УДК 517.544.7
ББК 22.1

ОБ ИСТОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАССТОЯНИЯ В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Помельников Юрий Вячеславович

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики
Волгоградского государственного университета
toph@mail.ru, knem@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В статье обсуждается определение и история относительного расстояния и его роль в геометрической теории функций. Сравнивается определение расстояния по С. Мазуркевичу, у М.А. Лаврентьева, Г.Д. Суворова и В.М. Миклюкова.

Ключевые слова: относительное расстояние, простые концы, соответствие границ, компактификация, неравенство треугольника.

Термин «относительное расстояние» появляется впервые в работе Мазуркевича (1916) [7] как нижняя грань диаметров всех связных множеств, соединяющих точки a и b (см. также Куратовского [1, с. 255]).

Определение 1. *(Расстояние Мазуркевича)* $\rho_M(a,b) = \inf diam(E)$, *где* E *связное множество, соединяющее точки* a *и* b.

Однако основное назначение этого определения — изучение поведения связности многосвязных областей в отдельной точке на границе.

В дальнейшем, в работе Мазуркевича (1936) [8], это определение было применено для изучения простых концов по Каратеодори в плоской области. Однако, как показывают простые примеры, это расстояние не является метрикой простых концов.

Пример 1. Рассмотрим область, представляющую из себя единичный квадрат с выброшенными разрезами

$$C_n = \{x = 1 - 1/2^n, y \in [1/2, 1]\}.$$

Тогда две последовательности

$$\{z'_n\} = (1 - \frac{3/8}{2^n}, 1/2), \qquad \{z"_n\} = (1 - \frac{3/8}{2^n}, 3/4)$$

сходятся к одному и тому же простому концу II рода с телом $x = 1,\ y \in [1/2, 1]$. В то же время

$$\rho_M(z'_n, z"_n) = 1/4.$$

М.А. Лаврентьев [2] (1936) ввел понятие относительного расстояния.

Определение 2. *(Относительное расстояние Лаврентьева.) Расстояние* $\rho_D(z_1, z_2) = \min\{\rho_1(z_1, z_2), \rho_2(z_1, z_2)\}$ *между точками области* D *как минимум:* ρ_1 *— точной нижней грани длин дуг, соединяющих эти точки, и* ρ_1 *точной нижней грани длин дуг, разбивающих* D *и отделяющих* z_1, z_2 *от точки* $0 \in D$.

Граничной точкой он называет любую последовательность точек $z_n \in D$ без предельных точек в D такую, что $\rho_D(z_m, z_n) \to 0$ при $m, n \to \infty$. Расстояние между граничными точками $t_1 = \{z_n^1\}, t_2 = \{z_n^2\}$ определяется как

$$\rho(t_1, t_2, D) = \lim_{n\to\infty} \rho_D(z_n^1, z_n^2).$$

Точки, между которыми нулевое расстояние, считаются идентичными. Введенное определение является метризацией понятия простого конца в смысле Каратеодори. Лаврентьев доказывает, что если область лежит в круге $|z| < M$ и f — конформное отображение на единичный круг с нормировкой, то для любых точек замкнутой области, компактифицированной, как указано выше, справедлива оценка

$$\exp - \frac{K}{\rho_D(z_1, z_2)} < |f(z_1) - f(z_2)| < K_1\sqrt{\rho_D(z_1, z_2)},$$

в которой K зависит только от M, а K_1 — абсолютная постоянная.

В работе [5] Г.Д. Суворовым (1956) был построен контрпример, который показывает нарушение неравенства треугольника для относительного расстояния Лаврентьева. Ниже приводится свой контрпример (рис. 1).

Пример 2. Рассмотрим область, состоящую из двух кругов B_1 и B_2, связанных прямоугольной перемычкой. Радиусы этих кругов равны 1 и 2 соответственно, а длина перемычки равна 1/2, ширина ϵ. Точки z_1 и z_3 есть центры указанных кругов, а точка z_2 лежит на радиусе в круге B_1 в противоположной стороне от B_2. Тогда относительное расстояние между z_1 и z_2 равно ϵ, расстояние между z_2 и z_3 равно $1 + 2 + 1/2$. В свою очередь, относительное расстояние между z_1 и z_3 $\min\{2 + 2, 2 + 1 + 1/2 + 1/2\}$, таким образом, в данном случае нарушено неравенство треугольника.

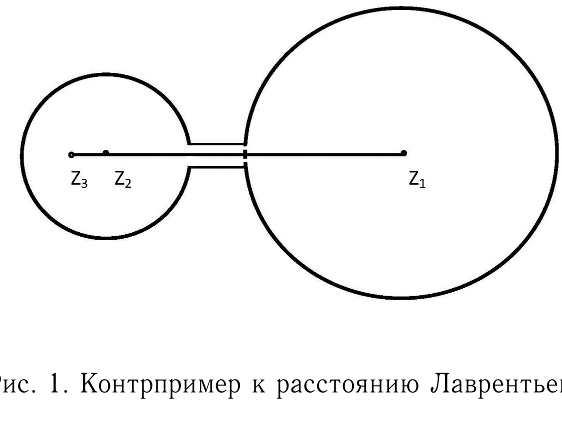

Рис. 1. Контрпример к расстоянию Лаврентьева

В дальнейшем в работах Г.Д. Суворова [6] и его учеников было предложено исправление определения расстояния Лаврентьева таким образом.

Определение 3. *(Относительное расстояние Лаврентьева — Суворова)*

$$\rho_D(z_1, z_2) = \min\{\rho_1(z_1, z_2), \rho_2(z_1, z_2)\},$$

где $\rho_1(z_1, z_2)$ — инфимум диаметров кривых, соединяющих точки z_1, z_2 внутри области; $\rho_2(z_1, z_2)$ — инфимум диаметров сечений, отделяющих точки z_1 и z_2 от точки $O \in D$ внутри области D.

Замечание 5. Дело в том, что при доказательстве неравенства треугольника

$$\rho_D(z_1, z_3) \leq \rho_D(z_1, z_2) + \rho_D(z_2, z_3)$$

не возникает никаких проблем в случае, если минимум для обеих пар точек z_1, z_2 и z_2, z_3 достигается либо на ρ_1, либо на ρ_2. Вся задача состоит в том, чтобы доказать, что неравенство выполняется, когда для одной пары точек минимум достигается на ρ_1, скажем на кривой γ_1, а для другой — на ρ_2, пусть на кривой γ_2. В этом случае кривые γ_1 и γ_2 пересекаются, но в случае, если в определении рассматриваются длины, то объединенная кривая $\gamma_1 \cup \gamma_2$ не может ни разделять, ни соединять точки z_1 и z_3. И значит, кривые, соединяющие z_1 и z_3, могут иметь длину более чем сумма длин γ_1 и γ_2. В случае использования в определении расстояния диаметров кривых это не так.

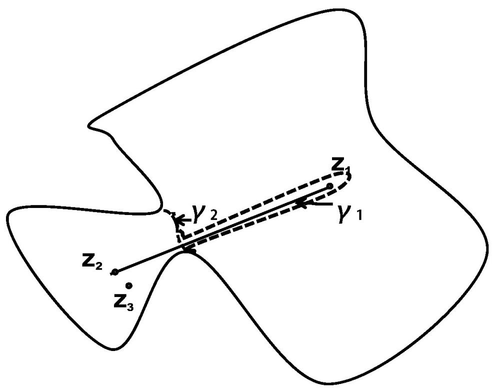

Рис. 2. Неравенство треугольника

Определение 4. *(Расстояние Лаврентьева — Миклюкова.) Пусть D — односвязная область и $O \in D$ — фиксированная точка. Если точки $a, b \in D$, то пусть*

$$\rho(a, b; O, D) = \min\{\rho_1(a, b), \rho_2(a, b)\},$$

где ρ_1 есть точная нижняя грань длин замкнутых кривых $\gamma \subset D \setminus O$, отделяющих a и b от точки O и границы ∂D; ρ_2 есть точная нижняя грань длин дуг, лежащих в $D \setminus O$ и отделяющих a и b от O в области D.

Теорема 1. *Расстояние Лаврентьева — Миклюкова удовлетворяет аксиомам расстояния.*

Доказательство. Здесь мы с некоторыми изменениями и дополнениями повторим доказательство из [3]. Для доказательства неравенства треугольника

$$\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$$

необходимо рассмотреть три случая: 1) минимум для обеих пар точек z_1, z_2 и z_2, z_3 достигается на ρ_1; 2) минимум для обеих пар точек достигается на ρ_2; 3) минимум для одной пары точек достигается на ρ_1, а для другой пары точек достигается на ρ_2.

В первом случае кривые γ_1 и γ_2, близкие к инфимуму, отделяющие точки z_1, z_2 и точки z_2, z_3 соответственно, могут как пересекаться, так и содержать одну внутри другой. В случае, если они пересекаются, имеем объединенную кривую, которая отделяет $z_1 z_3$ от ∂D и O и имеет длину, меньшую, чем сумма γ_1 и γ_2. И значит,

$$\rho_1(z_1, z_3) \leq lengh(\gamma_1) + lengh(\gamma_2) \leq \rho_1(z_1, z_2) + \rho_1(z_2, z_3) + \epsilon.$$

В случае, если они не пересекаются, то они находятся одна внутри другой, и значит, одна из них, скажем γ_1, отделяет все три точки z_1, z_2, z_3 от O и ∂D, и мы имеем

$$\rho_1(z_1, z_3) \leq lengh(\gamma_1) \leq \rho_1(z_1, z_2) + \rho_1(z_2, z_3) + \epsilon.$$

Во втором случае, если минимум достигается на сечениях, то сечение γ_1, отделяющее точку O и точки z_1, z_2, делит область на две связные компоненты: в одной из них лежит точка O, а в другой точки z_1, z_2. В свою очередь, γ_2 делит область на две связные компоненты: в одной из них лежит точка O, а в другой точки z_2, z_3. Таким образом, две компоненты содержат общую точку z_2, и значит относительная граница этих компонент связности состоит из сечений γ_1 и γ_2, и значит, она является сечением, длина которого менее чем сумма длин γ_1 и γ_2.

$$\rho_2(z_1, z_3) \leq lengh(\gamma_1) + lengh(\gamma_2) \leq \rho_2(z_1, z_2) + \rho_2(z_2, z_3) + \epsilon.$$

И наконец, третий случай, в котором одна из кривых, приближающих ρ_1, γ_1 является замкнутой кривой, отделяющей z_1, z_2 от O и от границы D, а вторая кривая — сечение γ_2, приближающая ρ_2, отделяет z_2, z_3 от точки O. В этом случае в той компоненте связности, в которой находятся точки z_2, z_3, лежит некоторый участок кривой γ_1, а значит, либо она вся находится в этой компоненте и тогда сечение γ_2 будет сечением и для точек z_1, z_3, и тогда имеем

$$\rho_2(z_1, z_3) \leq lengh(\gamma_2) \leq \rho_2(z_2, z_3) + \epsilon.$$

Либо же кривая γ_1 пересекает сечение γ_2. И тогда объединенная кривая γ_1 γ_2 является сечением (см. рис. 2), и для ее длины имеем

$$\rho_2(z_1, z_3) \leq lengh(\gamma_1 \bigcup \gamma_2) \leq \rho_1(z_1, z_2) + \rho_2(z_2, z_3) + \epsilon.$$

Необходимо отметить, что введенное относительное расстояние ничем не отличается от евклидового в случае выпуклой области. В этом случае все длины сечений области имеют большую длину, нежели кривые, соединяющие точки.

В связи с этим можно доказать следующую теорему об искажении относительного расстояния при конформном отображении.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — конформное отображение единичного круга $|z| < 1$ на область D. Для относительного расстояния имеем следующую оценку*

$$\rho_D(f(z_1), f(z_2)) \leq C|z_1 - z_2|^{1/2}.$$

Доказательство. Для двух точек z_1, z_2, лежащих в круге $|z| < 1$, обозначим $e^{i\theta}$ точку пересечения окружности $|z| = 1$ с прямой z_1z_2, а через $\rho_1 = |e^{i\theta} - z_1|$ $\rho_2 = |e^{i\theta} - z_2|$. Тогда $|z_1 - z_2| = \rho_1 - \rho_2$. Рассмотрим кривые L_ρ — образы дуг окружностей $C_\rho = \{z = e^{i\phi} + \rho e^{i\theta}, \theta_1 < \theta < \theta_2\}$. Для длин $|L_\rho|$ по неравенству Коши имеем

$$|L_\rho|^2 = (\int_{C_\rho} |\nabla f|\rho d\theta)^2 \le \rho^{1/2}(\int_{C_\rho} |\nabla f|^2\rho d\theta)(\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta).$$

Интегрируя от r_1 до r_2, получим

$$\int_{r_1}^{r_2} |L_\rho|^2 d\rho \le \pi \int_{r_1}^{r_2} \rho^{1/2} d\rho \int_{r_1}^{r_2} \rho d\rho \int_{C_\rho} |\nabla f|^2 d\theta \le S(D_{\rho_1\rho_2})(|\rho_1 - \rho_2|^{3/2}).$$

Где $S(D_{r_1r_2})$ — площадь фигуры между двумя кривыми $L_{r_1}L_{r_2}$. Полагая $r_1 = max\{\rho_1, \rho_2\}$, $r_2 = r_1 + |\rho_1 - \rho_2|$, будем иметь кривые $L_\rho r_1 \le \rho \le r_2$, отделяющие точки $f(z_1)$, $f(z_2)$ от фиксированной точки O.

Таким образом получаем, что относительное расстояние в образе в области D, будет

$$\rho_D(f(z_1), f(z_2)) \le \min_{r_1<\rho<r_2} |L_\rho| \le C(\rho_1 - \rho_2)^{1/2} = C|z_1 - z_2|^{1/2}$$

.

Конечно, отсюда легко видеть, что пополнение по метрикам Суворова и Миклюкова присоединяет к области простые концы по Каратеодори. Однако это не единственное конформно-инвариантное расширение. В работе (1980) [4] был построен набор метризуемых конформно-инвариантных расширений плоской области. В связи с этим возникает проблема, неднократно озвученная Г.Д. Суворовым, охарактеризовать расширение по простым концам по Каратеодори среди всех возможных расширений плоской области. Гипотеза о том, что такой характеристикой может быть такая: «расширение по Каратеодори — единственное, в котором граница гомеоморфна окружности» — неверна (см. [4]). Однако в частных беседах с В.М. Миклюковым им высказывалась идея следующей теоремы.

Теорема 3. *Расширение по простым концам по Каратеодори — единственное, в котором расширенная компактифицированная область гомеоморфна замкнутому кругу.*

Доказательство. Хорошо известно, что пополнение по простым концам по Каратеодори превращает область в замкнутый круг. Обратно, если известно, что пополнение гомеоморфно замкнутому кругу $|z| \le 1$, то фундаментальная система окрестностей точки ψ, лежащей на границе круга $|z| < 1$, может быть задана концентрическими кругами $|z - \psi| < 1/n$. А это значит, что и в нашем гипотетическом расширении плоской области D мы имеем в качестве фундаментальной системы окрестностей цепь вложенных связных односвязных подобластей ω_n. Такие области имеют относительную границу $\partial\omega_n \cap D$, являющуюся дугами-сечениями области D. То есть ω_n являются цепью сечений, определяющих простой конец.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куратовский, К. Топология : в 2 т. Т. 2 / К. Куратовский. — М. : Мир, 1969. — Т. 2. — 512 с.

2. Лаврентьев, М. А. О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях / М. А. Лаврентьев // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 4, № 5. — С. 207–209.

3. Миклюков, В. М. Относительное расстояние М.А. Лаврентьева и простые концы на непараметрической поверхности / В. М. Миклюков // Сиб. мат. журн. — 2004. — Т. 1, № 3. — С. 349–372.

4. Помельников, Ю. В. Новое семейство конформно-инвариантных метризуемых бикомпактных расширений плоской области / Ю. В. Помельников, Г. Д. Суворов // Сиб. мат. журн. — 1980. — Т. XXI, № 3. — С. 145–1613.

5. Суворов, Г. Д. Замечания к одной теореме М. А. Лаврентьева / Г. Д. Суворов // Учен. зап. Том. гос. ун-та. — 1956. — № 25. — С. 3–8.

6. Суворов, Г. Д. Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле / Г. Д. Суворов. — Киев : Наукова думка, 1981. — 166 с.

7. Mazurkiewicz, S. Sur une classification de points situes un sur continu arbitraire / S. Mazurkiewicz // C. R. Soc. Sc. Lett. — 1916. — Vol. 9, № 5. — P. 428–442.

8. Mazurkiewicz, S. Uber die Definition der Primenden / S. Mazurkiewicz // Fund. Math. — 1936. — Vol. 26. — P. 272–279.

9. Martio, O. Relative distance and boundary properties of nonparametric surfaces with finite area / O. Martio, V. M. Miklyukov, V. Vuorinen // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — № 286. — P. 524–539.

REFERENCES

1. Kuratowski K. *Topologiya : v 2 t. T. 2* [Topology. In 2 vols. Vol. 2]. Moscow, Mir Publ., 1969, vol. 2. 512 p.

2. Lavrentiev M.A. O nepreryvnosti odnolistnykh funktsiy v zamknutykh oblastyakh [On Continuity Univalent Functions in Closed Domain]. *Dokl. AN SSSR* [Doklady Mathematics]. 1936, vol. 4, no. 5, pp. 207–209.

3. Miklyukov V.M. Otnositelnoe rasstoyanie M.A. Lavrenteva i prostye kontsy na neparametricheskoy poverkhnosti [Relative Distance by M.A. Lavrentiev and Prime Ends on Nonparametric Surfaces]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal]. 2004, vol. 1, no. 3, pp. 349–372.

4. Pomelnikov Yu.V., Suvorov G.D. Novoe semeystvo konformno-invariantnykh metrizuemykh bikompaktnykh rasshireniy ploskoy oblasti [New Family of Conformally Invariant Compactifications of Plane Domain]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal]. 1980, vol. XXI, no. 3, pp. 145–1613.

5. Suvorov G.D. Zamechaniya k odnoy teoreme M. A. Lavrenteva [Remark on M.A. Lavrentiev's Theorem]. *Uchen. zap. Tom. gos. un-ta.* 1956, no. 25, pp. 3–8.

6. Suvorov G.D. *Metricheskaya teoriya prostykh kontsov i granichnye svoystva ploskikh otobrazheniy s ogranichennymi integralami Dirikhle* [Metric Theory of Prime Ends and Boundary Properties of Plane Mappings with Finite Dirichlet Integral]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1981. 166 p.

7. Mazurkiewicz S. Sur une classification de points situes un sur continu arbitraire. *C. R. Soc. Sc. Lett.*. 1916, vol. 9, no. 5, pp. 428–442.

8. Mazurkiewicz S. Uber die Definition der Primenden. *Fund. Math.*. 1936, vol. 26, pp. 272–279.

9. Martio O., Miklyukov V.M., Vuorinen V. Relative distance and boundary properties of nonparametric surfaces with finite area. *J. Math. Anal. Appl.*. 2003, no. 286, pp. 524–539.

ON HISTORY OF RELATIVE DISTANCE IN PLANE DOMAIN

Pomelnikov Yuriy Vyacheslavovich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Computer Science and Empirical Mathematics,
Volgograd State University
toph@mail.ru, knem@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper we consider history of relative distance in plane domain and its applications. Definitions of relative distance in works S. Mazurkevich, M. Lavrentiev, G. Suvorov and V. Miklukov are explained and compared with its role in geometric theory of functions.

The definitions of relative distance are discussed in this paper. Relative distance is defined by Marzinkevich (1916) as diameter of set connected at two points. This distance cannot be considered as prime ends distance. Lavretiev's distance (1936) is defined as minimum of two figures length of curves connected at two points and length of cuts separating two points from fixed point. This variant of distance completes domain with prime ends but does not meets triangle inequality. Definitions given by Suvorov (1956) and recently by Miklyukov (2004) meet all conditions. Example of plain domain where triangle inequality for Lavrentiev's distance fails are presented in this paper.

Key words: relative distance, prime ends, boundary correspondence, compactification, triangle inequality.