УДК 517.5
ББК 22.161.5

О РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Севостьянов Евгений Александрович
Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института прикладной математики и механики
Национальной академии науки Украины
esevostyanov2009@mail.ru
ул. Розы Люксембург, 74, 83114, г. Донецк, Украина

Доля Дарья Сергеевна
Аспирант Института прикладной математики и механики
Национальной академии науки Украины
dasha.dolja@mail.ru
ул. Розы Люксембург, 74, 83114, г. Донецк, Украина

Аннотация. В работе изучен некоторый класс пространственных отображений, удовлетворяющих определенным геометрическим оценкам относительно некоторой внешней меры (конформного модуля семейств кривых). Доказано свойство равностепенной непрерывности указанных классов вплоть до границы в случае, когда соответствующая мажоранта, отвечающая за искажение модуля семейств кривых, имеет свойство конечного среднего колебания в соответствующих точках, а также и некоторых других условиях.

Ключевые слова: отображения с ограниченным и конечным искажением, граничные свойства пространственных отображений, равностепенная непрерывность, непрерывное продолжение на границу.

Введение

Настоящая работа посвящена изучению отображений с конечным искажением, активно изучаемых в последнее время и являющихся обобщением отображений с ограниченным искажением по Решетняку [7]. Относительно отображений с конечным искажением см. также источники [5; 11–15].

В данной статье получено некоторое усиление одного результата, касающегося равностепенной непрерывности в замыкании области так называемых Q-гомеоморфизмов, являющихся подвидом отображений с конечным искажением [8]. Кольцевые Q-гомеоморфизмы, рассматриваемые в заметке, являются более общими отображениями, чем квазиконформные в смысле известного неравенства Полецкого: $M(f(\Gamma)) \le K \cdot M(\Gamma)$, $K = \mathrm{const} < \infty$, $K \ge 1$. Методы доказательства, приведенные здесь, в целом аналогичны подходу, использованному в [8], однако детали доказательства все же несколько отличаются. В частности, здесь нами использованы некоторые дополнительные факты из недавно вышедшей монографии [2] (см. еще работу [21]). Отметим также, что для квазиконформных отображений вопросы равностепенной непрерывности семейств отображений в замыкании области рассмотрены значительно ранее (см., например: [10; 18; 22]).

Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, m — мера Лебега $\mathbb{R}^n$, а запись $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f, заданное в области D, непрерывно. *Континуумом* называется связный компакт $A \subset \mathbb{R}^n$. *Кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (либо интервала вида (a, b), $[a, b)$ или $(a, b]$) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Под *семейством кривых* Γ подразумевается некоторый набор кривых $\gamma \in \Gamma$; при этом $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Следующие определения могут быть найдены, например, в [22, гл. I, разд. 1– 6]. Борелевская функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$

$$\int_\gamma \rho(x)\,|dx| \ge 1\,. \tag{1}$$

В этом случае мы пишем: $\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma} \int_D \rho^n(x)\,dm(x).$$

При этом, если $\mathrm{adm}\,\Gamma = \varnothing$, полагаем $M(\Gamma) = \infty$ (см. [22, разд. 6, с. 16]). Отметим, что $\mathrm{adm}\,\Gamma = \varnothing$ в том и только том случае, если семейство Γ содержит постоянную кривую γ_0; в этом случае для этой кривой соотношение (1) не выполнено ни для какой борелевской неотрицательной функции ρ, так как $\int_{\gamma_0} \rho(x)\,|dx| = 0 < 1$. (Здесь кривая $\gamma_0 = \gamma_0(t), t \in (0, 1)$, называется постоянной, если $\gamma_0(t) = \mathrm{const}$ при всех $t \in (0, 1)$). Напомним некоторые хорошо известные свойства модуля M [22, теорема 6.2]: $M(\varnothing) = 0$; $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M(\Gamma_1) \le M(\Gamma_2)$; $M\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$. Исходя из написанного выше, модуль M представляет собой внешнюю меру на пространстве семейств Γ всех кривых γ в $\mathbb{R}^n$. Гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ называется *K-квазиконформным* (либо просто *квазиконформным*), если при некотором $K \in [1, \infty)$

$$(1/K) \cdot M(\Gamma) \le M(f(\Gamma)) \le K \cdot M(\Gamma)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D. Отметим, что для квазиконформности f достаточно, чтобы выполнялось только одно неравенство $M(f(\Gamma)) \le K \cdot M(\Gamma)$ (см.: [22, гл. IV, теорема 34.3]).

Граница ∂D области $D \subset \mathbb{R}^n$ и замыкание $\overline{D}$ области D понимаются далее исключительно в смысле расширенного пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$. Пусть E, $F \subset \mathbb{R}^n$ — произвольные множества. Обозначим символом $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, то есть $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Здесь и далее

$$A(r_1, r_2, x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,, \tag{2}$$

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}, \mathbb{B}^n := B(0, 1),$$

$\Omega_n = m(\mathbb{B}^n)$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A, B)$ означает евклидово расстояние между множествами A, $B \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam} A$ — евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Исходя из упомянутого выше критерия квазиконформных отображений в виде искажения модуля семейств кривых не более чем в конечное число раз, введем в рассмотрение следующую более общую конструкцию (см.: [19, гл. 7, разд. 7.6; 20]). Пусть $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$. Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$, $x_0 \neq \infty$, если для некоторого $r_0 = r(x_0)$ и произвольных радиусов r_1 и r_2, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = r(x_0)$, сферического кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, центрированного в точке x_0, и любых континуумов $E_1 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \cap D$ и $E_2 \subset (\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(x_0, r_2)) \cap D$ гомеоморфизм f удовлетворяет соотношению

$$M(f(\Gamma(E_1, E_2, D))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{3}$$

для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) \geq 1. \tag{4}$$

Как известно, все отображения с ограниченным искажением, а также квазиконформные отображения, удовлетворяют соотношению (3) с постоянной функцией Q (см.: [6, теорема 1, § 4]). Словосочетание «Q-гомеоморфизм» в данном определении указывает на вещественнозначную функцию Q в правой части (3), а слово «кольцевой» — на происхождение соответствующего семейства кривых, входящего в левую часть (3).

Напомним, что область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subset U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ связно.

Пусть (X, d) и (X', d') — метрические пространства с расстоянием d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех $f \in \mathfrak{F}$ и всех $x \in X$ таких, что $d(x, x_0) < \delta$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f\colon X \to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к некоторому непрерывному отображению $f\colon X \to X'$ [22, п. 20.2]. Хорошо известно, что в произвольных метрических пространствах (X, d) и (X', d') любое нормальное семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X'$ равностепенно непрерывно. Обратное заключение [22, теорема 20.4] также верно, если пространство (X, d) сепарабельное, а (X', d') — компактное. Напомним, что *сферическое (хордальное)* расстояние между точками x и y в $\overline{\mathbb{R}^n}$ есть величина $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, x \neq \infty \neq y. \tag{5}$$

Хордальным диаметром множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина $h(E) = \sup\limits_{x, y \in E} h(x, y)$. Всюду далее, если не оговорено противное, в обозначениях, принятых выше, $X := D$ — область в $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) := |x - y|$, $X' := \overline{\mathbb{R}^n}$, $d' := h(x, y)$ (h — хордальная метрика).

Для областей $D,\ D' \subset \mathbb{R}^n$, $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$, $z_1',\ z_2' \in D'$ и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q(x) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, такой, что $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, обозначим символом $\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D, D')$ семейство всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : D \to D'$, удовлетворяющих неравенству (3) в замкнутой области $\overline{D}$, $f(D) = D'$, таких что

$$f(z_1) = z_1', \quad f(z_2) = z_2'\,. \tag{6}$$

(Другими словами, рассматривается семейство отображений в области D, которые a priori не заданы на ∂D, но так, что кольцевое условие (3) выполнено в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$. Такие отображения, вообще говоря, свойством непрерывного продолжения в граничные точки не обладают.)

Напомним, что *окрестностью* множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется произвольное множество B, такое, что $A \subset \operatorname{Int} B$, где $\operatorname{Int} B$ обозначает совокупность всех внутренних точек множества B. Будем говорить, что граница ∂D области D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдутся компакт $E \subset D$, окрестности $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geq \delta \tag{7}$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Заметим, что соотношение (7), в частности, выполнено, если в качестве F взять произвольную кривую, имеющую одним из своих концов точку x_0 и лежащую полностью в D, кроме, быть может, этой концевой точки. Граница области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *сильно достижимой*, если указанное выше свойство выполнено в каждой точке $x_0 \in \partial D$.

Еще одно понятие, необходимое нам для формулировки основного результата заметки — определение конечного среднего колебания вещественнозначных функций (введено А. Игнатьевым и В. Рязановым в работе [1]). Это понятие обобщает свойство функций ограниченного среднего колебания по Джону — Ниренбергу (см. [16]). Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\ \ \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\ dm(x)\ <\ \infty\,,$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)} \varphi(x)\ dm(x)$. Например, функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, если в точке $x_0 \in D$ выполнено: $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}}\ \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(x)|\, dm(x) < \infty$. Введем следующие обозначения: для фиксированной измеримой по Лебегу функции $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ запись вида $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x-x_0|=r} Q(x)\, dS, \tag{8}$$

где ω_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, dS — элемент площади поверхности S. Обозначим через $q_{x_0}^*(r)$ среднее значение функции

$$Q^*(x) = \begin{cases} Q(x), & Q(x) \geq 1, \\ 1, & Q(x) < 1 \end{cases}$$

по сфере $S(x_0, r)$, определенное соотношением (8).

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что D локально связна во всех граничных точках, $\partial D'$ сильно достижима, а заданная функция $Q(x)$ в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: 1) $Q(x) \in FMO(x_0)$; 2) $q_{x_0}(r) = O([\log \frac{1}{r}]^{n-1})$ при $r \to 0$; 3) при некотором $\delta(x_0) > 0$*

$$\int_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t{q_{x_0}^*}^{1/(n-1)}(t)} = \infty\,. \tag{9}$$

Тогда каждый элемент $f \in \mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D, D')$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$, при этом семейство $\overline{\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D, D')}$, состоящее из всех продолженных таким образом отображений, является равностепенно непрерывным, а значит, и нормальным в $\overline{D}$.

1. Формулировка и доказательство основной леммы

Следующее утверждение можно найти, например, в [19, гл. 7, лемма 7.6].

Предложение 1. *Пусть $x_0 \in D$, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — гомеоморфизм, удовлетворяющий в точке x_0 соотношениям вида (3)–(4) при некоторой измеримой функции Q. Предположим, что найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, $\varepsilon_0 < r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, такое, что при некотором $p \in (0, n]$, постоянной $K > 0$ и $\varepsilon \to 0$ справедливо неравенство*

$$\int_{A(\varepsilon,\varepsilon_0,x_0)} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) \le K \cdot I^p(\varepsilon, \varepsilon_0), \tag{10}$$

где сферическое кольцо $A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)$ определено в (2), а ψ — некоторая положительная борелевская функция, определенная на $(0, \infty)$, такая, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнено условие

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty. \tag{11}$$

Пусть, кроме того, существует $\delta > 0$ такое, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \ge \delta$. Тогда

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|)\} \tag{12}$$

для всех $x \in B(x, x_0)$, где α_n — некоторая постоянная, $\beta_n = (\frac{\omega_{n-1}}{K})^{1/(n-1)}$, $\gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1}$.

Замечание. Предположим, что в условиях предложения 1 имеем $p < n$ и $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(x_0)$, состоящее из всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, таких что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \ge \delta$, равностепенно непрерывно в точке x_0.

Действительно, если по предложению $p < n$, то $\frac{p-1}{n-1} < 1$ и, следовательно, $\gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1} > 0$. Тогда $I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|, \varepsilon_0) \to \infty$ при $x \to x_0$ и, значит, правая часть соотношения (12) стремится к нулю при $x \to x_0$. Отсюда следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что условие $|x - x_0| < \delta$ влечет $h(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Это и означает непрерывность семейства отображений $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(x_0)$ в точке x_0.

Если, кроме того, сказанное выше справедливо для любой точки $x_0 \in D$, то соответствующее семейство отображений нормально в D ввиду теоремы Арцела — Асколи.

Замечание. Пусть $\sigma_{Q,\delta}$ — семейство всех гомеоморфизмов $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$, удовлетворяющих в области D условию (3) и (4), таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D))\geq\delta>0$ при некотором δ. Предположим, что для каждой точки $x_0\in D$ найдется $\varepsilon_0=\varepsilon(x_0)>0$ такое, что выполнено соотношение (10) для некоторой измеримой функции ψ, удовлетворяющей (11), причем $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$ и $p<n$. Тогда в силу предложения 1 и сделанного выше замечания семейство $\sigma_{Q,\delta}$ образует нормальное семейство отображений в D. Также, если $f_m\in\sigma_{Q,\delta}$ сходится к некоторому непрерывному отображению f в D при $k\to\infty$ локально равномерно, то f является либо гомеоморфизмом, либо константой в D (см.: [2, лемма 1.6; 21, теоремы 4.1–4.2]).

Следующее утверждение содержит в себе информацию о возможности непрерывного продолжения на границу гомеоморфизмов, удовлетворяющих соотношению (3) (см.: [9, лемма 4]).

Предложение 2. *Пусть $x_0\in\partial D$, $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — гомеоморфизм, удовлетворяющий в точке x_0 соотношению* (3)–(4). *Предположим, что найдется $\varepsilon_0=\varepsilon(x_0)>0$ такое, что выполнено соотношение* (10) *при $p\in(0,n)$ для некоторой измеримой функции ψ, удовлетворяющей* (11), *причем $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$. Предположим, что D локально связна в точке x_0, а граница $\partial D'$ области $D'=f(D)$ сильно достижима. Тогда отображение f продолжается по непрерывности в точку x_0.*

Следующее утверждение, установленное ранее Някки для границ несколько иного типа (см.: [17, теорема 1.16]), доказано Е. Севостьяновым для сильно достижимых границ (см.: [8, лемма 4.1]).

Предложение 3. *Пусть $x_0\in\partial D$, $x_0\neq\infty$, и для любой окрестности U точки x_0 найдутся компакт $E\subset D$, окрестность $V\subset U$ точки x_0 и число $\delta>0$ такие, что соотношение* (7) *выполнено для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Тогда для любой окрестности U точки x_0 и произвольного континуума $E^*\subset D$ найдутся окрестность $V\subset U$ точки x_0 и число $\delta^*>0$ такие, что $M(\Gamma(E^*,F,D))\geq$ $\geq\delta^*$ для каждого континуума F в D такого, что $F\cap\partial U\neq\varnothing\neq F\cap\partial V$.*

Основную смысловую нагрузку настоящей статьи несет в себе следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть область D локально связна в любой точке своей границы, а граница $\partial D'$ сильно достижима. Предположим, что найдется $\varepsilon_0=\varepsilon(x_0)>0$ такое, что выполнено* (10) *для некоторой измеримой функции $\psi(t)>0$, удовлетворяющей* (11), *при этом $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$ и $0<p<n$. Тогда каждый элемент $f\in\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D')$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{f}\colon\overline{D}\to\overline{D'}$, при этом семейство $\overline{\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D')}$, состоящее из всех продолженных таким образом отображений, является равностепенно непрерывным, а значит, и нормальным в $\overline{D}$.*

Доказательство. В силу предложения 1 и последующих за ним замечаний имеет место равностепенная непрерывность семейства $\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D')$ внутри области D. Возможность продолжения каждого элемента f семейства $\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D')$ до непрерывного отображения в замыкании D есть результат предложения 2.

Осталось показать, что семейство $\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D')$ (для удобства обозначения не меняем) равностепенно непрерывно в точках ∂D. Предположим противное. Тогда найдутся $x_0 \in \partial D$ и число $a > 0$ такие, что для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существует точка $x_m \in \overline{D}$ и элемент f_m семейства $\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D, D')$ такие, что $|x - x_0| < 1/m$ и

$$h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geq a. \tag{13}$$

Ввиду возможности непрерывного продолжения каждого f_m на границу D, мы можем считать, что $x_m \in D$. Поскольку всякое замкнутое подмножество компактного пространства компактно [3, гл. IV, љ 47, теорема 2], множество $\overline{D'}$ является компактом в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Следовательно, существует последовательность номеров m_k и $y_0 \in \partial D'$ таких, что

$$h(f_{m_k}(x_0), y_0) \to 0 \tag{14}$$

при $k \to \infty$. Можно считать, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$h(f_{m_k}(x_0), y_0) \leq a/2\,. \tag{15}$$

Тогда из (13) и (15) и неравенства треугольника следует, что $h(f_{m_k}(x_{m_k}), y_0) \geq a/2$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В силу локальной связности области D в точке x_0 найдется последовательность окрестностей V_m точки x_0 с $\operatorname{diam} V_m \to 0$ при $m \to \infty$ такая, что множества $D \bigcap V_m$ представляют собой области и $x_{m_k} \in D \bigcap V_{m_k}$. Так как граничные точки области, локально связной на границе, являются достижимыми из D некоторым локально спрямляемым путем [19, гл. 13, предложение 13.2], можно соединить точки x_{m_k} и x_0 непрерывной кривой $\gamma_k(t)\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ такой, что $\gamma_k(0) = x_0$, $\gamma_k(1) = x_{m_k}$ и $\gamma_k(t) \in V_{m_k}$ при $t \in (0, 1)$. Обозначим через C_k образ кривой $\gamma_k(t)$ при отображении f_{m_k}. Ввиду нормальности семейства отображений $\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D, D')$ в D можно считать, что $f_{m_k} \to f$ при $k \to \infty$ локально равномерно в D. В таком случае, ввиду условий нормировки (6) и сделанных после предложения 1 замечаний, предельное отображение f является гомеоморфизмом в D. Так как граница $\partial D'$ сильно достижима, а C_k — последовательность континуумов в D' таких, что $h(C_k, y_0) \to 0$ при $k \to \infty$ (см. (14)), для любого континуума $C \subset f(D) \subset D'$, некоторого $\delta > 0$ и достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ согласно предложению 3 выполнено неравенство

$$M(\Gamma(C_k, C, D')) \geq \delta\,. \tag{16}$$

Поскольку f — гомеоморфизм, при $k \to \infty$ последовательность $f_{m_k}^{-1} \to f^{-1}$ сходится локально равномерно в $f(D)$, поэтому, ввиду включения $C \subset f(D)$, компакты $K_{m_k} :=$ $:= f_{m_k}^{-1}(C)$ при $k \to \infty$ сходятся к компакту $f^{-1}(C)$ в смысле хаусдорфовой метрики. Тогда, учитывая, что $x_0 \in \partial D$, имеем

$$\varepsilon_1 := \inf_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{dist}(x_0, f_{m_k}^{-1}(C)) > 0.$$

Полагаем $\varepsilon_2 := \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Пусть $\Gamma_{\varepsilon,k}$ — семейство кривых, соединяющих шар $B(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, с компактом K_{m_k}.

Так как $\psi(t) > 0$ почти всюду по условию, $I(\varepsilon, \varepsilon_2) := \int_\varepsilon^{\varepsilon_2} \psi(t)\,dt > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$. Тогда функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_2), & t \in (\varepsilon, \varepsilon_2), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_2), \end{cases}$$

определена корректно и является измеримой по Лебегу. Имеем:

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_2} \eta(t)\,dt = \frac{1}{I(\varepsilon,\varepsilon_2)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_2} \psi(t)\,dt = 1.$$

Следовательно, в силу (3) и (10)

$$\begin{aligned} M(f_{m_k}(\Gamma_{\varepsilon,k})) &\le \int_{A(\varepsilon,\varepsilon_2,x_0)} Q(x)\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x) \\ &= \frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_2)} \int_{A(\varepsilon,\varepsilon_2,x_0)} Q(x)\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) \\ &\le \frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_2)} \int_{A(\varepsilon,\varepsilon_0,x_0)} Q(x)\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) \\ \le \frac{K\cdot I^p(\varepsilon,\varepsilon_0)}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_2)} &= K\left(1+\frac{I(\varepsilon_2,\varepsilon_0)}{I(\varepsilon,\varepsilon_2)}\right)^p \cdot I^{p-n}(\varepsilon,\varepsilon_2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$M(f_{m_k}(\Gamma_{\varepsilon,k})) \to 0 \tag{17}$$

при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ при больших k имеет место включение $D \cap V_{m_k} \subset B(x_0,\varepsilon)$; таким образом, $C_k \subset f_{m_k}(B(x_0,\varepsilon))$. Кроме того, при тех же $k \in \mathbb{N}$ имеем $\Gamma(C_k,C,D') \subset f_{m_k}(\Gamma_{\varepsilon,k})$. Следовательно, в силу (17) и свойства монотонности модуля семейств кривых, мы получаем, что

$$M(\Gamma(C_k,C,D')) \le M(f_{m_k}(\Gamma_{\varepsilon,k})),$$

откуда, согласно (16), вытекает, что при всех $k \ge k_0 = k_0(\varepsilon)$ и произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$

$$M(f_{m_k}(\Gamma_{\varepsilon,k})) \ge \delta\,. \tag{18}$$

Однако неравенство (18) противоречит соотношению (17). Полученное противоречие указывает на то, что изначальное предположение об отсутствии равностепенной непрерывности рассматриваемого семейства было неверным.

Доказательство следующего утверждения можно найти, например, в работе [8, лемма 5.1].

Предложение 4. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, равная тождественно нулю вне D, $x_0 \in \overline{D}$ и выполнено хотя бы одно из условий: 1) $Q(x) \in FMO(x_0)$; 2) $q_{x_0}(r) = O([\log \frac{1}{r}]^{n-1})$ при $r \to 0$; 3) при некотором $\delta(x_0) > 0$ выполнено условие (9).*

Тогда найдутся $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и функция $\psi(t) > 0$ такие, что в точке x_0 выполнены условия (10) *и* (11) *при $p < n$. При этом для указанной функции ψ в обозначениях, принятых выше, $I(\varepsilon,\varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство теоремы 1 немедленно следует из леммы 1 и предложения 4.

2. Некоторые примеры и замечания

Приложения результатов, связанных с исследованием кольцевых Q-гомеоморфизмов, касаются, прежде всего, изучения классов Соболева [4].

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, n\}$ — открытый n-мерный интервал. Напомним, что отображение $f : I \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACL (*абсолютно непрерывно на линиях*), если f абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах в I, параллельных координатным осям. Отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACL в G, когда сужение $f|_I$ принадлежит классу ACL для каждого интервала $I, \overline{I} \subset G$. Такие отображения почти всюду имеют обычные частные производные по каждой из переменных, при этом будем говорить, что $f \in W^{1,1}_{loc}$, если каждая такая частная производная локально интегрируема в G [4]. Если, кроме того, указанные частные производные локально интегрируемы в степени $p \geq 1$, пишем $f \in W^{1,p}_{loc}$ [там же].

Пусть отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ имеет почти всюду частные производные в области D. Полагаем $\|f'(x)\| = \max\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$, $\quad l\,(f'(x)) = \min\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$, Напомним, что *внутренней дилатацией* $K_I(x, f)$ отображения f в точке x называется величина

$$K_I(x,f) \quad = \quad \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n}, & J(x,f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в остальных случаях} \end{cases} .$$

Для областей D, $D' \subset \mathbb{R}^n$, $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$, z_1', $z_2' \in D'$ и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q(x) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, такой, что $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, обозначим символом $\mathfrak{A}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D, D')$ семейство всех гомеоморфизмов $f \in W^{1,n}_{loc}$, таких, что $f^{-1} \in W^{1,n}_{loc}$, $f(D) = D'$, $K_I(x, f) \leq Q(x)$ и

$$f(z_1) = z_1', \quad f(z_2) = z_2'\,.$$

Поскольку каждое отображение $f \in W^{1,n}_{loc}$ такое, что $f^{-1} \in W^{1,n}_{loc}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в произвольной точке $x_0 \in \overline{D}$ (см.: [19, теоремы 8.1 и 8.6; 20, теоремы 4.6 и 6.10]), из теоремы 1 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что D локально связна во всех граничных точках, $\partial D'$ сильно достижима, а заданная функция $Q(x)$ в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: 1) $Q(x) \in FMO(x_0)$; 2) $q_{x_0}(r) = O([\log \frac{1}{r}]^{n-1})$ при $r \to 0$; 3) при некотором $\delta(x_0) > 0$ имеет место соотношение (9). Тогда каждый элемент $f \in \mathfrak{A}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D, D')$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{f} \colon \overline{D} \to \overline{D'}$, при этом семейство $\overline{\mathfrak{A}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D, D')}$, состоящее из всех продолженных таким образом отображений, является равностепенно непрерывным, а значит, и нормальным в $\overline{D}$.*

Чтобы привести еще один важный результат, касающийся приложения основного утверждения заметки, дадим определения классов Орлича — Соболева.

Пусть $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — неубывающая функция, f — локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{loc}$, $i = 1, \ldots, m$. Будем говорить, что $f : D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W^{1,\varphi}_{loc}$, пишем

$f \in W^{1,\varphi}_{loc}$, если

$$\int\limits_G \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\, dm(x) < \infty\,,$$

для любой компактной подобласти $G \subset D$, где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$. Класс $W^{1,\varphi}_{loc}$ называется классом *Орлича — Соболева*.

Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, пишем $f \in FD$, если $f \in W^{1,1}_{loc}(D)$ и для некоторой функции $K(x) : D \to [1, \infty)$ выполнено условие $\|f'(x)\|^n \le K(x)\cdot|J(x,f)|$ при почти всех $x \in D$ (см.: [15, п. 6.3, гл. VI]). Для отображений с конечным искажением корректно определена и почти всюду конечна так называемая *внешняя дилатация* $K_O(x,f)$ отображения f в точке x, определяемая соотношением

$$K_O(x,f) \quad = \quad \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}, & J(x,f)\ne 0,\\ 1, & f'(x)=0,\\ \infty, & \text{в остальных случаях}\end{cases}.$$

Заметим, что произвольный гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{loc}$, для которого $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{loc}$ и

$$\int\limits_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \tag{19}$$

(условие Кальдерона на функцию φ), является кольцевым Q-гомеоморфизмом в произвольной точке $x_0 \in \overline{D}$ при $Q := K^{n-1}_O(x,f)$ (см.: [2, гл. 8, следствие 8.10; 21, теорема 14.2]).

Для областей $D,\ D' \subset \mathbb{R}^n$, $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \ne z_2$, z_1', $z_2' \in D'$, неотрицательной неубывающей функции $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q(x) : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, такой, что $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, обозначим символом $\mathfrak{B}_{\varphi,z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D')$ семейство всех гомеоморфизмов $f \in W^{1,\varphi}_{loc}$, таких, что $f(D) = D'$, $K^{n-1}_O(x,f) \le Q(x)$ и

$$f(z_1) = z_1', \quad f(z_2) = z_2'\,.$$

Ввиду сказанного выше, из теоремы 1 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что D локально связна во всех граничных точках, $\partial D'$ сильно достижима, φ удовлетворяет условию Кальдерона (19), а заданная функция $Q(x)$ в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: 1) $Q(x) \in FMO(x_0)$; 2) $q_{x_0}(r) = O([\log\frac{1}{r}]^{n-1})$ при $r \to 0$; 3) при некотором $\delta(x_0) > 0$ имеет место соотношение (9). Тогда каждый элемент $f \in \mathfrak{B}_{\varphi,z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D')$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$, при этом семейство $\overline{\mathfrak{B}_{\varphi,z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D')}$, состоящее из всех продолженных таким образом отображений, является равностепенно непрерывным, а значит, и нормальным в $\overline{D}$.*

Отметим, что приводимые в статье условия равностепенной непрерывности (нормальности) семейств отображений, в некотором смысле, не могут быть улучшены. Следующая теорема показывает, что требования на функцию Q из теоремы 1 (более общо, требования (10)–(11)) нельзя заменить более простым условием $Q(x) \in L^p$ ни для какого (сколь угодно большого) $p \geq 1$.

Полагаем $D := \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, $D' := B(0,2) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathfrak{A}_Q$ семейство всех кольцевых гомеоморфизмов $g : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству (3) в замкнутой области $\overline{D}$, таких что $D' = g(D)$.

Теорема 4. *Для каждого $p \geq 1$ существуют функция $Q : \mathbb{B}^n \to [1, \infty]$, $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$ и последовательность $g_m \in \mathfrak{A}_Q$, такие, что каждое g_m продолжается в точку $x_0 = 0$ по непрерывности и, при этом, семейство $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в точке $x_0 = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим следующий пример. Зафиксируем числа $p \geq 1$ и $\alpha \in (0, n/p(n-1))$. Можно считать, что $\alpha < 1$ в силу произвольности выбора p. Зададим последовательность гомеоморфизмов $g_m : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$g_m(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|} \cdot x\,, & 1/m \leq |x| \leq 1, \\ \frac{1+(1/m)^{\alpha}}{(1/m)} \cdot x\,, & 0 < |x| < 1/m\,. \end{array} \right.$$

Заметим, что каждое отображение g_m переводит проколотый шар $D = \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ в кольцо $D' = B(0,2) \setminus \{0\}$, которое, как известно, сильно достижимо. Кроме того, заметим, что точка $x_0 = 0$ является устранимой особенностью каждого g_m, $m \in \mathbb{N}$, причем $\lim\limits_{x \to 0} g_m(x) = 0$, и что последовательность g_m постоянна при $|x| \geq 1/m$, а именно, $g_m(x) \equiv g(x)$ при всех $x : \frac{1}{m} < |x| < 1$, $m = 1, 2 \ldots$, где $g(x) = \frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|} \cdot x$. Заметим, что $g_m \in ACL(\mathbb{B}^n)$. Действительно, отображения $g_m^{(1)}(x) = \frac{1+(1/m)^{\alpha}}{(1/m)} \cdot x$, $m = 1, 2, \ldots$, являются отображениями класса C^1, скажем, в шаре $B(0, 1/m + \varepsilon)$ при малых $\varepsilon > 0$, а отображения $g_m^{(2)}(x) = \frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|} \cdot x$ — отображениями класса C^1, скажем, в кольце $A(1/m - \varepsilon, 1, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : 1/m - \varepsilon < |x| < 1\}$ при малых $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает, что гомеоморфизмы g_m являются липшицевыми в $\mathbb{B}^n$ и, значит, $g_m \in ACL(\mathbb{B}^n)$ (см., например: [22, разд. 5 на с. 12]). Далее, вычисляя $K_I(x, f)$ для $f := g_m$, можно показать, что

$$K_I(x, g_m) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{1+|x|^{\alpha}}{\alpha |x|^{\alpha}}\right)^{n-1}, & 1/m \leq |x| \leq 1, \\ 1\,, & 0 < |x| < 1/m\,, \end{array} \right.$$

см. [19, гл. 6, предложение 6.3].

Заметим, что при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$, $K_I(x, g_m) \leq c_m$ при некоторой постоянной $c_m \geq 1$. Значит, $g_m \in W_{loc}^{1,n}(\mathbb{B}^n)$ и $g_m^{-1} \in W_{loc}^{1,n}(B(0,2))$, поскольку условие $K_I(x, g_m) \leq c_m$ влечет, что g_m и g_m^{-1} квазиконформны (см., например: [22, следствие 13.3 и теорема 34.6]). Тогда [19, гл. 6, теорема 6.1] гомеоморфизмы g_m удовлетворяют в области $D = \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ неравенству вида $M(f(\Gamma)) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x)\, dm(x)$ для произвольных семейства Γ кривых γ и $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$ при $Q = Q_m(x) = K_I(x, g_m)$. Более того, последовательность g_m удовлетворяет этому же неравенству для произвольных семейства Γ кривых γ и $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$ с общей мажорантой $Q = \left(\frac{1+|x|^{\alpha}}{\alpha |x|^{\alpha}}\right)^{n-1}$. Поскольку $\alpha p(n-1) < n$, имеем, что $Q \in L^p(\mathbb{B}^n)$. С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x \to 0} |g(x)| = 1\,, \tag{20}$$

и g отображает проколотый шар $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |y| < 2$. Тогда, ввиду (20), мы получаем, что

$$|g_m(x)| = |g(x)| \geq 1 \qquad \forall \quad x : |x| \geq 1/m, \quad m = 1, 2, \dots ,$$

то есть семейство $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в нуле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатьев, А. Конечное среднее колебание в теории отображений / А. Игнатьев, В. Рязанов // Укр. мат. вестн. — 2005. — Т. 2, № 3. — С. 395–417.

2. Ковтонюк, Д. К теории отображений классов Соболева и Орлича — Соболева / Д. Ковтонюк, Р. Салимов, Е. Севостьянов. — Киев : Наукова думка, 2013. — 303 с.

3. Куратовский, К. Топология / К. Куратовский. — М. : Мир, 1969. — 624 с.

4. Мазья, В. Г. Пространства Соболева / В. Г. Мазья. — Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — 416 с.

5. Миклюков, В. М. Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2005. — 273 с.

6. Полецкий, Е. А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений / Е. А. Полецкий // Мат. сб. — 1970. — Т. 83, № 2. — С. 261–272.

7. Решетняк, Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением / Ю. Г. Решетняк. — Новосибирск : Наука, 1982. — 285 с.

8. Севостьянов, Е. А. О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой / Е. А. Севостьянов // Мат. тр. — 2012. — Т. 15, № 1. — С. 178–204.

9. Смоловая, Е. С. Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах / Е. С. Смоловая // Укр. мат. журн. — 2010. — Т. 62, № 5. — С. 682–689.

10. Сычев, А. В. Пространственные квазиконформные отображения, непрерывные по Гельдеру в граничных точках / А. В. Сычев // Сиб. мат. журн. — 1970. — Т. 11, № 1. — С. 183–192.

11. Andreian Cazacu, C. On the length-area dilatation / C. Andreian Cazacu // Complex Var. Theory Appl. — 2005. — Vol. 50, № 7–11. — P. 765–776.

12. Bishop, C. J. On conformal dilatation in space / C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. — 2003. — Vol. 22. — P. 1397–1420.

13. Cristea, M. Mappings of finite distortion: Zoric's theorem, and equicontinuity results / M. Cristea // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 2007. — Vol. 52, № 5. — P. 539–554.

14. Cristea, M. Local homeomorphisms having local ACL^n inverses / M. Cristea // Compl. Var. and Ellipt. Equat. — 2008. — Vol. 53, № 1. — P. 77–99.

15. Iwaniec, T. Geometrical function theory and non-linear analysis / T. Iwaniec, G. Martin. — Oxford : Clarendon Press, 2001. — 552 p.

16. John, F. On functions of bounded mean oscillation / F. John, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1961. — Vol. 14. — P. 415–426.

17. Näkki, R. Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space / R. Näkki // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. — 1970. — Vol. 484. — P. 1–50.

18. Näkki, R. Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings / R. Näkki, B. Palka // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 37, № 2. — P. 427–433.

19. Martio, O. Moduli in modern mapping theory / O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. — New York : Springer Science + Business Media, LLC, 2009. — 367 p.

20. Martio, O. Mappings with finite length distortion / O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov // J. d'Anal. Math. — 2004. — Vol. 93. — P. 215–236.

21. Ryazanov, V. I. On convergence analysis of space homeomorphisms / V. I. Ryazanov, R. R. Salimov, E. A. Sevostyanov // Siberian Advances in Mathematics. — 2013. — Vol. 23,

№ 4. — P. 263–293.

22. Väisälä, J. Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings / J. Väisälä // Lecture Notes in Math. — 1971. — Vol. 229. — P. 1–144.

REFERENCES

1. Ignatyev A., Ryazanov V. Konechnoe srednee kolebanie v teorii otobrazheniy [Finite Mean Oscillation in the Mapping Theory]. *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.]. 2005, vol. 2, no. 3, pp. 395–417.

2. Kovtonyuk D., Salimov R., Sevostyanov E. *K teorii otobrazheniy klassov Soboleva i Orlicha — Soboleva* [To the Theory of Mappings of Orlicz and Orlicz — Sobolev Classes]. Kiev, Naukova dumka Publ., 2013. 303 p.

3. Kuratowski K. *Topologiya* [Topology]. Moscow, Mir Publ., 1969. 624 p.

4. Maz'ya V.G. *Prostranstva Soboleva* [Sobolev Spaces]. Leningrad, Izd-vo Leningr. un-ta, 1985. 416 p.

5. Miklyukov V.M. *Konformnoe otobrazhenie neregulyarnoy poverkhnosti i ego primeneniya* [Conformal Maps of Nonsmooth Surfaces and Their Applications]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2005. 273 p.

6. Poletskiy E.A. Metod moduley dlya negomeomorfnykh kvazikonformnykh otobrazheniy [The Modulus Method for Nonhomeomorphic Quasiconformal Mappings]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics]. 1970, vol. 83, no. 2, pp. 261–272.

7. Reshetnyak Yu.G. *Prostranstvennye otobrazheniya s ogranichennym iskazheniem* [Space Mappings with Bounded Distortion]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1982. 285 p.

8. Sevostyanov E.A. O ravnostepennoy nepreryvnosti gomeomorfizmov s neogranichennoy kharakteristikoy [On the Equicontinuity of Homeomorphisms with an Unbounded Characteristic]. *Mat. tr.* [Siberian Advances in Mathematics]. 2012, vol. 15, no. 1, pp. 178–204.

9. Smolovaya E.S. Granichnoe povedenie koltsevykh Q-gomeomorfizmov v metricheskikh prostranstvakh [Boundary Behavior of Ring Q-Homeomorphisms in Metric Spaces]. *Ukr. mat. zhurn.* [Ukrainian Mathematical Journal]. 2010, vol. 62, no. 5, pp. 682–689.

10. Sychev A.V. Prostranstvennye kvazikonformnye otobrazheniya, nepreryvnye po Gelderu v granichnykh tochkakh [Spatial Quasiconformal Mappings Continuous by Hölder at Boundary Points]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal]. 1970, vol. 11, no. 1, pp. 183–192.

11. Andreian Cazacu C. On the length-area dilatation. *Complex Var. Theory Appl.*. 2005, vol. 50, no. 7–11, pp. 765–776.

12. Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space. *Intern. Journ. Math. and Math. Scie.*. 2003, vol. 22, pp. 1397–1420.

13. Cristea M. Mappings of finite distortion: Zoric's theorem, and equicontinuity results. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*. 2007, vol. 52, no. 5, pp. 539–554.

14. Cristea M. Local homeomorphisms having local ACL^n inverses. *Compl. Var. and Ellipt. Equat.*. 2008, vol. 53, no. 1, pp. 77–99.

15. Iwaniec T., Martin G. *Geometrical function theory and non-linear analysis*. Oxford, Clarendon Press, 2001. 552 p.

16. John F., Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.*. 1961, vol. 14, pp. 415–426.

17. Näkki R. Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.*. 1970, vol. 484, pp. 1–50.

18. Näkki R., Palka B. Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*. 1973, vol. 37, no. 2, pp. 427–433.

19. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *Moduli in modern mapping theory*. New York, Springer Science + Business Media, LLC, 2009. 367 p.

20. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Mappings with finite length distortion. *J. d'Anal. Math.*. 2004, vol. 93, pp. 215–236.

21. Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevostyanov E.A. On convergence analysis of space homeomorphisms. *Siberian Advances in Mathematics*. 2013, vol. 23, no. 4, pp. 263–293.
22. Väisälä J. Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. *Lecture Notes in Math.*. 1971, vol. 229, pp. 1–144.

ON EQUICONTINUITY OF ONE FAMILY OF SPACE MAPPINGS WITH UNBOUNDED CHARACTERISTIC

Sevostyanov Evgeny Aleksandrovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Associate,
Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy
of Sciences of Ukraine
esevostyanov2009@mail.ru
Rozy Lyuksemburg St., 74, 83114, Donetsk, Ukraine

Dolya Darya Sergeevna
Postgraduate Student,
Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy
of Sciences of Ukraine
dasha.dolja@mail.ru
Rozy Lyuksemburg St., 74, 83114, Donetsk, Ukraine

Abstract. In the present paper, some class of space mappings satisfying geometric estimates with respect to some outer measure, that is conformal modulus of families of curves, is studied. It is proved the equicontinuity of above classes in a closure of a domain provided that the majorant corresponding to a distortion of families of curves has a finite mean oscillation at every point, or satisfies some other conditions.

Let D be a domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, and $f : D \to \mathbb{R}^n$ be a continuous mapping. Set $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, let m be the Lebesgue measure in $\mathbb{R}^n$, and M be the conformal modulus of families of curves. Given a domain D and two sets E and F in $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, $\Gamma(E, F, D)$ denotes the family of all paths $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$ which join E and F in D, i.e., $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ and $\gamma(t) \in D$ for $a < t < b$. Denote by $S(x_0, r_1)$ and $S(x_0, r_2)$ the corresponding boundaries of the spherical ring $A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$ and let $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$. Given a (Lebesgue) measurable function $Q : D \to [0, \infty]$, a mapping $f : D \to \mathbb{R}^n$ is called *ring Q–mapping at a point* $x_0 \in D$ if

$$M\left(f(\Gamma(S_1, S_2, A(x_0, r_1, r_2)))\right) \leq \int\limits_{A(x_0,r_1,r_2)} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \qquad (1)$$

for $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, and for every Lebesgue measurable function $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ such that $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geq 1$. By analogy, given a Lebesgue measurable function $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ for every $x \notin D$, we say that a mapping $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ is a *ring Q-mapping at* $x_0 \in \overline{D}$, $x_0 \neq \infty$, if for every $r_0 = r(x_0)$ and $A = A(r_1, r_2, x_0)$ the relation (1) holds for every continua $E_1 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \cap D$ and $E_2 \subset \left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(x_0, r_2)\right) \cap D$. Note that analytic functions

($n = 2$) are ring Q-mappings with $Q \equiv 1$, ant that the so-called mappings with bounded distortion are ring Q-mappings with $Q \le K = const$. We say that a function $\varphi : D \to \mathbb{R}$ has *finite mean oscillation* at a point $x_0 \in D$ if $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi_\varepsilon}|\, dm(x) < \infty$ where $\widetilde{\varphi_\varepsilon} = \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$. We say that a boundary ∂D of D is *strongly accessible at* $x_0 \in \partial D$ if, for every neighborhood U of x_0 there exists a compactum $E \subset D$, a neighborhood $V \subset U$ of x_0 and a number $\delta > 0$ such that $M(\Gamma(E, F, D)) \ge \delta$ for every continua F in D, $F \cap \partial U \ne \varnothing \ne F \cap \partial V$. It is known that, in particular, all convex bounded domains have strongly accessible boundaries.

Given domains D, $D' \subset \mathbb{R}^n$, $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \ne z_2$, z_1', $z_2' \in D'$ and Lebesgue measurable function $Q(x) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ obeying $Q(x) \equiv 0$ for $x \notin D$, denote $\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D, D')$ a family of all ring Q-homeomorphisms $f : D \to D'$ satisfying to (1) in $\overline{D}$, $f(D) = D'$, such that $f(z_1) = z_1'$, $f(z_2) = z_2'$. Given a Lebesgue measurable function $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ and $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $q_{x_0}(r)$ is integral mean value of Q under sphere $S(x_0, r)$. Denote $q^*_{x_0}(r)$ a mean integral value of $Q^*(x) = \begin{cases} Q(x), & Q(x) \ge 1, \\ 1, & Q(x) < 1 \end{cases}$ under the sphere $S(x_0, r)$. Now we have the following.

Theorem. Let a domain D be locally connected at all boundary points, $\partial D'$ is strongly accessible, and $Q(x)$ satisfies for every $x_0 \in \overline{D}$ at least one of the following conditions: 1) $Q(x) \in FMO(x_0)$; 2) $q_{x_0}(r) = O([\log \frac{1}{r}]^{n-1})$ at $r \to 0$; 3) for some $\delta(x_0) > 0$, $\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t q^{*\,1/(n-1)}_{x_0}(t)} = \infty$. Then every $f \in \mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D, D')$ has a continuous extension $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$, moreover, a family $\overline{\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D, D')}$ which consists of all extended mappings mentioned above, is equicontinuous (normal) in $\overline{D}$.

Key words: mappings with bounded and finite distortion, boundary behavior of space mappings, equicontinuity, continued extension to a boundary.