УДК 517.55+514.74
ББК 22.161.5+22.151.5

О РАЗМЕРНОСТЯХ ГРУПП АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ТРАНЗИТИВНО ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ В $\mathbb{C}^3$ [1]

Лобода Александр Васильевич
Доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
lobvgasu@yandex.ru
ул. 20-летия Октября, 84, 394006 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В связи с задачей описания аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства изучаются вопросы о возможных размерностях групп Ли преобразований, действующих на таких поверхностях. Доказаны три теоремы о таких размерностях, в том числе получена верхняя оценка 10 для размерностей групп, соответствующих строго псевдо-выпуклым аффинно-однородным поверхностям.

Две другие теоремы относятся к одному из семи естественных типов однородных поверхностей, введенных автором ранее. Для такого типа размерность соответствующей группы Ли не превосходит 7; кроме того, любая однородная поверхность такого типа может быть построена как орбита некоторой 5-мерной группы Ли.

Ключевые слова: аффинное преобразование, однородное многообразие, векторное поле, алгебра Ли, каноническое уравнение поверхности.

Посвящается памяти
Владимира Михайловича Миклюкова

Введение

Задача описания однородных многообразий и, в частности, вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств, представляет интерес в различных разделах математики. При этом задача о голоморфной однородности весьма тесно переплетается с «более простой» аффинной постановкой (см.: [12; 15–17; 20; 22]). Важную роль в исследовании однородности играет вопрос о возможных размерностях групп, транзитивно действующих на изучаемых однородных гиперповерхностях.

Ниже этот вопрос изучается для аффинно-однородных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства. Схема, предлагаемая в статье, существенно использует размерность объемлющего пространства, однако сам подход допускает обобщения на произвольные размерности.

Однородность многообразия мы понимаем как существование группы Ли, транзитивно действующей на этом многообразии. В то же время уточним, что ниже обсуждается лишь *локальная* однородность, связанная с транзитивным действием вблизи выделенной точки обсуждаемой гиперповерхности. Термин *аффинная однородность* означает, что мы рассматриваем в качестве действующих групп только подгруппы Ли группы $Aff(3,\mathbb{C})$. При этом мы сразу переходим к работе с алгебрами Ли, отвечающими этим группам и состоящими из векторных полей, касательных к изучаемым (вещественно-аналитическим) гиперповерхностям.

Основными инструментами в нашей статье являются аффинные канонические уравнения изучаемых поверхностей. Напомним, что согласно [11], уравнение произвольной строго псевдо-выпуклой (СПВ) вещественно-аналитической гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ можно (локально) привести аффинным преобразованием к виду

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \varepsilon_1(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + \varepsilon_2(z_2^2 + \bar{z}_2^2) + \sum_{k+l+2m\geq 3} F_{klm}(z,\bar{z})u^m. \tag{1}$$

Здесь z_1, z_2, w — комплексные координаты в $\mathbb{C}^3$, $u = Re\,w, v = Im\,w$;

F_{klm} — многочлен степени k по переменным $z = (z_1, z_2)$, степени l — по $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, m — по переменной u; $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — вещественные неотрицательные числа.

Роль канонических уравнений (или нормальных форм) в комплексном анализе общеизвестна (см., например, [18; 19; 21; 23–25]). С использованием таких уравнений удается получать как оценочные результаты, так и полные списки аффинно-однородных поверхностей, коэффициенты которых удовлетворяют некоторым естественным ограничениям (см., например, [10; 13; 14]). Основными целями настоящей работы являются систематизация и обобщение излагаемых в этих работах подходов (как математических, так и алгоритмических) к задаче об однородности. Такое обобщение, как ожидается, позволит получить в ближайшее время полное описание однородных вещественных гиперповерхностей в 3-мерных комплексных пространствах.

Основным общим результатом настоящей статьи является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для размерности алгебры $g(M)$ аффинных векторных полей, касательных к аффинно-однородной СПВ-гиперповерхности M вида (1) в пространстве $\mathbb{C}^3$, справедлива оценка*

$$5 \leq \dim_{\mathbb{R}} g(M) \leq 10. \tag{2}$$

Несложно проверить, что для аффинно-однородной квадрики («сферы Мозера»)

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 \tag{3}$$

алгебра $g(M)$ является в точности 10-мерной. Однако во всех остальных случаях размерность таких алгебр существенно снижается. Можно показать, что для аффинно-однородных СПВ-гиперповерхностей, не сводимых аффинными преобразованиями к квадрике (3), верхняя оценка в обсуждаемой теореме может быть понижена до 7 (см. также: [7; 9]).

Такая уточненная оценка подробно обсуждается в статье (теорема 2) для поверхностей вида (1), описываемых парой $\varepsilon_1 = 1/2, \varepsilon_2 = 0$ (другими словами, имеющих *тип* $(1/2, 0)$). Интересная особенность семейства однородных поверхностей типа $(1/2, 0)$ обсуждается в теореме 3. В ней доказано существование 5-мерной «транзитивной» подгруппы в любой группе большей размерности, обеспечивающей однородность рассматриваемой поверхности данного типа.

В качестве примера, поясняющего смысл этой теоремы, можно упомянуть 2-мерную сферу в $\mathbb{R}^3$. В 3-мерной группе $SO(3)$, транзитивно действующей на этой поверхности, не существует никаких 2-мерных подгрупп, и в том числе подгрупп с транзитивным действием на сфере.

Аналогичные результаты о размерностях транзитивно действующих групп можно получать описанными ниже методами и для других типов аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$. В то же время отметим, что полные описания однородных поверхностей типов $(1/2, 1/2)$ и $(1/2, 0)$ уже получены (см.: [10; 13; 14]), тогда как изучение остальных пяти типов из семи, указанных в [5], лишь близится к завершению.

Укажем также на применимость обсуждаемых в статье схем к задачам изучения аффинно-однородных поверхностей с индефинитной формой Леви (см.: [3]), а также (с некоторыми модификациями) голоморфно-однородных многообразий. Результаты настоящей статьи анонсированы в [5]; они вошли также в доклад, сделанный автором на международной конференции «Complex Analysis and Related Topics» (Санкт-Петербург, апрель 2014г.).

1. Схема изучения однородности и доказательство теоремы 1

Пусть M — аффинно-однородная (вблизи начала координат) СПВ-гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^3$, заданная уравнением (0.1). Тогда определяющая функция M задается формулой

$$\Phi = -v + F(z, \bar{z}, u),$$

где $F = F(z, \bar{z}, u)$ — правая часть формулы 1.

Пусть еще $g(M)$ — соответствующая этой поверхности алгебра Ли, состоящая из касательных к M аффинных векторных полей. Каждое из них имеет вид

$$Z = (A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 w + p_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 w + p_2)\frac{\partial}{\partial z_2} + (a z_1 + b z_2 + c w + q)\frac{\partial}{\partial w}. \quad (4)$$

В матричном представлении

$$Z = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & p_1 \\ B_1 & B_2 & B_3 & p_2 \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

полей из такой алгебры особый интерес представляет четвертый столбец матрицы. Эти столбцы отвечают сдвиговым компонентам векторных полей, содержащихся в $g(M)$. Поэтому в каждой точке однородной поверхности, в частности, в начале координат, вещественная линейная оболочка таких «сдвиговых» векторов совпадает с касательной плоскостью к поверхности и имеет размерность, равную 5. Для размерности самой алгебры $g(M)$ отсюда следует естественная оценка снизу $5 \leq \dim_{\mathbb{R}} g(M)$.

Большое количество различных утверждений об однородных поверхностях и в том числе верхние оценки для размерности действующих на таких поверхностях транзитивных групп, можно получить из тождества

$$Re\{Z(\Phi)|_M\} \equiv 0. \quad (6)$$

Мы будем называть его далее *основным тождеством*; геометрически оно означает факт касания поверхности M векторным полем Z.

Опишем кратко используемую нами схему исследования задачи об аффинной однородности, связанную с основным тождеством (6).

Из него можно получить ряд взаимных ограничений на параметры векторных полей (4), входящих в изучаемые алгебры Ли, и на коэффициенты канонического уравнения (1). Из этого же тождества выводятся и оценки размерности таких алгебр.

Использование полученных оценок позволяет детально рассмотреть вопросы существования и полного описания матричных алгебр Ли, элементы которых подчиняются полученным ограничениям. Эти вопросы сводятся к исследованию (больших, но конечных!) систем квадратичных уравнений, означающих замкнутость матричных алгебр Ли относительно коммутатора или матричной скобки.

Всякую построенную таким образом алгебру Ли необходимо еще проинтегрировать, чтобы получить отвечающую ей аффинно-однородную гиперповерхность. Существование интегральных многообразий у алгебр Ли гарантируется в данной ситуации известной теоремой Фробениуса (см., например, [2]).

Подчеркнем еще раз, что содержание данной статьи составляет лишь один фрагмент описанной схемы, связанный с возможными размерностями интересующих нас алгебр Ли. Реализация схемы в полном объеме оказывается возможной, но весьма трудоемкой даже для поверхностей отдельного типа (1/2, 0), представляющего главный интерес в рамках настоящей статьи.

Переходя к доказательству теоремы 1, запишем основное тождество в развернутой форме:

$$Re \left\{ \begin{array}{c} (p_1 + (A_1 z_1 + A_2 z_2) + A_3(u + iF))\, \frac{\partial F}{\partial z_1} + \\ \\ (p_2 + (B_1 z_1 + B_2 z_2) + B_3(u + iF))\, \frac{\partial F}{\partial z_2} + \\ \\ (q + (a z_1 + b z_2) + c(u + iF))\, \frac{1}{2}(i + \frac{\partial F}{\partial u}) \end{array} \right\} \equiv 0. \tag{7}$$

Левая часть тождества (7) представляет собой вещественнозначную аналитическую функцию переменных $z, \bar{z}, u$. Основой нашей схемы изучения однородности является рассмотрение младших слагаемых тейлоровского разложения этой функции.

Для этого введем понятие веса для переменных $z, \bar{z}, u$ и мономов от них. Будем считать, что переменные z_1, z_2, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ имеют вес 1, а переменной u припишем вес 2. Веса отдельных мономов, построенных из переменных z_1, z_2, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, u, будем определять по естественному принципу сложения весов. Например, вес монома $z_1 u$ равен 3.

Выделяя в степенном разложении функции $F(z, \overline{z}, u)$ однородные весовые компоненты, перепишем уравнение (1) в виде

$$v = F(z, \overline{z}, u) = F_2(z, \bar{z}) + F_3(z, \overline{z}, u) + F_4(z, \overline{z}, u) + ... \tag{8}$$

Тогда для всех типов поверхностей, задаваемых уравнениями (1), справедливы весовые следствия основного тождества:

вес 0:

$$Re\{\frac{qi}{2}\} \equiv 0; \tag{9}$$

вес 1:

$$Re\{p\frac{\partial F_2}{\partial z_1}+s\frac{\partial F_2}{\partial z_2}+(az_1+bz_2)\frac{i}{2}+\frac{q}{2}\frac{\partial F_3}{\partial u}\}\equiv 0; \tag{10}$$

вес 2:

$$Re\{p\frac{\partial F_3}{\partial z_1}+s\frac{\partial F_3}{\partial z_2}+(A_1z_1+A_2z_2)\frac{\partial F_2}{\partial z_1}+(B_1z_1+B_2z_2)\frac{\partial F_2}{\partial z_2}+ \tag{11}$$

$$+(az_1+bz_2)\frac{1}{2}\frac{\partial F_3}{\partial u}+\frac{c}{2}(ui-F_2)+\frac{q}{2}\frac{\partial F_4}{\partial u}\}\equiv 0;$$

вес 3:

$$Re\{p\frac{\partial F_4}{\partial z_1}+s\frac{\partial F_4}{\partial z_2}+(A_1z_1+A_2z_2)\frac{\partial F_3}{\partial z_1}+(B_1z_1+B_2z_2)\frac{\partial F_3}{\partial z_2}+$$

$$+(az_1+bz_2)\frac{1}{2}\frac{\partial F_4}{\partial u}+A_3(u+iF_3)\frac{\partial F_2}{\partial z_1}+B_3(u+iF_3)\frac{\partial F_2}{\partial z_2}- \tag{12}$$

$$-\frac{c}{2}F_3+\frac{c}{2}(u+iF_2)\frac{\partial F_3}{\partial u}+\frac{q}{2}\frac{\partial F_5}{\partial u}\}\equiv 0.$$

Простейшее в этой совокупности уравнение (9), описывающее компоненту нулевого веса, означает, что параметр q любого векторного поля, касательного к поверхности (1), является вещественным.

Для детального рассмотрения следующих компонент основного тождества запишем в развернутой форме младшие весовые слагаемые основного тождества (6). Помимо

$$F_2=|z_1|^2+|z_2|^2+\varepsilon_1(z_1^2+\bar{z}_1^2)+\varepsilon_2(z_2^2+\bar{z}_2^2)$$

нам потребуются еще формулы для

$$F_3=F_3^{(0)}(z,\bar{z})+F_3^{(1)}(z,\bar{z})u,\quad F_4=F_4^{(0)}(z,\bar{z})+F_4^{(1)}(z,\bar{z})u+\lambda u^2,\quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{13}$$

содержащие уточнения о вхождении переменной u в слагаемые F_3, F_4.

Здесь, в частности, подразумевается, что

$$F_3^{(1)}=((\mu_1z_1+\mu_2z_2)+(\overline{\mu_1z_1+\mu_2z_2}))\,,\ \mu_1,\mu_2\in\mathbb{C}. \tag{14}$$

С учетом этих формул тождество (10) примет вид

$$Re\left(p_1(\bar{z}_1+2\varepsilon_1z_1)+\frac{ia}{2}z_1+q\mu_1z_1+p_2(\bar{z}_2+2\varepsilon_2z_2)+\frac{ib}{2}z_2+q\mu_2z_2\right)=0.$$

Отсюда следует, что параметры a, b касательного поля Z выражаются через коэффициенты канонического уравнения и набор (p,q), где $p=(p_1,p_2)$, по формулам

$$a=2i\left(\bar{p}_1+2\varepsilon_1p_1+q\mu_1\right),\ b=2i\left(\bar{p}_2+2\varepsilon_2p_2+q\mu_2\right). \tag{15}$$

Отвечающие за сдвиги и обеспечивающие в однородном случае размерность алгебры $g(M)$ не меньшую, чем 5, параметры p_1, p_2, q касательного к поверхности M поля Z естественно назвать его *основными* параметрами.

Из тождества (11) можно выразить через основную пятерку вещественных параметров еще несколько параметров поля Z, не являющихся основными. Для этого необходимо учесть формулы типа

$$\frac{\partial F_2}{\partial z_1} = \bar{z}_1 + 2\varepsilon_1 z_1, \ \frac{\partial F_2}{\partial z_2} = \bar{z}_2 + 2\varepsilon_2 z_2. \tag{16}$$

Всего в (11) имеется семь различных (с учетом рассмотрения вещественной части обсуждаемых выражений) типов мономов

$$z_1^2, |z_1|^2, z_2^2, |z_2|^2, z_1 z_2, z_1 \bar{z}_2, u.$$

Рассматривая коэффициенты при этих мономах, получаем следующее техническое утверждение.

Предложение 1. *Для параметров векторного поля (4), касательного к произвольной поверхности вида (1), выполняются следующие уравнения, получаемые из компоненты веса 2 основного тождества:*

$$z_1^2 \ : \ 2\varepsilon_1(A_1 - \frac{1}{2}Re\, c) + \frac{1}{2}a\mu_1 + (3f_{30}p_1 + f_{21}p_2 + g_{20}\bar{p}_1 + h_{20}\bar{p}_2) + \varphi(q) = 0,$$

$$z_2^2 \ : \ 2\varepsilon_2(B_2 - \frac{1}{2}Re\, c) + \frac{1}{2}b\mu_2 + (f_{12}p_1 + 3f_{03}p_2 + g_{02}\bar{p}_1 + h_{02}\bar{p}_2) + \varphi(q) = 0, \tag{17}$$

$$z_1 z_2 \ : \ 2(\varepsilon_2 B_1 + \varepsilon_1 A_2) + \frac{1}{2}(b\mu_1 + a\mu_2) + (2f_{21}p_1 + 2f_{12}p_2 + g_{11}\bar{p}_1 + h_{11}\bar{p}_2) + \varphi(q) = 0,$$

$$z_1 \bar{z}_2 \ : \ B_1 + \bar{A}_2 + \frac{1}{2}(\bar{b}\mu_1 + a\bar{\mu}_2) + (2h_{20}p_1 + h_{11}p_2 + \bar{g}_{11}\bar{p}_1 + 2\bar{g}_{02}\bar{p}_2) + \varphi(q) = 0,$$

$$|z_1|^2 \ : \ Re\,(A_1 - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a\bar{\mu}_1) + Re(2g_{20}p_1 + g_{11}p_2) + \varphi(q) = 0,$$

$$|z_2|^2 \ : \ Re\,(B_2 - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b\bar{\mu}_2) + Re(h_{11}p_1 + 2h_{02}p_2) + \varphi(q) = 0,$$

$$u \ : \ Re\,(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \frac{i}{2}c + q\lambda) = 0.$$

Замечание. В шесть из семи выписанных уравнений входят выражения, для упрощения единообразно обозначенные через $\varphi(q)$. Точный вид этих выражений нас здесь не интересует, можно отметить лишь, что q входит в каждое из них в виде линейного множителя.

Для требуемой нам оценки размерности достаточно рассмотреть более детально некоторые из этих семи уравнений. Записывая их в краткой форме, получим:

$$u \ : \ Re\,(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \frac{i}{2}c + q\lambda) = 0. \tag{18}$$

$$z_1 z_2 \text{ и } z_1\bar{z}_2 \ : \ 2(\varepsilon_2 B_1 + \varepsilon_1 A_2) = \varphi_1(p,q,c), \qquad B_1 + \bar{A}_2 = \varphi_2(p,q,c),$$
$$|z_1|^2 \text{ и } |z_2|^2 \ : \ Re\,(A_1) = \varphi_3(p,q,c), \qquad Re\,(B_2) = \varphi_4(p,q,c).$$

Здесь через φ_k обозначены выражения, зависящие (с учетом формул (15)) лишь от указанных в скобках аргументов, а не от всей совокупности параметров векторного поля (4) (или матрицы (5)).

Аналогично, выделяя в уравнении (12), отвечающем компоненте веса 3 основного тождества, слагаемые $z_1 u$ и $z_2 u$, получим уравнения

$$\bar{A}_3 + 2\varepsilon_1 A_3 = \varphi_5(p, q, A_1, A_2, B_1, B_2, c), \tag{19}$$

$$\bar{B}_3 + 2\varepsilon_2 B_3 = \varphi_6(p, , q, A_1, A_2, B_1, B_2, c).$$

Заметим, что из четырех уравнений (18), не содержащих $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, пять вещественных параметров-коэфициентов матрицы (5), не входящих в число основных, а именно $Re\, A_1$, $Re\, B_2$, A_2, $Im\, c$, выражаются через другие элементы этой матрицы.

Далее приходится рассматривать случаи, связанные со значениями пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Если оба эти параметра равны нулю, то второе уравнение из (17) не дает дополнительных ограничений на параметры поля. Но в этом случае уравнения (19) позволяют однозначно выразить A_3, B_3 через другие элементы матрицы (5). При этом свободными параметрами поля остаются не более чем 5 основных параметров, а также пять вещественных параметров $Im\, A_1$, $Im\, B_2$, $Re\, c$, B_1. В целом получаем в этом случае желаемую верхнюю оценку 10 для размерности алгебры $g(M)$, отвечающей аффинно-однородной поверхности.

Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$, то выписанные ограничения (15), (18), (19) позволяют получить лишь оценку

$$\dim_{\mathbb{R}} g(M) \leq 11.$$

Однако за счет рассмотрения других следствий основного тождества в работе [13] показано, что в этом случае (аффинно-однородных поверхностей трубчатого типа) алгебра $g(M)$ является не более, чем 7-мерной.

Наконец, во всех остальных случаях ограничения (19) оставляют на долю A_3, B_3 не более одного вещественного параметра в дополнение к набору $p, s, q, A_1, A_2, B_1, B_2$. В свою очередь, второе уравнение (18) дает здесь как минимум одно дополнительное вещественное ограничение на пару (A_2, B_1), так что и в этих случаях оценка (2) остается справедливой.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Как уже отмечалось выше, для квадрики $v = |z_1|^2 + |z_2|^2$, называемой еще сферой Пуанкаре — Мозера, размерность алгебры $g(M)$ равна в точности 10. Тем самым теорему 1 можно считать аффинной иллюстрацией известного голоморфного принципа (см.: [1]) максимальной размерности групп и алгебр квадрик (по сравнению с произвольными поверхностями, к которым эти квадрики являются «касательными»).

Замечание 2. Оценку теоремы 3 можно получить также и из голоморфной теории (см.: [18]). Например, идейно она следует из того, что все аффинные преобразования являются голоморфными, а размерность группы (локальных) голоморфных преобразований достигает максимума, равного 15, на квадрике (3). Ограничиваясь рассмотрением лишь аффинной подгруппы в группе дробно-линейных преобразований этой квадрики, необходимо считать тривиальными 5 из 15 вещественных параметров, описывающих такую группу.

2. Специальные канонические уравнения

Одним из звеньев схемы исследования аффинной однородности, описанной в §1, является изучение систем квадратичных уравнений, связанных с аффинно-однородными поверхностями. Неизвестными в этих системах по существу можно считать некоторые из коэффициентов канонических уравнений и комбинации таких коэффициентов.

Количества уравнений и неизвестных в таких системах достаточно велики: в уже изученных ситуациях порядок этих чисел колеблется от 15 до 20. При этом решение упомянутых систем существенным образом упрощается даже при незначительном уменьшении числа неизвестных величин в этих системах. Такое уменьшение возможно при использовании *специальных канонических уравнений* изучаемых поверхностей. Техника построения таких уравнений и их применения апробировалась на задачах о голоморфной однородности (см. [6; 8; 12]). Вариант применения такой техники в аффинном случае описывается ниже на примере семейства вещественных гиперповерхностей типа (1/2, 0) пространства $\mathbb{C}^3$.

Предлагаемая ниже процедура построения специальных канонических уравнений содержит два этапа. На первом из них аффинное уравнение вида (1) «упрощается» в ситуации произвольной пары коэффициентов $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Второй этап улучшения канонического уравнения (зависящий, вообще говоря, от пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$) обсуждается ниже лишь для случая поверхностей типа (1/2,0).

Итак, рассмотрим афинное каноническое уравнение (1) и преобразование координат

$$\begin{cases} z_1^* = z_1 + M_1 w, \\ z_2^* = z_2 + M_2 w, \\ \quad w^* = w \end{cases} \tag{20}$$

с произвольными комплексными параметрами M_1, M_2. Справедливо следующее утверждение, доказываемое простой подстановкой формул (20) в каноническое уравнение (см., например, [10]).

Предложение 2. *При замене (20) канонический вид (1) уравнения произвольной вещественной гиперповерхности сохраняется, а коэффициенты μ_1, μ_2 суммы (14) изменяются по формулам*

$$\begin{cases} \mu_1^* = \mu_1 + (\overline{M_1} + 2\varepsilon_1 M_1), \\ \mu_2^* = \mu_2 + (\overline{M_2} + 2\varepsilon_2 M_2). \end{cases} \tag{21}$$

Полученные формулы (21) приводят к следующему утверждению.

Предложение 3. *(О связи канонических коэффициентов 2-го и 3-го весов):*

a) если ни один из коэффициентов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ уравнения (1) не совпадает с числом $1/2$, то за счет аффинного преобразования координат оба коэффициента μ_1, μ_2 можно сделать равными нулю и освободить многочлен $F_3 = F_3^{(0)}(z, \bar{z})$ от переменной u;

b) если хотя бы один из коэффициентов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ уравнения (1) совпадает с числом $1/2$, то аффинным преобразованием пару $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ можно превратить в $(1/2, \varepsilon^*)$, где $\varepsilon^* = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 1/2$, а многочлен F_3 привести к виду

$$F_3 = i\mu(z_1 - \bar{z}_1)u + F_3^{(0)}(z, \bar{z}), \tag{22}$$

где $\mu \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Заметим, что при $\varepsilon \neq 1/2$ отображение, определяемое формулой

$$\xi \to \overline{\xi} + 2\varepsilon\xi, \tag{23}$$

является взаимно-однозначным в комплексной плоскости. При $\varepsilon = 1/2$ формула (23) превращается в $\xi \to 2Re\,\xi$. Такое «вырожденное» отображение переводит комплексную плоскость в точки вещественной оси, накрывая при этом **всю** ось.

С учетом этого замечания утверждение п. a) очевидно: решая уравнения

$$(\overline{M_1} + 2\varepsilon_1 M_1) = -\mu_1, \quad (\overline{M_2} + 2\varepsilon_2 M_2) = -\mu_2$$

и применяя преобразование (20) с найденными M_1, M_2, получим нулевые значения коэффициентов μ_1^*, μ_2^* в каноническом уравнении обсуждаемой поверхности.

В первом подслучае случая b), когда ровно один из пары коэффициентов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ совпадает с числом 1/2, можно считать (за счет замены $z_1 \leftrightarrow z_2$), что

$$\varepsilon_1 = 1/2, \ \varepsilon_2 \neq 1/2.$$

Тогда за счет преобразования вида (20) можно получить равенства

$$Re\,\mu_1^* = 0, \ \mu_2^* = 0.$$

Если при этом еще оказывается выполненным равенство $Im\,\mu_1^* = 0$, то предложение 3 автоматически верно в этом подслучае. Если же $Im\,\mu_1^* \neq 0$, то воспользуемся растяжением координат вида

$$z \to tz, \ w \to t^2 w. \tag{24}$$

При любом вещественном коэффициенте $t \neq 0$ преобразование (24) сохраняет вид (1) и при этом умножает все коэффициенты многочлена F_3 на t. Полагая $t = (Im\,\mu_1^*)^{-1}$, приводим коэффициент μ_1 к виду $\mu_1^{**} = i$, что доказывает предложение 3 в этой ситуации.

Наконец, в случае поверхностей трубчатого типа, характеризуемом равенствами

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2, \tag{25}$$

утверждение предложения 3 получено в [10], [13]. Помимо преобразования (20) и растяжения (24) здесь приходится дополнительно использовать «ортогональный поворот»

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

в пространстве $\mathbb{C}^2_z$. Суперпозиция такого поворота и растяжения координат позволяет перевести ненулевой вектор $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ с чисто мнимыми координатами в положение $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$.

Предложение 3 доказано полностью.

Следствие 1. *Для поверхностей типа* $(1/2,\,0)$ *каноническое уравнение (0.1) можно считать имеющим следующий специальный вид*

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + i\mu(z_1 - \bar{z}_1)u + F_3^{(0)}(z,\bar{z}) + \sum_{k+l+2m\geq 4} F_{klm}(z,\bar{z})u^m, \tag{26}$$

где вещественный параметр $\mu \in \{0, 1\}$.

На втором этапе упрощения уравнения (26) мы воспользуемся преобразованием

$$z_1 \to z_1 + itw \ (t \in \mathbb{R}).$$

Из сказанного выше следует, что такое преобразование сохраняет вид (26) и не затрагивает слагаемого $F_3^{(1)} \cdot u = i\mu(z_1 - \bar{z}_1)u = -2\mu y_1 u$. В то же время это преобразование, вообще говоря, изменяет многочлен третьей степени $F_3^{(0)}(z, \bar{z})$ из этого уравнения.

В целом такой многочлен допускает представление

$$F_3^{(0)}(z, \bar{z}) = F_{300} + F_{210} + (\text{комплексно сопряженные слагаемые}),$$

где

$$F_{300} = \sum_{k+\ell=3} f_{k\ell} z_1^k z_2^\ell, \qquad F_{210} = \left(\sum_{k+\ell=2} g_{k\ell} z_1^k z_2^\ell \right) \bar{z}_1 + \left(\sum_{k+\ell=2} h_{k\ell} z_1^k z_2^\ell \right) \bar{z}_2,$$

а $f_{k\ell}, g_{k\ell}, h_{k\ell}$ — некоторые комплексные коэффициенты.

Для краткости дальнейших формулировок удобно ввести в рассмотрение «матрицу» из 10 коэффициентов

$$\begin{pmatrix} f_{30} & & f_{21} & & f_{12} & & f_{03} \\ & g_{20} & & g_{11} & & g_{02} & \\ & h_{20} & & h_{11} & & h_{02} & \end{pmatrix}, \tag{27}$$

определяющую описанные выше многочлены.

Несложными вычислениями доказывается следующий факт.

Предложение 4. *При замене (2) изменение многочлена $F_3^{(0)}$ описывается формулами*

$$F_3^* = F_3 - 2tx_1F_2 = F_3 - t(z_1 + \bar{z}_1)\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + \bar{z}_1^2) \right). \tag{28}$$

В силу этого предложения поправки, вносимые в многочлен $F_3^{(0)}$ заменой (2), описываются тремя слагаемыми

$$-\left(\frac{t}{2}\, z_1^3 + \frac{3t}{2}\, z_1^2 \bar{z}_1 + t\, z_1 z_2 \bar{z}_2 \right)$$

и комплексно сопряженными к ним выражениями.

С учетом этого получаем следующее следствие.

Следствие 2. *За счет замены (2) можно обнулить вещественную часть одного (любого!) из трех коэффициентов многочлена $F_3^{(0)}$: либо $\mathrm{Re}\, f_{30}$, либо $\mathrm{Re}\, g_{20}$, либо $\mathrm{Re}\, h_{11}$.*

Везде ниже мы будем считать равной нулю вещественную часть коэффициента h_{11} канонического уравнения любой из рассматриваемых аффинно-однородных гиперповерхностей типа (1/2, 0).

Замечание. Еще одно преобразование, упрощающее уравнение поверхности (26), можно использовать, если в этом уравнении коэффициент μ равен нулю, но имеется хотя бы одна нетривиальная компонента веса $k \geq 3$. За счет растяжения координат $z \to tz$, $w \to t^2 w$ модуль произвольного ненулевого коэффициента из такой нетривиальной компоненты можно приравнять единице.

3. Аффинно-однородные поверхности типа (1/2, 0)

3.1. Оценки размерности в случае поверхностей типа (1/2, 0)

Цель этого раздела статьи — доказательство следующего утверждения.

Теорема 2. *Для размерности алгебры $g(M)$, соответствующей аффинно-однородной СПВ-гиперповерхности M типа $(1/2,\,0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$, справедлива оценка*

$$5 \le \dim_{\mathbb{R}} g(M) \le 7.$$

Если при этом:

a) отличен от нуля хотя бы один из трех коэффициентов

$$f_{21},\ g_{11},\ h_{20} \tag{29}$$

канонического уравнения (26) поверхности M, то алгебра $g(M)$ является в точности 5-мерной;

b) если все коэффициенты тройки (29) равны нулю, но нарушается хотя бы одно из двух равенств

$$g_{20} = 3f_{30}, \quad h_{11} = 2f_{30}, \tag{30}$$

то алгебра $g(M)$ является не более, чем 6-мерной.

Доказательство теоремы 2 мы проведем в несколько шагов. Сначала будет доказана уточненная общая оценка размерности алгебры $g(M)$ для однородных поверхностей типа (1/2, 0). После этого мы обсудим частные случаи, связанные с выполнением отдельных ограничений на коэффициенты канонических уравнений и обозначенные в формулировке теоремы 2 под пунктами a) и b).

Как и в §1, базой для получения желаемых оценок является исследование младших компонент основного тождества.

Подставляя обсуждаемые значения $\varepsilon_1 = 1/2$, $\varepsilon_2 = 0$ в формулы (17), получим следующее утверждение.

Предложение 5. *Для параметров векторного поля (4), касательного к произвольной поверхности типа (1/2,0), выполняются следующие уравнения, получаемые из компоненты веса 2 основного тождества:*

$$\begin{gathered}
z_1^2\ :\ A_1 - \frac{1}{2}Re\, c + \frac{i}{2}a\mu + (3f_{30}p_1 + f_{21}p_2 + g_{20}\bar{p}_1 + h_{20}\bar{p}_2) + \varphi(q) = 0,\\
z_2^2\ :\ (f_{12}p_1 + 3f_{03}p_2 + g_{02}\bar{p}_1 + h_{02}\bar{p}_2) + \varphi(q) = 0,\\
z_1z_2\ :\ A_2 + \frac{i}{2}b\mu + (2f_{21}p_1 + 2f_{12}p_2 + g_{11}\bar{p}_1 + h_{11}\bar{p}_2) + \varphi(q) = 0,\\
z_1\bar{z}_2\ :\ B_1 + \bar{A}_2 + \frac{i}{2}\bar{b}\mu + (2h_{20}p_1 + h_{11}p_2 + \bar{g}_{11}\bar{p}_1 + 2\bar{g}_{02}\bar{p}_2) + \varphi(q) = 0,\\
|z_1|^2\ :\ Re\,(A_1 - \frac{1}{2}c - \frac{i}{2}a\mu) + Re(2g_{20}p_1 + g_{11}p_2) + \varphi(q) = 0,\\
|z_2|^2\ :\ Re\,(B_2 - \frac{1}{2}c) + Re(h_{11}p_1 + 2h_{02}p_2) + \varphi(q) = 0,\\
u\ :\ Re\,(i\mu p_1 + \frac{i}{2}c + q\lambda) = 0.
\end{gathered} \tag{31}$$

Учтем еще формулы

$$a = 4iRe\,p_1 - 2q\mu,\ \ b = 2i\bar{p}_2, \tag{32}$$

получаемые в $(1/2,0)$-случае из (15). Так мы приходим к следующим формулам для элементов A_1, A_2, B_1, B_2, c матриц (5), отвечающих полям, касательным к однородным поверхностям:

$$Im\,c = 2\lambda q - 2\mu Im\,p_1,$$

$$A_1 = \frac{1}{2}Re\,c + 2\mu Re\,p_1 - (3f_{30}p_1 + f_{21}p_2 + g_{20}\bar{p}_1 + h_{20}\bar{p}_2) - \varphi(q) = 0,$$

$$A_2 = \mu\bar{p}_2 - (2f_{21}p_1 + g_{11}\bar{p}_1 + h_{11}\bar{p}_2) - \varphi(q), \tag{33}$$

$$B_1 = -2\mu p_2 + (\bar{g}_{11} - 2h_{20})p_1 + (\bar{h}_{11} - h_{11})p_2 + (2\bar{f}_{21} - \bar{g}_{11})\bar{p}_1 + \varphi(q),$$

$$Re\,B_2 = \frac{1}{2}Re\,c - Re(h_{11}p_1) + \varphi(q).$$

Эти формулы означают, что помимо основной пятерки параметров свободными в алгебре $g(M)$, отвечающей однородной поверхности M типа (1/2, 0), могут быть не более, чем шесть вещественных элементов $Re\,c,\ Im\,B_2,\ A3, B3$ матриц (5).

Получаемую отсюда грубую оценку $\dim_{\mathbb{R}} g(M) \leq 11$ можно, как и в общем случае, уточнить, рассматривая слагаемые веса 3 основного тождества.

Всего имеется 12 типов таких слагаемых. Уже упоминавшиеся выше равенства нулю коэффициентов при z_1u и z_2u превращаются в этом случае в уравнения

$$2Re\,A_3 + \frac{i}{2}\mu Re\,c = \varphi(p,s,q), \quad B_3 = \varphi(p,s,q). \tag{34}$$

Эти уравнения позволяют исключить B_3 и $Re\,A_3$ из числа свободных параметров поля и выразить их через основную пятерку параметров $g(M)$.

Тем самым получаем улучшенную оценку размерности алгебры в обсуждаемом случае $\dim_{\mathbb{R}} g(M) \leq 8$. Такая оценка тоже не является окончательной. Для доведения ее до желаемой цифры 7 придется рассмотреть часть компоненты веса 3, зависящую только от переменных $z, \bar{z}$.

Здесь мы имеем еще 10 уравнений, означающих обращение в нуль коэффициентов перед мономами степени 3 от переменных $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$. В силу уже проведенных рассмотрений каждое из них можно записать в виде

$$U_k(F_3^{(0)}, Re\,c, Im\,B_2, Re\,A_3) = \varphi_k(p_1, p_2, q),\ \ k = 1, ..., 10. \tag{35}$$

Зависимость обеих частей таких уравнений от параметров — линейная, а точный вид левых частей можно описать в «матричной» форме следующим утверждением (его доказательство является чисто техническим и потому здесь опущено).

Предложение 6. *«Матрица» левых частей $U_k(F_3^{(0)}, Re\,c, Im\,B_2, Im\,A_3)$ системы (35) имеет вид*

$$\begin{pmatrix} f_{30}\cdot t_1 - t_3 & f_{21}(t_1 + it_2) & f_{12}(t_1 + 2it_2) & f_{03}(t_1 + 3it_3) \\ g_{20}\cdot t_1 - 3t_3 & g_{11}(t_1 + it_2) & g_{02}(t_1 + 2it_2) & \\ h_{20}(t_1 - it_2) & h_{11}\cdot t_1 - 2t_3 & h_{02}(t_1 + t_2) & \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где через t_1, t_2, t_3 обозначены, соответственно, $Re\,c/2,\ Im\,B_2,\ Im\,A_3$.

Первое из уравнений (35) дает нам формулу

$$Im\,A_3 = f_{30} \cdot \frac{1}{2} Re\,c + \varphi(p, s, q), \tag{37}$$

показывающую, что параметр $Im\,A_3$ не является свободным для аффинно-однородных поверхностей типа $(1/2, 0)$. Тем самым доказана первая часть теоремы 2, связанная с оценкой $\dim_{\mathbb{R}} g(M) \leq 7$ для однородных поверхностей типа (1/2,0).

Для доказательства остальных утверждений рассмотрим $z_1^2 z_2$-, $z_1 z_2 \bar{z}_1$-, и $z_1^2 \bar{z}_2$-уравнения, обозначенные в предложении 6 и содержащие в левых частях в виде множителей коэффициенты f_{21}, g_{11}, h_{02} соответственно.

Пусть хотя бы один из тройки этих коэффициентов, например, f_{21}, отличен от нуля. Тогда соответствующее уравнение (35), то есть

$$f_{21} \left(\frac{1}{2} Re\,c + i\,Im\,B_2 \right) = \varphi(p, s, q),$$

(после деления на f_{21}) позволяет однозначно выразить из него $Re\,c$ и $Im\,B_2$. Тем самым доказано утверждение п. a) теоремы 2.

Для доказательства п. b) подставим формулу (37) в $z_1^2 \bar{z}_1$- и $z_1 z_2 \bar{z}_2$-уравнения системы (35), содержащие параметр $Im\,A_3$.

После подстановки эти уравнения примут вид

$$\frac{1}{2}(g_{20} - 3f_{30}) Re\,c = \varphi(p, s, q), \quad \frac{1}{2}(h_{11} - 2f_{30}) Re\,c = \varphi(p, s, q).$$

Если хотя бы одна из скобок-множителей в левых частях двух полученных уравнений отлична от нуля, то параметр $Re\,c$ выражается через основную пятерку (p, s, q). Размерность алгебры $g(M)$ в этом случае не превысит 6. Это и есть требуемое в п. b) утверждение.

Теорема 2 доказана полностью.

3.2. Ограничения на коэффициенты канонических уравнений

Общая схема изучения однородности, описанная в первом параграфе статьи, подразумевает использование различных ограничений не только на размерности рассматриваемых алгебр Ли, но и на отдельные элементы таких алгебр.

В силу предложения 5 матрицы, входящие в алгебру $g(M)$, отвечающую аффинно-однородной поверхности, зависят от коэффициентов канонического уравнения поверхности M. В связи с этим получение дополнительной информации о таких коэффициентах (например, в духе работы [4]) дает дополнительные возможности в решении исходной задачи описания однородных поверхностей. Обсудим некоторые свойства коэффициентов, пока остававшиеся «в тени».

При получении оценочных результатов теоремы 2 мы использовали пять из семи формул, связанных с компонентой веса 2 основного тождества (см. предложение 6). Рассмотрим оставшиеся два уравнения, отвечающие z_2^2 и $|z_1|^2$.

Например, из z_2^2-равенства следует, что

$$f_{12} = f_{03} = g_{02} = h_{02} = 0 \tag{38}$$

для любой однородной гиперповерхности типа (1/2,0).

А подставляя в $|z_1|^2$-уравнение формулу для A_1 из (34), получим завершающее следствие системы (31) в виде

$$Re\left((-3f_{30}+2g_{20}-\bar{g}_{20})p_1+(g_{11}-f_{21}-\bar{h}_{20})p_2\right)+\mu Im\, a+\varphi(q)=0.$$

С учетом первой формулы из (32) получаем отсюда еще два равенства

$$-3f_{30}+2g_{20}-\bar{g}_{20}+4\mu=0, \qquad g_{11}-f_{21}-\bar{h}_{20}=0. \tag{39}$$

Далее нас будут интересовать в первую очередь однородные поверхности с «богатыми» группами $G(M)$, размерность которых строго больше 5. Согласно теореме 2, тройка коэффициентов (f_{21},g_{11},h_{20}) для таких поверхностей тривиальна, и второе из равенств (39) неинформативно. А вот первое дает нам формулу

$$3f_{30}=2g_{20}-\bar{g}_{20}+4\mu,$$

уменьшающую число неизвестных элементов в базисных матрицах алгебры $g(M)$.

Такие упрощения позволяют представить базисы изучаемых матричных алгебр $g(M)$ в обозримой форме. Например, согласно рассмотрениям [10], наиболее значимой часто оказывается первая четверка матриц, отвечающая следующим наборам (p_1,p_2,q):

$$(1,0,0),\ (i,0,0),\ (0,1,0),\ (0,i,0).$$

Отметим, что при описании матричных элементов нумеруемых матриц здесь и далее используются «компьютеризированные» обозначения, содержащие номер матрицы в качестве нижнего индекса; номера самих этих элементов (например, $A1, B3$) включаются в «строчные» обозначения.

С учетом этого можно сформулировать, например, следующее утверждение.

Предложение 7. *При $f_{21}=g_{11}=h_{20}=0,\ h_{11}=ih(h\in\mathbb{R})$ первая четверка базисных матриц алгебры $g(M)$ может быть представлена в виде*

$$\begin{pmatrix} m_1+(6\mu+2r+4it) & 0 & A3_1 & 1\\ 0 & m_1 & B3_1 & 0\\ 4i & 0 & 2m_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_2+(2t-4i\mu) & 0 & A3_2 & i\\ 0 & m_2+h & B3_2 & 0\\ 0 & 0 & 2(m_2-i\mu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} m_3 & (\mu-ih) & A3_3 & 0\\ -2(\mu+ih) & m_3 & B3_3 & 1\\ 0 & 2i & 2m_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_4 & -i(\mu-ih) & A3_4 & 0\\ -2i(\mu+ih) & m_4 & B3_4 & i\\ 0 & 2 & 2m_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

с некоторыми вещественными $r,t,m_1,...,m_4$ и комплексными $A3_k, B3_k$.

Доказательство предложения 7 получается за счет подстановки в матрицы соответствующих значений параметров (p_1,p_2,q) и использования обозначений

$$g_{20}=r+it\ (r=Re\, g_{20},\ t=Im\, g_{20}).$$

Аналогичные упрощения базисных матриц будут использоваться и в следующем параграфе. Отметим еще один момент, связанный с коэффициентами канонических уравнений однородных поверхностей и с первой формулой (39).

Следствие 3. *Если сумма $S=-3f_{30}+2g_{20}-\bar{g}_{20}$ коэффициентов канонического уравнения аффинно-однородной поверхности типа (1/2,0) является чисто мнимой, то вся эта сумма равна нулю, и коэффициент μ также нулевой.*

4. Сведение задачи к случаю 5-мерных алгебр

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 3. *Если для размерности алгебры Ли $g(M)$, отвечающей аффинно-однородной поверхности M типа $(1/2, 0)$, выполняется оценка*

$$\dim_{\mathbb{R}} g(M) > 5,$$

то существует 5-мерная группа $H(M)$ аффинных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$, транзитивно действующая на поверхности M. Алгебра Ли этой группы является подалгеброй $g(M)$.

Доказательство. Согласно предложению 2 считаем, что уравнение любой обсуждаемой поверхности имеет специальный вид (26), то есть

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{1}{2}(z_2^2 + \bar{z}_2^2) + F_3^{(0)}(z, \bar{z}) + i\mu(z_2 - \bar{z}_2)u + \sum_{k+l+2m \geq 4} F_{klm}(z, \bar{z})u^m, \ \mu \in \{0, 1\}.$$

С учетом теоремы 2 нам достаточно разобрать следующие два случая возможных размерностей алгебры $g(M)$ и сопутствующих этим размерностям ограничений на коэффициенты многочлена $F_3^{(0)}$:

1-й случай: $\dim_{\mathbb{R}} g(M) = 7$, свободными параметрами в алгебре $g(M)$ являются основная пятерка, а также $Re\, c$, $Im\, B_2$; «матрица» (27) коэффициентов многочлена $F_3^{(0)}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} ir & 0 & 0 & 0 \\ & 3ir & 0 & 0 \\ & 0 & 2ir & 0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

с некоторым вещественным r.

2-й случай: $\dim_{\mathbb{R}} g(M) = 6$, свободными параметрами в алгебре $g(M)$ являются основная пятерка, а также $Im\, B_2$; «матрица» (2.7) коэффициентов многочлена $F_3^{(0)}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_{30} & 0 & 0 & 0 \\ & g_{20} & 0 & 0 \\ & 0 & h_{11} & 0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

с чисто мнимым h_{11} и некоторыми комплексными f_{30}, g_{20}.

4.1. Случай 7-мерных алгебр

В рамках 1-го случая многочлен $F_3^{(0)}$ может иметь не более трех ненулевых коэффициентов f_{30}, g_{20}, h_{11}; в силу (40) все они — чисто мнимые. Но тогда, в силу следствия, завершающего предыдущий параграф статьи, все эти коэффициенты — нулевые. Также нулевым является и коэффициент μ из слагаемого $F_3^{(1)}$. Следовательно, необходимым условием для 7-мерной алгебры $g(M)$ является обращение в нуль всего многочлена

$$F_3 = F_3^{(1)}u + F_3^{(0)} = i\mu(z_1 - \bar{z}_1)u + F_3^{(0)}.$$

С учетом этого формулы (33) для элементов семи базисных матрицы алгебры $g(M)$ можно считать имеющими следующий достаточно простой вид:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A3_1 & 1 \\ 0 & 0 & B3_1 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A3_2 & i \\ 0 & 0 & B3_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A3_3 & 0 \\ 0 & 0 & B3_3 & 1 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A3_4 & 0 \\ 0 & 0 & B3_4 & i \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} A1_5 & A2_5 & A3_5 & 0 \\ B1_5 & B2_5 & B3_5 & 0 \\ 0 & 0 & 2i\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{42}$$

$$E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & A3_6 & 0 \\ 0 & 1 & B3_6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A3_7 & 0 \\ 0 & i & B3_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 8. *Набор матриц вида (42) является базисом матричной алгебры Ли лишь в тривиальном случае*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство этого предложения основывается на свойстве замкнутости алгебры Ли относительно операции коммутирования

$$[E_k, E_\ell] = E_k E_\ell - E_\ell E_k$$

и получается за счет рассмотрения скобок (коммутаторов) отдельных матриц из набора (42). Требование разложимости каждой такой скобки по обсуждаемому базису позволяет постепенно упрощать матрицы, составляющие базис, и в конце концов приводит этот базис к виду (43).

Замечание. Аккуратное вычисление всех таких скобок естественно проводить, используя средства символьной математики. При подготовке данной работы использовался пакет MAPLE.

4.2. Случай 6-мерных алгебр

Помимо пятерки основных параметров свободным в алгебре $g(M)$ в этом случае может оказаться либо $Re\, c$, либо $Im\, A_2$. Здесь базисы гипотетических алгебр Ли, отвечающих однородным поверхностям, должны иметь вид ($h, m_1, ..., m_6, n \in \mathbb{R},\ m_6^2+n^2 \neq 0$)

$$E_1 = \begin{pmatrix} A1_1 & 0 & A3_1 & 1 \\ 0 & B2_1 & B3_1 & 0 \\ 4\,i & 0 & 2\,m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} A1_2 & 0 & A3_2 & i \\ 0 & B2_2 & B3_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,m_2 - 2\,i\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$\begin{pmatrix} m_3 & \mu - ih & A3_3 & 0 \\ -2\,\alpha - 2\,ih & m_3 & B3_3 & 1 \\ 0 & 2\,i & 2\,m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} m_4 & -i\,(\mu - ih) & A3_4 & 0 \\ -2\,i\,(\mu + ih) & m_4 & B3_4 & i \\ 0 & 2 & 2\,m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} A1_5 & A2_5 & A3_5 & 0 \\ B1_5 & B2_5 & B3_5 & 0 \\ -2\,\mu & 0 & 2\,m_5 + 2\,i\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_6 = \begin{pmatrix} m_6 & 0 & A3_6 & 0 \\ 0 & m_6 + in & B3_6 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,m_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущем случае, будем рассматривать попарные скобки $W_{k\ell} = [E_k, E_\ell]$ таких матриц. Например, комбинация

$$[E_2, E_6] + m_6 E_2 = \begin{pmatrix} m_6 A1_2 & 0 & A1_2 A3_6 + 2\,A3_2 m_6 - A3_6\,(2\,m_2 - 2\,i\mu) & 0 \\ 0 & m_6 B2_2 & (2\,m_6 - i)\,B3_2 + (B2_2 - 2\,m_2 + 2\,i\mu)\,B3_6 & 0 \\ 0 & 0 & m_6\,(2\,m_2 - 2\,i\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

должна разлагаться по базису $E_1, ..., E_6$ такой алгебры.

Обращение в нуль последнего столбца матрицы (45) означает, что ее разложение по базису (44) не содержит матриц $E_1 - E_5$. А так как (3,3)-элемент матрицы E_6 из базиса (44) является вещественным, то мы получаем первое необходимое условие на элементы матриц (44) в виде

$$m_6 \cdot \mu = 0. \tag{46}$$

Теперь предлагается рассмотреть два подслучая, связанные с равенством (46).

В первом случае, то есть при $m_6 = 0$ мы сразу можем считать, что $n = 1$. Здесь справедливо следующее утверждение.

Предложение 9. *Если базис 6-мерной алгебры $g(M)$ имеет вид (44), и $m_6 = 0$, $n = 1$, то либо*

а) линейная оболочка матриц $E_1, ..., E_5$ является 5-мерной подалгеброй $g(M)$, либо б) матрицы базиса (44) имеют специальный вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} -2\,ia & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\,i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 2\,a & 0 & 0 & i \\ 0 & 2\,a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -ia & 0 & 0 \\ -2\,ia & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\,i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_4 = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ 2\,a & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

при некотором $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доказательство предложения 9 состоит из нескольких шагов (выполненных с использованием пакета MAPLE).

Шаг 1. При $m_6 = 0$ из рассмотрения скобки W_{16} следует, что E_6 — тривиальная, то есть $m_6 = A3_6 = B3_6 = 0$.

Шаг 2. При тривиальной E_6 из рассмотрения скобок $W_{16}, W_{26}, W_{56}, W_{36}, W_{46}$ получаем частичные упрощения матриц E_1, E_2, E_5, E_3, E_4. Теперь они имеют вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} A1_1 & 0 & A3_1 & 1 \\ 0 & B2_1 & 0 & 0 \\ 4\,i & 0 & 2\,m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} A1_2 & 0 & A3_2 & i \\ 0 & B2_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,m_2 - 2\,i\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mu - ih & 0 & 0 \\ -2\,\mu - 2\,ih & 0 & B3_3 & 1 \\ 0 & 2\,i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i\,(\mu - ih) & 0 & 0 \\ -2\,i\,(\mu + ih) & 0 & iB3_3 & i \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} A1_5 & 0 & A3_5 & 0 \\ 0 & B2_5 & 0 & 0 \\ -2\,\mu & 0 & 2\,m_5 + 2\,i\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. При обозначенных упрощениях рассматриваются (2,2)-элементы попарных скобок пяти первых базисных матриц (4.9). Здесь

$$(W_{34})_{2,2} = 4(i\mu^2 + ih^2 + B3_3),$$

тогда как (2,2)-элементы всех остальных — нулевые.

Дальнейшие рассмотрения базиса (48) и его возможные упрощения свяжем с проверкой равенства

$$B3_3 = -i(\mu^2 + h^2). \tag{49}$$

Если оно выполняется, то в разложениях всех попарных скобок пяти базисных матриц $E_1, ..., E_5$ НЕ участвует матрица E_6. В силу этого для любой 6-мерной алгебры Ли g с базисом (48) при выполнении условия (49) линейная оболочка $< E_1, ..., E_5 >$ является 5-мерной «транзитивной» подалгеброй Ли алгебры g.

Поэтому далее имеет смысл рассматривать ситуации, в которых равенство (49) для элемента $B3_3$ не выполняется. Информацию об этом матричном элементе дают последующие рассмотрения скобок базисных матриц.

Шаг 4. Из рассмотрения скобки W_{13} следует, что

$$B3_3 = \frac{i}{2}\,(-2\,h + 2\,i\mu + iA1_1)\,(-h + i\mu)\,.$$

Это означает, что интересующий нас элемент $(W_{34})_{2,2}$ имеет следующий вид

$$(W_{34})_{2,2} = 2\,i\,(-h + i\mu)\,(iA1_1 - 4\,h)\,. \tag{50}$$

Шаг 5. Из рассмотрения скобки W_{23} и соответствующей ей «исправленной скобки» $R_{23} = W_{23} - \sum_{k=1}^{5} r_k E_k$, имеющей нулевые элементы в 4-м столбце, следует, что $B2_2 = m_2 + h$, и

$$(R_{23})_{2,1} = -2\,i\,(-2\,h + 2\,i\mu + A1_2)\,(-h + i\mu) = 0.$$

Это означает с учетом неравенства $(W_{34})_{2,2} \neq 0$ и формулы (50), что $A1_2 = 2\,h - 2\,i\mu$.

Но в силу равенства $Im\,A1_2 = -4\mu$, вытекающего из предложения 3.3, это приводит к важному условию

$$\mu = 0.$$

Шаг 6. С учетом всех полученных выше упрощений изучение оставшихся скобок базисных матриц (48) приводит к единственному случаю, в котором матричный элемент $(W_{34})_{2,2}$ может быть ненулевым. Этот случай описывается в точности формулами (47).

Предложение 9 тем самым доказано.

Несложно проверить, что при любых вещественных a линейное пространство с базисом (47) является алгеброй Ли. При этом за счет матричных подобий параметр $a \neq 0$ можно превратить в единицу.

Линейная оболочка пяти первых матриц из базиса (47) полученной алгебры не образует, в отличие от п. а) предложения 5.2, замкнутую подалгебру, так как

$$[E_3, E_4] = 2E_1 - 4E_5 + 4E_6.$$

Тем не менее утверждение о существовании «транзитивной» 5-мерной подалгебры в 6-мерной алгебре $g(M)$ справедливо и в этом случае. Опираясь на коммутационные соотношения в $g(M)$, имеющие вид

$$[E_1, E_2] = -4E_5,\ [E_1, E_3] = 2E_4,\ [E_1, E_4] = -2E_3,\ [E_2, E_5] = 2E_5,$$

$$[E_3, E_4] = 2E_1 - 4E_5 + 4E_6,\ [E_3, E_6] = -E_4,\ [E_4, E_6] = E_3,$$

легко видеть, что требуемой транзитивной подалгеброй в ней является линейная оболочка пяти матриц

$$(E_1 + 2E_6), E_2, E_3, E_4, E_5.$$

Замечание. С точностью до аффинных преобразований интегральным многообразием, отвечающим алгебрам с базисом (47), при $a = 1$ является (см. [14]) поверхность

$$v^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2,$$

получаемая из рассмотрений 5-мерных алгебр Ли.

Второй подслучай 6-мерных алгебр: $\mu = 0$, $m_6 \neq 0$. Этот случай фактически соответствует свободному параметру $Re\,c$; здесь базис алгебры можно считать имеющим вид $(r_3, r_4, r_6, \lambda \in \mathbb{R})$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} A1_1 & 0 & A3_1 & 1 \\ 0 & B2_1 & B3_1 & 0 \\ 4\,i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} A1_2 & 0 & A3_2 & i \\ 0 & B2_2 & B3_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & A2_3 & A3_3 & 0 \\ B1_3 & ir_3 & B3_3 & 1 \\ 0 & 2\,i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & A2_4 & A3_4 & 0 \\ B1_4 & ir_4 & B3_4 & i \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} A1_5 & A2_5 & A3_5 & 0 \\ B1_5 & B2_5 & B3_5 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,i\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & A3_6 & 0 \\ 0 & 1+ir_6 & B3_6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 10. *Если базис 6-мерной алгебры Ли $g(M)$ имеет вид (51), то линейная оболочка матриц $E_1, ..., E_5$ является 5-мерной подалгеброй Ли этой алгебры.*

Доказательство этого утверждения получается по той же схеме, что и доказательство предыдущего предложения 9.

Рассмотрим в первую очередь коммутаторы $[E_2, E_6]$ и $[E_2, E_3]$ матриц из базиса (51). В случае алгебры Ли обе эти скобки, как и скобки любых других пар базисных матриц из (51), должны разлагаться (с вещественными коэффициентами) по этому базису. При этом

$$[E_2, E_6] + E_2 = \begin{pmatrix} A1_2 & 0 & A1_2 A3_6 + 2\,A3_2 & 0 \\ 0 & B2_2 & B2_2 B3_6 + 3\,B3_2 - (1+ir_6)\,B3_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[E_2, E_3] = \begin{pmatrix} 0 & 2\,iA3_2 & -A2_3 B3_2 & 0 \\ 0 & 2\,iB3_2 & -B1_3 A3_2 - ir_3 B3_2 & -iB1_3 \\ 0 & 0 & -2\,iB3_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует сначала, что $B2_2 = 0$, $A1_2 = 0$, а затем, аналогично, $B1_3 = 0$, $B3_2 = 0$, $A3_2 = 0$.

Это означает, что $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, так же, как и $E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — тривиальные матрицы.

После этого рассмотрение скобок $[E_k, E_5]$ при $k = 1, 3, 4$ приводит к выводам о нулевых элементах $B3_1, B3_3, B3_4$ базисных матриц (51). Весь этот базис теперь имеет вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} A1_1 & 0 & A3_1 & 1 \\ 0 & B2_1 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A3_3 & 0 \\ 0 & B2_3 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A3_4 & 0 \\ 0 & B2_4 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & A3_6 & 0 \\ 0 & 1+ir_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Для завершения доказательства предложения 10 достаточно убедиться, что (2,2)- и (3,1)-элементы десяти скобок $[E_k, E_l],\ k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ являются нулевыми. Это означает, что разложение любой такой скобки по базису (4.15) 6-мерной алгебры в действительности является разложением по первым пяти ее матрицам.

Предложение 10 доказано.

Замечание. В качестве примера, подтверждающего содержательный характер предложения 4.3, можно упомянуть 6-мерную алгебру Ли с базисом

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+ir_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При любом вещественном r_6 такая алгебра, очевидно, является подалгеброй Ли 7-мерной алгебры (43) и содержит в себе 5-мерную подалгебру $h =< E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 >$.

Теорема 3 доказана полностью.

В силу этой теоремы описание всех аффинно-однородных гиперповерхностей типа (1/2, 0) сводится к построению списка таких поверхностей, обладающих в точности 5-мерными группами и алгебрами Ли. Полный список именно таких многообразий построен в [14].

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00709.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белошапка, В. К. Симметрии вещественных гиперповерхностей трехмерного комплексного пространства / В. К. Белошапка // Мат. заметки. — 2005. — Т. 78. — № 2. — С. 171–179.

2. Бишоп, Р. Геометрия многообразий / Р. Бишоп, Р. Криттенден. — М. : Мир, 1963. — 364 с.

3. Данилов, М. С. Об аффинной однородности индефинитных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ / М. С. Данилов, А. В. Лобода // Мат. заметки. — 2010. — Т. 88. — № 6. — С. 866–883.

4. Ежов, В. В. Каноническая форма многочлена 4-го порядка в нормальном уравнении вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ / В. В. Ежов, А. В. Лобода, Г. Шмальц // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66. — № 4. — С. 624–626.

5. Лобода, А. В. Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода // Материалы II Междунар. конф. «Геометрический анализ и его приложения». — Волгоград, 2014. — С. 95–97.

6. Лобода, А. В. Всякая голоморфно-однородная трубка в $\mathbb{C}^2$ имеет аффинно-однородное основание / А. В. Лобода // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42. — № 6. — С. 1335–1339.

7. Лобода, А. В. О линейной однородности жестких вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, Ж. А. Бугаева, А. С. Ходарев // Тез. докл. Междунар. школы-семинара, посвящ. 90-летию Н. В. Ефимова. — Абрау-Дюрсо, 2000. — С. 131–133.

8. Лобода, А. В. О некоторых инвариантах трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$ / А. В. Лобода // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59. — № 2. — С. 211–223.

9. Лобода, А. В. О размерности группы, транзитивно действующей на гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода // Функциональный анализ и его приложения. — 1999. — Т. 33. — № 1. — С. 68–71.

10. Лобода, А. В. Об аффинной однородности поверхностей трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода, Т. Т. З. Нгуен // Труды МИАН. — 2012. — Т. 279. — С. 93–110.

11. Лобода, А. В. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Изв. вузов. Математика. — 2003. — № 10 (497). — С. 38–50.

12. Лобода, А. В. Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии / А. В. Лобода // Мат. сб. — 2001. — Т. 192. — № 12. — С. 3–24.

13. Нгуен, Т. Т. З. Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ / Т. Т. З. Нгуен // Мат. заметки. — 2013. — Т. 94. — № 2. — С. 246–265.

14. Atanov, A. V. Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type $(1/2, 0)$ in $\mathbb{C}^3$ / A. V. Atanov, A. V. Loboda, A. V. Shipovskaya // ArXiv.org/abs/1401.2252, c. 1–34.

15. Beloshapka, V. K. Classification of homogeneous CR-manifolds in dimension 4 / V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskij // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — Vol. 374. — № 2. — P. 655–672.

16. Beloshapka, V. K. Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic / V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskij // J. Geom. Anal. — 2010. — Vol. 20. — № 3. — P. 538–564.

17. Cartan, E. Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes / E. Cartan // Ann. Math. Pura Appl. — 1932. — Vol. 11. — № 4. — P. 17–90.

18. Chern, S. S. Real hypersurfaces in complex manifolds / S. S. Chern, J. K. Moser // Acta Math. — 1974. — Vol. 133. — № 4. — P. 219–271.

19. Eastwood, M. On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space / M. Eastwood, V. V. Ezhov // Geom. Dedicata. — 1999. — Vol. 77. — P. 11–69.

20. Fels, G. Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 / G. Fels, W. Kaup // Acta Math. — 2008. — Vol. 210. — P. 1–82.

21. Isaev, A. V. On Chern-Moser normal forms of strongly pseudoconvex hypersurfaces with high-dimensional stability group / A. V. Isaev // Pacific J. Math. — 2008. — Vol. 235. — № 2. — P. 235–244.

22. Isaev, A. V. On the number of affine equivalence classes of spherical tube hypersurfaces / A. V. Isaev // Math. Ann. — 2011. — Vol. 349. — P. 59–74.

23. Kolar, M. Normal forms for hypersurfaces of finite type in $\mathbb{C}^2$ / M. Kolar // Math. Res. Lett. — 2005. — Vol. 12. — P. 897–910.

24. Lamel, B. Finite jet determination of CR mappings / B. Lamel, N. Mir // Advances in Mathematics. — 2007. — Vol. 216. — P. 153–177.

25. Stanton, N. K. A normal form for rigid hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$ / N. K. Stanton // Amer. J. Math. — 1991. — Vol. 113. — № 5. — P. 877–910.

REFERENCES

1. Beloshapka V.K. Simmetrii veshchestvennykh giperpoverkhnostey trekhmernogo kompleksnogo prostranstva [On symmetries of real hypersurfaces of three-dimensional complex space]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes]. 2005, vol. 78, no. 2, pp. 171–179.

2. Bishop R., Krittenden R. *Geometriya mnogoobraziy* [Geometry of manifolds]. Moscow, Mir Publ., 1963. 364 p.

3. Danilov M.S., Loboda A.V. Ob affinnoy odnorodnosti indefinitnykh veshchestvennykh giperpoverkhnostey prostranstva $\mathbb{C}^3$ [On affine homogeneity of indefinite real hypersurfaces of space $\mathbb{C}^3$]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes]. 2010, vol. 88, no. 6, pp. 866–883.

4. Ezhov V.V., Loboda A.V., Shmalts G. Kanonicheskaya forma mnogochlena 4-go poryadka v normalnom uravnenii veshchestvennoy giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$ [Canonical form of a 4-th order polynomial in normal equation of a real hypersurface in $\mathbb{C}^3$]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes]. 1999, vol. 66, no. 4, pp. 624–626.

5. Loboda A.V. Affinno-odnorodnye veshchestvennye giperpoverkhnosti 3-mernogo kompleksnogo prostranstva [Affinely homogeneous real hypersurfaces of 3-dimensional complex space]. *Materialy II Mezhdunar. konf. «Geometricheskiy analiz i ego prilozheniya»* [Proceedings of the II International Conference "Geometric analysis and its applications"]. Volgograd, 2014, pp. 95–97.

6. Loboda A.V. Vsyakaya golomorfno-odnorodnaya trubka v $\mathbb{C}^2$ imeet affinno-odnorodnoe osnovanie [Each holomorphically homogeneous tube in $\mathbb{C}^2$ has an affinely homogeneous base]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal]. 2001, vol. 42, no. 6, pp. 1335–1339.

7. Loboda A.V., Bugaeva Zh.A., Khodarev A.S. O lineynoy odnorodnosti zhestkikh veshchestvennykh giperpoverkhnostey 3-mernogo kompleksnogo prostranstva [On linear homogeneity of rigid real hypersurfaces of 3-dimensional complex space]. *Tez. dokl. Mezhdunar. shkoly-seminara, posvyashch. 90-letiyu N. V. Efimova* [Proceedings of the International School-Seminar to the 90 years of N.V. Efimov]. Abrau-Dyurso, 2000, pp. 131–133.

8. Loboda A.V. O nekotorykh invariantakh trubchatykh giperpoverkhnostey v $\mathbb{C}^2$ [On some invariants of tubular hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes]. 1996, vol. 59, no. 2, pp. 211–223.

9. Loboda A.V. O razmernosti gruppy, tranzitivno deystvuyushchey na giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$ [On dimension of a group transitively acting on a hypersurface in $\mathbb{C}^3$]. *Funktsionalnyy analiz i ego prilozheniya* [Functional Analysis and Its Applications]. 1999, vol. 33, no. 1, pp. 68–71.

10. Loboda A.V., Nguen T.T.Z. Ob affinnoy odnorodnosti poverkhnostey trubchatogo tipa v $\mathbb{C}^3$ [On affine homogeneity of a surfaces of tubular type in $\mathbb{C}^3$]. *Trudy MIAN* [Procedeengs of the Steklov Institute of Mathematics]. 2012, vol. 279, pp. 93–110.

11. Loboda A.V., Khodarev A.S. Ob odnom semeystve affinno-odnorodnykh veshchestvennykh giperpoverkhnostey 3-mernogo kompleksnogo prostranstva [On a family

of affinely homogeneous real hypersurfaces of 3-dimensional complex space]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics]. 2003, no. 10 (497), pp. 38–50.

12. Loboda A.V. Odnorodnye strogo psevdo-vypuklye giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$ s dvumernymi gruppami izotropii [Homogeneous strictly pseudo convex hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ with two-dimensional isotropy groups]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics]. 2001, vol. 192, no. 12, pp. 3–24.

13. Nguen T.T.Z. Affinno-odnorodnye veshchestvennye giperpoverkhnosti trubchatogo tipa v $\mathbb{C}^3$ [Affine homogeneous real hypersurfaces of tubular type in $\mathbb{C}^3$]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes]. 2013, vol. 94, no. 2, pp. 246–265.

14. Atanov A.V., Loboda A.V., Shipovskaya A.V. Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type $(1/2, 0)$ in $\mathbb{C}^3$ // ArXiv.org/abs/1401.2252, pp. 1–34.

15. Beloshapka V.K., Kossovskij I.G. Classification of homogeneous CR-manifolds in dimension 4. *J. Math. Anal. Appl.* 2011, vol. 374, no. 2, pp. 655–672.

16. Beloshapka V.K., Kossovskij I.G. Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic. *J. Geom. Anal.* 2010, vol. 20, no. 3, pp. 538–564.

17. Cartan E. Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes. *Ann. Math. Pura Appl.* 1932, vol. 11, no. 4, pp. 17–90.

18. Chern S.S., Moser J.K. Real hypersurfaces in complex manifolds. *Acta Math.* 1974, vol. 133, no. 4, pp. 219–271.

19. Eastwood M., Ezhov V.V. On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space. *Geom. Dedicata.* 1999, vol. 77, pp. 11–69.

20. Fels G., Kaup W. Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5. *Acta Math.* 2008, vol. 210, pp. 1–82.

21. Isaev A.V. On Chern-Moser normal forms of strongly pseudoconvex hypersurfaces with high-dimensional stability group. *Pacific J. Math.* 2008, vol. 235, no. 2, pp. 235–244.

22. Isaev A.V. On the number of affine equivalence classes of spherical tube hypersurfaces. *Math. Ann.* 2011, vol. 349, pp. 59–74.

23. Kolar M. Normal forms for hypersurfaces of finite type in $\mathbb{C}^2$. *Math. Res. Lett.* 2005, vol. 12, pp. 897–910.

24. Lamel B., Mir N. Finite jet determination of CR mappings. *Advances in Mathematics.* 2007, vol. 216, pp. 153–177.

25. Stanton N.K. A normal form for rigid hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$. *Amer. J. Math.* 1991, vol. 113, no. 5, pp. 877–910.

ON DIMENSIONS OF AFFINE TRANSFORMATION GROUPS TRANSITIVELY ACTING ON A REAL HYPERSURFACES IN $\mathbb{C}^3$

Loboda Alexander Vasilevich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering
lobvgasu@yandex.ru
St. 20-letiya Oktjabrja, 84, 394006 Voronezh, Russian Federation

Abstract. The main content of the article constitute the three theorems related to the dimensions of homogeneous manifolds.

Traditionally we mean homogeneity as the existence of a local Lie group, that acts transitively on the manifold under consideration near a selected point. As acting groups, in affine homogeneity case only a subgroups of the group Aff $(3, \mathbb{C})$ are considered. The main instruments of the article are the affine canonical equations for the studied homogeneous surfaces and the Lie algebras of affine vector fields tangent to these manifolds.

The concept of affine homogeneity is closely related, in the case of real hypersurfaces, to holomorphic homogeneity, that is natural for multidimensional complex analysis. But even for the hypersurfaces of 3-dimensional complex spaces the classification problems in both cases (affine and holomorphic) do not arise until the complete solution. One of the things that could help to obtain such a solution is to understand the situation with possible dimensions of a Lie groups (and Lie algebras) which acts transitively on the homogeneous manifolds under consideration. In this paper the dependence is studied of such dimension from a couple of the Taylor coefficients of the 2-nd order (specifying the type of surface) of the canonical equation of strictly pseudo convex (SPC) hypersurface.

In this article we obtain (in Theorem 1) a general estimate for the dimension of such groups for an arbitrary strictly pseudo convex affinely homogeneous hypersurfaces in complex space $\mathbb{C}^3$. For one of the several types of homogeneous surfaces, this estimate is sharp: the affine transformation group with the maximal possible dimension 10 acts transitively on the quadric $Im\, w = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

For affinely homogeneous surfaces, that are not equivalent to this quadric, the dimension of such affine group does not exceed 7. The proof of this statement is given in the article (in Theorem 2) for the surfaces of the type (1/2, 0). To prove this assertion we use the coefficients structure of affine vector fields tangent to homogeneous surfaces. The description of this structure is also obtained in the paper.

In Theorem 3, the describing problem for the affine homogeneous surfaces of the type (1/2,0) with «rich» symmetry groups in space $\mathbb{C}^3$ is reduced to the study of only 5-dimensional Lie groups and algebras. Note that in the general context of the homogeneity problem such a reduction is not possible; here the specificity of the studied type of the surfaces plays the crucial role.

Note that a complete description of affinely homogeneous hypersurfaces of the type (1/2, 0) in the space $\mathbb{C}^3$ with 5-dimensional algebras of tangent vector fields is presented in a joint paper of the author (ArXiv.org, 2014). Because of the sufficiently large dimensions the scheme of the homogeneous varieties description, as well as this article considerations, imply significant use of computer symbolic calculations.

Key words: affine transformation, homogeneous manifold, vector field, Lie algebra, canonical equation of surface.