_0, P_1, ..., P_n)$ имеет положительную (отрицательную) ориентацию, если $\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, ..., P_n - P_0) > 0$ ($\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, ..., P_n - P_0) < 0$). Пусть $D \subset R^n$ — область. Обозначим через $S(D)$ совокупность всех симплексов с вершинами из области D.

Зададимся вопросом определения дифференциальных свойств непрерывных отображений $f : D \to R^n$, которые сохраняют ориентацию симплексов из некоторого, заранее данного подмножества множества $S(D)$. Обозначим множество непрерывных отображений $f : D \to R^n$, сохраняющих ориентацию симплексов $S \in B \subset S(D)$ через $C_B(D)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если отображение $f \in C_{S(D)}(D)$, то f — аффинное преобразование.*

Доказательство. Таким образом, нам нужно доказать, что если непрерывное отображение сохраняет ориентацию произвольного симплекса с вершинами из D, то оно представляет собой аффинное преобразование. Предположим противное. В таком случае найдется некоторая гиперплоскость $\Pi \subset R^n$, прообраз $f^{-1}(\Pi)$ которой не лежит ни в какой гиперплоскости. Тогда в прообразе можно найти невырожденный симплекс $S = S(P_0, ...P_n),\ P_i \in f^{-1}(\Pi),\ i = 0, 1, ..., n$. Заметим, что симплекс $S(f(P_0), f(P_1), ..., f(P_n))$ является вырожденным. Поскольку симлекс $S(P_0, P_1, ..., P_n)$ невырожденный, то найдется число $\delta > 0$ такое, что $|P_i - P_j| > \delta$ для всех $i \neq j, i, j = 0, ..., n$. Пусть ξ вектор единичной нормали к Π и $h > 0$ — произвольное число. Предположим, что $(n-1)$-мерный симплекс $S(f(P_0), ..., f(P_{n-1}))$ является невырожденным. Рассмотрим два симплекса $S(f(P_0), ..., f(P_n) \pm h\xi)$. Эти симплексы невырождены, причем имеют противоположные ориентации

$$\det(f(P_1) - f(P_0), ..., f(P_{n-1}) - f(P_0), f(P_n) - f(P_0) \pm h\xi) =$$

$$= \det(f(P_1) - f(P_0), ..., f(P_{n-1}) - f(P_0), f(P_n) - f(P_0)) \pm$$

$$\pm\, h \cdot \det((f(P_1) - f(P_0), ..., f(P_{n-1}) - f(P_0), \xi)) =$$

$$= \pm\, h \cdot \det((f(P_1) - f(P_0), ..., f(P_{n-1}) - f(P_0), \xi)).$$

В силу непрерывности f в точке P_n можно найти такое положительное $h > 0$, что прообразы $P_n^{\pm}$ точек $f(P_n) \pm h\xi$ лежат в δ-окрестности точки P_n. В силу выбора δ мы можем сделать вывод о том, что ориентации симплексов $S(P_0, ...P_{n-1}, P_n^{\pm})$ совпадают. А поскольку образы этих симплексов имеют противоположную ориентацию, то получаем противоречие с предположением $f \in C_{S(D)}(D)$. Если симплекс $S(f(P_0), ..., f(P_{n-1})$ окажется вырожденным, то в предположении невырожденности $(n-2)$-мерного симплекса $S(f(P_0), ..., f(P_{n-2}))$ будем еще сдвигать точку $f(P_{n-1})$ в плоскости Π вдоль нормали к симплексу $S(f(P_0), ..., f(P_{n-2}))$. Из похожих соображений найдем два симплекса противоположной ориентации, имеющих в прообразе симплексы одинаковой ориентации, что опять будет противоречить условию $f \in C_{S(D)}(D)$. Поступая по индукции, мы придем к случаю, когда $f(P_0) = f(P_1) = ... = f(P_n)$.

Пусть $e_1, ...e_n$ — ортонормированный базис в R^n и $h > 0$. Рассмотрим два симплекса с вершинами в точках $S(f(P_0) + he_1, ..., f(P_0) + he_{n-1}, f(P_0) \pm he_n)$. Ясно, что их ориентации противоположны. В силу непрерывности f в точке P_0 можно подобрать такое $h > 0$, что прообраз вершины $f(P_0) \pm he_i$ лежит в δ-окрестности точки P_i. В этом случае, как и выше, мы можем сделать вывод, что симплексы с вершинами, являющимися прообразами вершин $f(P_0)+he_1, ..., f(P_0)+he_{n-1}, f(P_0) \pm he_n$, имеют одинаковую ориентацию. Получим противоречие с условием $f \in C_{S(D)}(D)$. Значит прообраз всякой гиперплоскости лежит в некоторой гиперплоскости. Отсюда следует аффинность отображения f. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть некоторое подмножество симплексов $H \subset S(D)$ открыто и $f \in C(D)$. Рассмотрим некоторую гиперплоскость $L \subset R^n$. Тогда не существует симплекса $S(P_0, .., P_n) \in H$ такого, что $P_i \in f^{-1}(L)$ для $i = 0, 1, ..., n$.*

Доказательство. Предположим противное, то есть предположим, что найдется $S(P_0, .., P_n) \in H$ такой, что $P_i \in f^{-1}(L)$ $i = 0, 1, ..., n$.

Пусть $P'_i = f(P_i)$. Тогда $S(P'_0, ..., P'_n)$ — вырожденный симплекс. Для всех $\varepsilon > 0$, не ограничивая общности, будем считать, что симплексы

$$S^{\pm} = S(P'_0, ..., P'_{n-1}, P'_n \pm \varepsilon\xi), \text{ где } \xi \text{ — нормаль к } L$$

невырождены. Ясно, что ориентации этих симплексов противоположны. Положим

$$M^{\pm} = \bigcup_{1 \geq \varepsilon \geq 0} \{x \in f^{-1}(P'_n \pm \varepsilon\xi)\}.$$

Множества $M^{\pm}$ замкнуты, причем $P_n \in M^{\pm}$.

Рассмотрим окрестность $V(P_n)$ точки P_n, такую, что $\forall P \in V(P_n)$ симплекс $S(P_0, ..., P_{n-1}, P)$ имеет ту же ориентацию, что и симплекс $S(P_0, ..., P_n)$. Поскольку множество H открыто, то найдется окрестность $U(S(P_0, ..., P_n)) \subset H$. В частности, можно найти такую окрестность $V'(P_n) \subset V(P_n)$, что $\forall P \in V'(P_n)$ $S(P_0, ..., P_{n-1}, P) \in U(S(P_0, ..., P_n))$.

Пусть

$$P^+ \in M^+ \cap \{V'(P_n) \backslash P_n\},$$

$$P^- \in M^- \cap \{V'(P_n) \backslash P_n\}.$$

Таким образом, симплексы $S(P_0, ..., P_{n-1}, P^+)$ и $S(P_0, ..., P_{n-1}, P^-)$ принадлежат H и имеют одинаковую ориентацию. Так как $P^\pm \in M^\pm$, то $\exists \varepsilon_+, \varepsilon_- > 0$ такие, что $f(P^+) = P'_n + \varepsilon_+ \cdot \xi$, $f(P^-) = P'_n - \varepsilon_- \cdot \xi$. Но симплексы $S(P'_0, ..., P'_{n-1}, P'_n + \varepsilon_+ \cdot \xi)$ и $S(P'_0, ..., P'_{n-1}, P'_n - \varepsilon_- \cdot \xi)$ имеют разные ориентации. Таким образом, мы пришли к противоречию с условием теоремы о том, что $f \in C(H)$. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению случая $n = 2$. Рассмотрим два числа $\pi/2 < \alpha < \beta < \pi$. Через $S_{\alpha,\beta}(D) \subset S(D)$ обозначим множество треугольников с тупым углом γ таким, что $\alpha < \gamma < \beta$.

Теорема 3. *Пусть отображение $f \in C_{S_{\alpha,\beta}(D)}(D)$, где D область в R^2. Тогда, если прообраз прямой $L \subset R^2$ нигде не плотен, то он представим в виде объединения счетного или конечного числа локально-липшицевых кривых.*

Доказательство. Пусть L — прямая и ее прообраз $f^{-1}(L)$ нигде не плотен. Из теоремы 2 видно, что на прообразе нельзя найти тройку точек P_0, P_1, P_2, образующую треугольник из $S_{\alpha,\beta}(D)$. Из этого следует, что контингенция множества $f^{-1}(L)$ в любой своей точке не может содержать два луча с углом γ между ними, для которого выполняется неравенство $\pi - \beta < \gamma < \pi - \alpha$. Значит в каждой точке контингенция множества $f^{-1}(L)$ не есть вся плоскость. Тогда, согласно теореме 3.6 из [3], получаем требуемое утверждение непосредственно.

Результаты данной работы анонсированы в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миклюков, И. П. Введение в негладкий анализ / И. П. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — 422 с.

2. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — М. : Наука, 1974. — 480 с.

3. Сакс, С. Теория интеграла / С. Сакс. — М. : Изд-во иностр. лит., 1949. — 495 с.

4. Чебаненко, Н. А. О линейных прообразах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию треугольников / Н. А. Чебаненко, В. А. Клячин // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии. — 2013. — № 8. — С. 6–10.

REFERENCES

1. Miklyukov I.P. *Vvedenie v negladkiy analiz* [Introduction to Nonsmooth Analysis]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2008. 422 p.

2. Natanson I.P. *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of Real Variable]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p.

3. Saks C. *Teoriya integrala* [The Theory of Integral]. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1949. 495 p.

4. Chebanenko N.A., Klyachin V.A. O lineynykh proobrazakh nepreryvnykh otobrazheniy, sokhranyayushchikh orientatsiyu treugolnikov [About Linear Prototypes of Continuous Maps, Which Preserve Orientation of Triangles]. *Nauchnaya diskussiya: voprosy matematiki, fiziki, khimii, biologii*. 2013, no. 8, pp. 6–10.

ABOUT LINEAR PREIMAGES OF CONTINUOUS MAPS, THAT PRESERVE ORIENTATION OF TRIANGLES

Klyachin Vladimir Aleksandrovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Computer Science and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
klchnv@mail.ru, knem03@mail.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Chebanenko Nikita Alekseevich

Postgraduate Student, Department of Computer Science and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
windbagy@gmail.com, knem03@mail.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The article describes the differential properties of continuous mappings $f : D \to R^n$, which retain the orientation of some simplexes in advance of this subset of $S(D)$. Such mappings represent a natural generalization of the class of monotone functions of one variable. In this paper we prove that the mapping monotonic in this sense have to be affine. In addition, we prove a generalization of this result, provided that the map preserves the orientation of an open family of simplexes. As a consequence, we obtain a result on the structure of the inverse image of a straight monotone mapping of plane. Namely, the main result is Theorem.

Theorem *Let $f : D \to R^2$ be mapping preserves the orientation of triangles with obtuse angle $\gamma, \pi/2 < \alpha < \gamma < \beta < \pi$. Then if the inverse image of a straight line L is nowhere dense, then L is union of a finite or countable number of locally Lipschitz curves.*

Key words: orientation of triangle, orientation of simplex, linear maps, set contingency, monotone mappings.