УДК 517.95
ББК 22.161.6

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ [1]

Мазепа Елена Алексеевна
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций, Волгоградский государственный университет
lmazepa@rambler.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе изучаются вопросы разрешимости некоторых краевых и внешних краевых задач для полулинейных уравнений эллиптического типа на произвольных некомпактных римановых многообразиях. Методика исследования существенным образом опирается на подход, основанный на введении классов эквивалентных на римановом многообразии функций. Получены условия однозначной разрешимости краевых и внешних краевых задач для рассматриваемых уравнений в классе произвольных непрерывных асимптотически неотрицательных функций, в том числе и неограниченных.

Ключевые слова: полулинейные эллиптические уравнения, краевая задача, неотрицательные решения, некомпактные римановы многообразия, задача Дирихле.

Введение

Проблема разрешимости различных краевых задач (в том числе задачи Дирихле) для эллиптических дифференциальных уравнений на римановых многообразиях с предписанными граничными данными на «бесконечности» является, с одной стороны, достаточно интересной в анализе и геометрии, а с другой стороны, достаточно новым направлением в современной математике. Истоки указанной проблематики восходят к классификационной теории двумерных некомпактных римановых поверхностей, основанной на изучении некоторых функциональных классов на поверхностях и развитой в работах А. Альфорса, А. Бейрлинга, Л. Сарио и других математиков. Общее представление об истории развития и современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из работ [13; 14; 16].

Первоначально большое внимание уделялось изучению гармонических функций на многообразиях, то есть решениям уравнения

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

Считающаяся ныне классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция является тождественной постоянной. С другой стороны, класс многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции, достаточно обширен. Более того, обнаружены множества некомпактных римановых многообразий, на которых разрешима задача Дирихле о восстановлении гармонической функции по непрерывным граничным данным для случая идеальной границы. Вообще, проблема разрешимости задачи Дирихле о восстановлении решения уравнения по граничным данным на «бесконечности» является в некотором смысле двойственной по отношению к справедливости теорем типа Лиувилля. С этой точки зрения наибольший интерес представляют некомпактные римановы многообразия. Заметим, что сама постановка задачи Дирихле на таких многообразиях может оказаться проблематичной. В некоторых случаях геометрическая компактификация многообразия позволяет сделать это аналогично постановке классической задачи Дирихле в ограниченных областях $\mathbb{R}^n$ (см., например, [6; 7; 12]). С другой стороны, в работе [8] предложен достаточно новый подход к постановке краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях.

Рядом авторов решались аналогичные задачи для уравнений более общих, чем уравнение Лапласа — Бельтрами. Например, рассматривались различные множества решений стационарного уравнения Шредингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \tag{2}$$

где $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция, и, в частности,

$$\Delta u - u = 0. \tag{3}$$

Известно, что существование ненулевого ограниченного решения уравнения (3) эквивалентно стохастической неполноте рассматриваемого многообразия. Многообразие называют стохастически полным, если минимальный винеровский процесс на нем имеет бесконечное время жизни (более подробно о таких многообразиях см.: [14]).

В последние годы достаточно активно изучаются решения квазилинейных уравнений вида

$$Lu = g(x,u), \tag{4}$$

где L — линейный эллиптический оператор второго порядка, с различными структурными требованиями на правую часть $g(x,\xi)$ (см., например, [2; 3; 9; 10]).

Одним из частных случаев уравнения (4) является полулинейное уравнение вида

$$\Delta u = \phi(|u|)u, \tag{5}$$

где $\phi(\xi)$ — неотрицательная, монотонно неубывающая непрерывно дифференцируемая функция при $\xi \geq 0$. Поведение ограниченных решений этого уравнения, вопросы разрешимости краевых и внешних краевых задач, выполнения лиувиллева свойства, а также их устойчивость при вариациях правой части достаточно подробно изучены в работах [9] и [10].

В данной работе исследуется асимптотическое поведение неограниченных решений уравнения (5). Аналогичные задачи для неограниченных решений линейных уравнений Лапласа — Бельтрами и уравнения Шредингера достаточно подробно изучены в работах [15] и [4].

Всюду далее будем полагать M — произвольное полное гладкое связное некомпактное риманово многообразие, $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Доказательство основных результатов опирается на принцип максимума, теоремы сравнения и единственности для решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений на предкомпактных подмножествах многообразия M. Их справедливость доказывается также как и для ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [1, с. 39–40]). Кроме того, в работе применяются аналогичные утверждения для решений полулинейных эллиптических дифференциальных уравнений. Их подробные доказательства можно найти в [11].

1. Краевые и внешние краевые задачи для полулинейного уравнения

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — произвольные непрерывные на M функции.

Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M и обозначать $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено

$$\lim_{k\to\infty} ||f_1(x) - f_2(x)||_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $||f(x)||_{C^0(G)} = \sup_G |f(x)|$.

Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$. Ясно, что введенное отношение не зависит от выбора исчерпания многообразия M и характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$.

Обозначим через v_k — решение уравнения (2) в $B_k \setminus B$, удовлетворяющее условиям

$$v_k|_{\partial B} = 1, \quad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Используя принцип максимума, легко проверить, что последовательность v_k равномерно ограничена на $M \setminus B$, и, следовательно, компактна в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на любом компактном подмножестве $G \subset (M \setminus B)$. Более того, при $k \to \infty$ она монотонно возрастает и сходится на $M \setminus B$ к решению уравнения (2)

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k, \quad 0 < v \leq 1, \quad v|_{\partial B} = 1.$$

Заметим также, что функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$. Функцию v называют *L-потенциалом компакта B относительно многообразия M* (см., например, [4; 8]). Для уравнения Лапласа — Бельтрами функция v есть не что иное, как емкостный потенциал компакта B относительно многообразия M (см.: [14]).

Многообразие M будем называть *L-строгим* многообразием, если для некоторого компакта $G \subset M$ существует L-потенциал v такой, что $v \in [0]$ (если $L = \Delta$, то многообразие будем называть *Δ-строгим*).

Заметим, что из Δ-строгости многообразия M следует его L-строгость (обратное не верно). Кроме того, понятие L-строгости не зависит от выбора компакта.

Будем называть функцию f *асимптотически неотрицательной*, если на M существует непрерывная функция $w \geq 0$ такая, что $w \sim f$.

Будем говорить, что на M *разрешима краевая задача для уравнения* (5) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (5) такое, что $u \in [f]$.

Пусть $\Phi(x)$ — произвольная непрерывная на ∂B функция.

Будем говорить, что для непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (5) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на $M \setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (5) такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Аналогичным образом можно осуществить постановку краевых задач на произвольных некомпактных римановых многообразиях для уравнений (1), (2) и ряда других эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка (см.: [8–11; 15]). Более того, в [15] доказано, что на L-строгом римановом многообразии M из разрешимости внешней краевой задачи для уравнения (2) с граничными условиями из класса $[f]$ следует разрешимость краевой задачи для уравнения (2) с граничными условиями из того же класса, и наоборот. Аналогичное утверждение имеет место и для решений уравнения Лапласа — Бельтрами на Δ-строгом многообразии M (см.: [15]).

Замечание. Если многообразие M имеет компактный край или существует естественная геометрическая компактификация многообразия M (например, на многообразиях отрицательной секционной кривизны, на сферически-симметричных, квазимодельных многообразиях), добавляющая границу на бесконечности, данный подход естественным образом приводит к классической постановке задачи Дирихле (см., например, [6; 7; 12]).

Пусть функция $\phi(\xi)$ — ограничена при $\xi \geq 0$, то есть существует такая константа $\lambda > 0$, что $0 \leq \phi(\xi) \leq \lambda$ при $\xi \geq 0$. Положим в уравнении (2) $c(x) \equiv \lambda$. В качестве краевых условий будем рассматривать класс $[f]$ — асимптотически неотрицательных на M функций. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть многообразие M является Δ-строгим многообразием и на $M \setminus B$ для любых постоянных неотрицательных на ∂B функций разрешимы внешние краевые задачи для уравнений* (1) *и* (2) *с граничными условиями из класса* $[f]$. *Тогда*

1) на $M \setminus B$ для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x) \geq 0$ для уравнения (5) *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$;

2) на M для уравнения (5) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — произвольная непрерывная неотрицательная на ∂B функция. Обозначим $C_1 = \sup\limits_{\partial B} \Phi(x) \geq 0$. По условию существует функция u_0 — ограниченное решение внешней краевой задачи для уравнения (1) на $M \setminus B$ такая, что $u_0 \in [f]$ и $u_0|_{\partial B} = C_1|_{\partial B}$. Причем $0 \leq u_0$ на $M \setminus B$.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\Delta u_k = u_k \phi(|u_k|) \quad \text{в} \quad B_k \setminus B, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k} \qquad u_k\,|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}\,.$$

Учитывая принцип сравнения (см. Приложение), для всех k имеем

$$0 \leq u_k \leq u_0 \quad \text{в} \quad B_k \setminus B.$$

Более того, последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ является монотонно убывающей.

Действительно, рассмотрим функции u_k и u_{k+1}, которые на множестве $B_k \setminus B$ являются решениями уравнения (5) и удовлетворяют следующим неравенствам:

$$0 \le u_{k+1} \le u_0, \qquad u_k \mid_{\partial B} = u_{k+1} \mid_{\partial B} \Phi|_{\partial B}\,, \qquad u_k \mid_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k} \ge u_{k+1} \mid_{\partial B_k}.$$

Используя принцип сравнения в $B_k \setminus B$ для всех k, получаем $u_0 \ge u_k \ge u_{k+1}$.

Покажем теперь равномерную ограниченность последовательности функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M \setminus B$.

Так как $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, то существует номер k_0 такой, что для всех $k \ge k_0$ выполнено $\Omega \subset\subset B_k \setminus B$. Тогда, учитывая монотонное убывание последовательности функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ и принцип максимума для гармонических функций, для всех $k \ge k_0$ во множестве Ω получаем

$$0 \le u_k \le \sup_{\Omega} u_0 \le \sup_{B_{k_0} \setminus B} u_0 = \max\{\sup_{\partial B_{k_0}} u_0, \sup_{\partial B} u_0\} = K,$$

то есть выполнено условие равномерной ограниченности последовательности функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M \setminus B$.

Далее, используя внутренние оценки градиентов в комбинации с внутренними оценками в пространстве Гёльдера $C^{\gamma}(\Omega)$ производных для произвольного компактного подмножества $\Omega \subset M \setminus B$ (см., например, [1, с. 294, 346]), получаем, что семейство функций $g_k(x) = u_k \phi(|u_k(x)|)$ имеет равномерно ограниченные нормы в $C^{\gamma}(\Omega)$. Тогда с учетом внутренних оценок Шаудера ([1, стр. 91, 94–95]) получаем компактность семейства $\{u_k\}$ в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M \setminus B$. Последнее влечет за собой существование предельной функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является решением уравнения (5) на Ω таким, что $0 \le u \le u_0$.

Далее будем в качестве множества Ω брать последовательно множества $B_k \setminus B$ для $k = 1, 2, \ldots$ Тогда на множестве $B_1 \setminus B$ существует предельная функция

$$u^1 = \lim_{k\to\infty} u_{1,k} \ \ -$$

решение уравнения (5) такое, что $u^1 \mid_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$. На множестве $B_2 \setminus B$ существует предельная функция

$$u^2 = \lim_{k\to\infty} u_{2,k} \ \ -$$

решение уравнения (5) такое, что $u^2 \mid_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$ и т. д. На множестве $B_n \setminus B$ существует предельная функция

$$u^n = \lim_{k\to\infty} u_{n,k} \ \ -$$

решение уравнения (5) такое, что $u^n \mid_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$. Кроме того, для всех n выполнено $0 \le u^n \le u_0$. Также легко показать, что функция u^2 является продолжением функции u^1, то есть $u^2 \mid_{B_1 \setminus B} = u^1$, функция u^3 является продолжением функции u^2, то есть $u^3 \mid_{B_2 \setminus B} = u^2$ и т. д. Рассмотрим функцию

$$u = \begin{cases} u^1 & \text{на} \quad B_1 \setminus B, \\ u^2 & \text{на} \quad B_2 \setminus B, \\ \ldots \\ u^n & \text{на} \quad B_n \setminus B, \\ \ldots \end{cases}$$

Она будет являться решением уравнения (5) на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M \setminus B$. Причем $0 \le u \le u_0$ и $u\,|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Покажем, что $u \sim f$.

Согласно условию на $M \setminus B$ существует решение v_0 уравнения (2) с $c(x) \equiv \lambda$ такое, что $v_0|_{\partial B} = 0$ и $v_0 \in [f]$. Используя принцип сравнения 2 (см. Приложение) на $M \setminus B$, получаем $u_0 \ge v_0 \ge 0$.

Более того, для каждого k имеют место следующие неравенства:

$$\Delta u_k = u_k \phi(|u_k|) \le \lambda u_k \quad \text{в} \quad B_k \setminus B,$$

$$v_0|_{\partial B} \le u_k\,|_{\partial B}\,, \quad v_0|_{\partial B_k} \le u_k\,|_{\partial B_k}\,.$$

Тогда по принципу сравнения 1 в $B_k \setminus B$ имеем $u_k \ge v_0$, и, следовательно, $u_0 \ge u_k \ge$ $\ge v_0 \ge 0$. Аналогичное неравенство имеет место и для элементов подпоследовательности $u_0 \ge u_{n,k} \ge v_0 \ge 0$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ для каждого n на $B_n \setminus B$, получаем $u_0 \ge u^n \ge v_0$. Учитывая вид функции u и условие $u_0 \sim v_0 \sim f$, окончательно имеем $u \sim f$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения заметим сначала, что из Δ-строгости многообразия M следует его L-строгость. Далее в работе [15] показано, что на таких многообразиях для уравнений (1) и (2) из разрешимости на $M \setminus B$ внешних краевых задач с граничными условиями из класса $[f]$ следует разрешимость краевых задач на всем многообразии M с граничными условиями из того же класса $[f]$. Пусть теперь u_0 — решение уравнения (1) такое, что $u_0 \in [f]$. Ясно, что $0 \le u_0$ на M.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\Delta u_k = u_k \phi(|u_k|) \quad \text{в} \quad B_k, \qquad u_k\,|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}\,.$$

Как и выше доказывается, что данная функциональная последовательность монотонно не убывает, равномерно ограничена на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M$, компактна в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ и, следовательно, имеет предельную функцию $u = \lim\limits_{k \to \infty} u_k$, которая является решением уравнения (5) на Ω таким, что $0 \le u \le u_0$. Далее, как и при доказательстве первого утверждения, строится решение уравнения (5) на всем многообразии M и исследуется его асимптотическое поведение на «бесконечности».

2. Приложение

Пусть функция $g(x, \xi)$ в уравнении (4) удовлетворяет структурным требованиям

1) $g(x, \xi) \in C^{\gamma}(\Omega \times \mathbb{R})$ для любого подмножества $\Omega \subset\subset M$, $0 < \gamma < 1$;
2) $g(x, 0) \equiv 0$;
3) $g(x, \xi_1) \ge g(x, \xi_2)$ для всех $\xi_1 > \xi_2$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. (Принцип сравнения 1). *Пусть $\Omega \subset M$ — предкомпактное подмножество и $u,\ v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ удовлетворяют в Ω неравенствам*

$$Lu \ge g(x, u), \qquad Lv \le g(x, v)$$

и $u|_{\partial\Omega} \le v|_{\partial\Omega}$. Тогда $u \le v$ в Ω.

Предложение 2. (Принцип максимума). *Пусть* $\Omega \subset M$ *— предкомпактное подмножество и* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *удовлетворяет в* Ω *неравенству* $Lu \geq g(x,u)$ ($Lu \leq$ $\leq g(x,u)$). *Тогда*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

Если же $Lu = g(x,u)$ *в* Ω, *то*

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Предложение 3. (Принцип сравнения 2). *Пусть* $Lv \leq g(x,v)$, $Lu \geq g(x,u)$ *на* $M \setminus B$, $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $v \sim u$. *Тогда* $v \geq u$ *на* $M \setminus B$.

Пусть $Lv \leq g(x,v)$, $Lu \geq g(x,u)$ *на* M *и* $v \sim u$. *Тогда* $v \geq u$ *на* M.

Из принципа сравнения непосредственно следует теорема единственности решений краевых и внешних краевых задач для уравнения (5).

Предложение 4. (Теорема единственности). *Пусть* $Lv = g(x,v)$ *и* $Lu = g(x,u)$ *на* $M \setminus B$ *и* $v|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $v \sim u$. *Тогда* $w = u$ *на* $M \setminus B$.

Пусть $Lv = g(x,v)$, $Lu = g(x,u)$ *на* M *и* $v \sim u$. *Тогда* $v = u$ *на* M.

Подробные доказательства этих утверждений можно найти в [11].

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 13-07-97029-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, 2007. — 464 с.

2. Кондратьев, В. А. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка / В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис // Мат. сб. — 1988. — Т. 135 (177). — № 3. — С. 346–360.

3. Коньков, А. А. Поведение решений квазилинейных эллиптических неравенств / А. А. Коньков // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — № 7. — С. 3–158.

4. Корольков, С. А. Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 1 (14). — С. 23–40.

5. Лосев, А. Г. О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Сиб. мат. журн. — 1998. — Т. 39. — № 1. — С. 87–93.

6. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 6 (445). — С. 41–49.

7. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13. — № 1. — С. 84–110.

8. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43. — № 3. — С. 591–599.

9. Мазепа, Е. А. Краевые задачи и лиувиллевы теоремы для полулинейных эллиптических уравнений на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. —

2005. — Т. 514. — № 3 (514). — С. 59–66.

10. Мазепа, Е. А. О существовании целых решений одного полулинейного эллиптического уравнения на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81. — № 1. — С. 153–156.

11. Мазепа, Е. А. Об асимптотическом поведении решений некоторых полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 1 (14). — С. 41–59.

12. Anderson, M. T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature / M. T. Anderson // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18. — № 4. — P. 701–721.

13. Gidas, B. Global and local behavior of positive solutions of non-linear elliptic equations / B. Gidas, J. Spruck // Comm. pure Appl. Math. — 1981. — Vol. 34. — P. 525–598.

14. Grigor'yan, A. Analitic and geometric background of recurence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36. — P. 135–249.

15. Losev, A. G. Unbounded solutions of the stationary Schrodinger equation on Riemannian manifolds / A. G. Losev, E. A. Mazepa, V. Y. Chebanenko // CMFT. — 2003. — Vol. 3. — № 2. — P. 443–451.

16. Serrin, J. Cauchy — Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities / J. Serrin, H. Zou // Acta Math. — 2002. — Vol. 189. — № 1. — P. 79–142.

REFERENCES

1. Gilbarg D., Trudinger M. *Ellipticheskie differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic partial differential equations of second order]. Moscow, Nauka Publ., 2007. 464 p.

2. Kondratev V.A., Landis E.M. O kachestvennykh svoystvakh resheniy odnogo nelineynogo uravneniya vtorogo poryadka [On qualitative properties of solutions of a nonlinear second-order equatio]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics]. 1988, vol. 135 (177), no. 3, pp. 346–360.

3. Konkov A.A. Povedenie resheniy kvazilineynykh ellipticheskikh neravenstv [Behavior of solutions of quasilinear elliptic inequalities]. *Sovremennaya matematika. Fundamentalnye napravleniya*. 2004, no. 7, pp. 3–158.

4. Korolkov S.A., Losev A.G. Resheniya ellipticheskikh uravneniy na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Solutions for elliptic equations on Riemannian manifolds with ends]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics]. 2011, no. 1 (14), pp. 23–40.

5. Losev A.G. O nekotorykh liuvillevykh teoremakh na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Some Liouville theorems on noncompact Riemannian manifolds]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal]. 1998, vol. 39, no. 1, pp. 87–93.

6. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the asymptotic behavior of solutions of certain equations elliptic type on noncompact Riemannian manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Soviet Mathematics]. 1999, no. 6 (445), pp. 41–49.

7. Losev A.G., Mazepa E.A. Ogranichennye resheniya uravneniya Shredingera na rimanovykh proizvedeniyakh [Bounded solutions of the Schrödinger equation on Riemannian products]. *Algebra i analiz* [St. Petersburg Mathematical Journal]. 2001, vol. 13, no. 1, pp. 84–110.

8. Mazepa E.A. Kraevye zadachi dlya statsionarnogo uravneniya Shredingera na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary value problems for the stationary equation Schrödinger on Riemannian manifolds]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal]. 2002, vol. 43, no. 3, pp. 591–599.

9. Mazepa E.A. Kraevye zadachi i liuvillevy teoremy dlya polulineynykh ellipticheskikh uravneniy na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary Value Problems and Liouville theorems for semilinear elliptic equations on Riemannian manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Soviet Mathematics]. 2005, vol. 514, no. 3 (514), pp. 59–66.

10. Mazepa E.A. O sushchestvovanii tselykh resheniy odnogo polulineynogo ellipticheskogo uravneniya na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the existence of entire solutions of a semilinear elliptic equation on noncompact Riemannian manifolds]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes]. 2007, vol. 81, no. 1, pp. 153–156.

11. Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh polulineynykh ellipticheskikh uravneniy na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the asymptotic behavior of solutions of some semilinear elliptic equations on noncompact Riemannian manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics]. 2011, no. 1 (14), pp. 41–59.

12. Anderson M.T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature. *J. Diff. Geom.* 1983, vol. 18, no. 4, pp. 701–721.

13. Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of non-linear elliptic equations. *Comm. pure Appl. Math.* 1981, vol. 34, pp. 525–598.

14. Grigor'yan A. Analitic and geometric background of recurence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1999, vol. 36, pp. 135–249.

15. Losev A.G., Mazepa E.A., Chebanenko V.Y. Unbounded solutions of the stationary Schrodinger equation on Riemannian manifolds. *CMFT.* 2003, vol. 3, no. 2, pp. 443–451.

16. Serrin J., Zou H. Cauchy — Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities. *Acta Math.* 2002, vol. 189, no. 1, pp. 79–142.

ON THE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS ON NONCOMPACT RIEMANNIAN MANIFOLD

Mazepa Elena Alekseevna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
lmazepa@rambler.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper we study the solvability of certain boundary and external boundary value problems for semilinear elliptic equations (5)

$$\Delta u = \phi(|u|)u,$$

where $\phi(\xi)$ — nonnegative, nondecreasing continuously differentiable function for $\xi \geq 0$ on arbitrary non-compact Riemannian manifolds.

In this article we compare the behavior of nonbounded functions "at infinity". In our research we use a new approach wich is based on the consideration of equivalence classes of functions on M (this approach for bounded solutions has been realized in [8]).

Let M be an arbitrary smooth connected noncompact Riemannian manifold without boundary and let $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an exhaustion of M, i.e., a sequence of precompact open subsets of M such that $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$ and $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Throughout the sequel, we assume that boundaries ∂B_k are C^1-smooth submanifolds.

Let f_1 and f_2 be arbitrary continuous functions on M. Say that f_1 and f_2 are *equivalent on* M and write $f_1 \sim f_2$ if for some exhaustion $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ of M we have

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{M\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0.$$

It is easy to verify that the relation " $\sim$ " is an equivalence which does not depend on the choice of the exhaustion of the manifold and so partitions the set of all continuous functions on M into equivalence classes. Denote the equivalence class of a function f by $[f]$.

Let $B \subset M$ be an arbitrary connected compact subset and the boundary of B is a C^1-smooth submanifold. Assume that the interior of B is non-empty and $B \subset B_k$ for all k.

Observe that if the manifold M has compact boundary or there is a natural geometric compactification of M (for example, on manifolds of negative sectional curvature or spherically symmetric manifolds) which adds the boundary at infinity, then this approach leads naturally to the classical statement of the Dirichlet problem.

Denote by v_k the solution of equation (5) in $B_k \setminus B$ which satisfies to conditions

$$v_k|_{\partial B} = 1, \qquad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Using the maximum principle, we can easily verify that the sequence v_k is uniformly bounded on $M \setminus B$ and so is compact in the class of twice continuously differentiable functions over every compact subset $G \subset M \setminus B$. Moreover, as $k \to \infty$ this sequence increases monotonically and converges on $M \setminus B$ to a solution of equation (5)

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k, \qquad 0 < v \le 1, \qquad v|_{\partial B} = 1.$$

Also, note that the function v is independent of the choice of exhaustion $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$.

We call v the *L-potential of the compact set B relative to M*. For the Laplace-Beltrami equation, the function v is nothing but the capacity potential of the compact set B relative to the manifold M (see [14]).

Call the manifold M *L-strict* if for some compact set $B \subset M$ there is an L-potential v of B such that $v \in [0]$ (see [8]).

A function f is called asymptotically nonnegative whenever there exists a continuous function $w \ge 0$ on M with $w \sim f$.

Say that a boundary value problem for (5) is solvable on M with boundary conditions of class $[f]$ whenever there exists a solution $u(x)$ to (5) on M with $u \in [f]$.

Say that for a continuous function $\Phi(x)$ on ∂B the exterior boundary value problem for (5) is solvable on $M \setminus B$ with boundary conditions of class $[f]$ whenever on $M \setminus B$ there exists a solution $u(x)$ to (5) with $u \in [f]$ and $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Similarly we can state boundary value problems on arbitrary noncompact Riemannian manifolds for (1), (2), as well as a series of other second order elliptic differential equations (see [8; 15]).

Let the function $\phi(\xi)$ is bounded for $\xi \geq 0$, i.e. there is a constant $\lambda > 0$ such that $0 \leq \phi(\xi) \leq \lambda$ with $\xi \geq 0$. We put in the equation (2) $c(x) \equiv \lambda$. Also let f is an asymptotically nonnegative function on M.

We now formulate the main result.

Theorem 1. *Let M be an Δ-strict manifold. Suppose that for every positive constant the exterior boundary value problems for the equations (1) and (2) are solvable on $M \setminus B$ with boundary conditions of class $[f]$. Then:*

1. *for every continuous function $\Phi(x) \geq 0$ on ∂B the exterior boundary value problem for (5) is solvable on $M \setminus B$ with boundary conditions of class $[f]$;*
2. *the boundary value problem for (5) is solvable on M with boundary conditions of class $[f]$.*

Key words: semilinear elliptic equation, boundary value problem, nonnegative solution, noncompact Riemannian manifolds, the Dirichlet problem.