



DOI: <http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.2.2>

УДК 517.957+514.752

ББК 32.973.26-018.2

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА NUMPY<sup>1</sup>

**Клячин Владимир Александрович**

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерных наук  
и экспериментальной математики,  
Волгоградский государственный университет  
klchnv@mail.ru, kiem@volsu.ru  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Григорьева Елена Геннадиевна**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук  
и экспериментальной математики,  
Волгоградский государственный университет  
e\_grigoreva@mail.ru, kiem@volsu.ru  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** В статье рассматривается задача численного исследования устойчивости равновесных поверхностей. Такого рода поверхности являются решением вариационной задачи на минимум площади при наличии ограничений интегрального вида. В статье представлено программное решение в виде пакета на языке Python, который реализован на базе пакета NumPy для управления многомерными данными.

**Ключевые слова:** экстремальная поверхность, кусочно-линейная аппроксимация, триангуляция, основная частота, пакет NumPy.

### 1. Равновесные поверхности и их устойчивость

Пусть  $\mathbb{R}^{n+1}$  —  $(n + 1)$ -мерное евклидово пространство, в котором введен ортонормированный базис  $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ . Через  $\langle, \rangle$  мы обозначаем скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  — соответствующие выбранному базису декартовы координаты.

Согласованную со скалярным произведением связность в  $\mathbb{R}^{n+1}$  мы будем обозначать через  $\bar{\nabla}$ .

Пусть  $M$  —  $n$ -мерное, некомпактное, связное, ориентируемое  $C^2$ -многообразие с кусочно-гладким краем  $\partial M$  (случай  $\partial M = \emptyset$  не исключается). Будем рассматривать поверхности  $\mathcal{M} = (M, u)$ , заданные  $C^2$ -погружением  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ .

Связность  $\bar{\nabla}$  индуцирует соответствующую связность  $\nabla$  на поверхности  $\mathcal{M}$ . Для произвольных  $C^1$ -гладких векторных полей  $X, Y$  на  $\mathcal{M}$  и функции  $h \in C^1(\mathcal{M} = (M, u))$  связность  $\nabla$  определяется следующим образом. Рассматриваются произвольные  $C^1$  продолжения векторных полей  $X, Y$  и функции  $h$  в некоторую окрестность поверхности  $\mathcal{M}$ . Тогда

$$\nabla h = (\bar{\nabla} h)^T, \quad \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T,$$

где  $(v)^T$  — ортогональная проекция вектора  $v$  на касательную плоскость  $T_{u(m)}\mathcal{M}$  к поверхности  $\mathcal{M}$ .

Пусть  $m \in M$  и пусть в некоторой окрестности точки  $u(m)$  определены гладкие векторные поля  $X$  и  $Y$ . Билинейная форма

$$B(X(m), Y(m)) = (\bar{\nabla}_X Y)(u(m)) - (\bar{\nabla}_X Y)^T(u(m))$$

называется *второй фундаментальной формой* поверхности  $\mathcal{M}$  [10, т. 2, § 3]. Если  $\{E_i\}_{i=1}^n$  — ортонормированный базис в касательном пространстве к поверхности  $\mathcal{M}$  в точке  $u(m)$ , то вектор

$$\vec{H}(m) = \frac{1}{n} \operatorname{trace} B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B(E_i, E_i)$$

называется *вектором средней кривизны* поверхности  $\mathcal{M}$  в точке  $u(m)$ .

Пусть  $N_{u(m)}\mathcal{M}$  — нормальное пространство к поверхности  $\mathcal{M}$  в точке  $u(m)$ . Для произвольного вектора  $v \in N_{u(m)}\mathcal{M}$  пусть  $A^v$  означает гомоморфизм Вейнгартена [10, гл. VII, § 3], определяемый как линейное преобразование  $A^v : T_{u(m)}\mathcal{M} \rightarrow T_{u(m)}\mathcal{M}$ , двойственное к билинейной форме  $B$ :

$$\langle A^v(X), Y \rangle = \langle B(X, Y), v \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X v, Y \rangle. \quad (1)$$

Положим

$$\|A^v\|^2 = \sum_{i=1}^n |A^v(E_i)|^2,$$

где  $\{E_i\}_{i=1}^n$  — ортонормированный базис в  $T_{u(m)}\mathcal{M}$ .

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  — некоторая область и  $\Omega_1 \subset \Omega$  — ее подобласть, такая, что  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega = \mathcal{M}$ . Предположим, что в  $\mathbb{R}^{n+1}$  определены неотрицательные  $C^2$ -функции  $\alpha(x)$  и  $\varphi(x)$ .

Будем рассматривать функционалы, выражаемые интегралами

$$A(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \alpha(x) d\mathcal{M}, \quad G(\mathcal{M}) = \int_{\Omega_1} \varphi(x) dx,$$

$$W(\mathcal{M}) = A(\mathcal{M}) + G(\mathcal{M}). \quad (2)$$

Заметим, что функции  $\alpha(x)$  и  $\varphi(x)$  с физической точки зрения являются поверхностной и объемной плотностями сил, действующих на элемент жидкости, занимающей объем области  $\Omega_1$ .

Пусть  $v$  — сечение нормального расслоения поверхности  $\mathcal{M}$ . Продолжим поле  $v$  до векторного поля  $V$  на некоторую окрестность поверхности  $\mathcal{M}$ , интегральными кривыми которого служат прямые линии. Обозначим через  $F_t : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  однопараметрическую группу локальных диффеоморфизмов поля  $V$ , а через  $\mathcal{M}_t = F_t(\mathcal{M})$  — соответствующую ей вариацию поверхности  $\mathcal{M}$ , а через  $\Omega_1(t) = F_t(\Omega_1)$  — соответствующую вариацию области  $\Omega_1$ . Рассмотрим функции  $A(t) = A(\mathcal{M}_t)$ ,  $G(t) = G(\mathcal{M}_t)$ . Поверхность назовем экстремальной для функционала  $W(\mathcal{M})$ , если производная  $W'(0) = 0$ , для всякого нормального сечения  $v$  с компактным носителем на поверхности  $\mathcal{M}$ . Здесь  $W(t) = A(t) + G(t)$ . Кроме этого, если для всех вариаций, порождаемых сечениями  $V$  нормального расслоения экстремальной поверхности  $\mathcal{M}$ , выполнено  $W''(0) > 0$ , тогда поверхность будем называть *устойчивой*.

Отметим монографию Р. Финна [13], посвященную исследованию равновесных капиллярных поверхностей, которые в наших терминах моделируются случаем  $\varphi(x) = \text{const} \cdot x_3, n = 2$ . Устойчивость капиллярных поверхностей вращения в  $\mathbb{R}^3$  исследована в работе Х. Уента [14]. Для понимания физического явления неустойчивости можно обратиться также к книге [12], в которой приведены эксперименты и построены соответствующие математические модели различных типов неустойчивостей несжимаемых жидкостей в поле тяготения, заряженных жидкостей в электрическом поле и магнитных жидкостей в магнитных полях.

В [6] было доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Выполнены следующие равенства.*

$$\begin{aligned} \left. \frac{dW(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \int_{\mathcal{M}} \langle \bar{\nabla} \alpha, v \rangle - \alpha n \langle v, \vec{H} \rangle + \varphi \langle v, \xi \rangle d\mathcal{M}, \\ \left. \frac{d^2W(t)}{dt^2} \right|_{t=0} &= \int_{\mathcal{M}} \{ (\alpha (|\nabla v|^2 + (n^2 H^2 - \|A\|^2)) + (\langle \bar{\nabla} \varphi, \xi \rangle - n H \varphi)) \langle v, \xi \rangle^2 - \\ &\quad - 2 \langle \bar{\nabla} \alpha, v \rangle n H \langle v, \xi \rangle + \text{Hess } \alpha(v, v) \} d\mathcal{M}, \end{aligned}$$

где  $v$  — варьирующее нормальное векторное поле,  $\xi$  — внешняя по отношению к области  $\Omega$  единичная нормаль к поверхности  $\mathcal{M}$ ,  $H = \langle \vec{H}, \xi \rangle$  — средняя кривизна,  $\|A\|$  — длина второй квадратичной формы поверхности  $\mathcal{M}$ ,  $\text{Hess } \alpha(\cdot, \cdot)$  — гессиан функции  $\alpha$ .

**Пример.** Пусть объем  $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$  занимает жидкость, а  $\mathcal{M}$  — свободная поверхность этой жидкости (то есть поверхность жидкости, не соприкасающаяся с твердым телом). Предположим, что жидкость находится в равновесии в гравитационном поле с потенциалом, равным  $\varphi(x)$ . Если  $\alpha = \text{const}$  — коэффициент поверхностного натяжения, то полная энергия данной механической системы равна

$$W_0(\mathcal{M}) = \alpha |\mathcal{M}| + \int_{\Omega_1} \varphi(x) dx,$$

где  $|\mathcal{M}|$  — площадь поверхности. Хорошо известно, что механическая система находится в равновесии, если вариация ее потенциальной энергии равна нулю. Используя теорему 1, последнее условие можно записать в виде

$$\int_{\mathcal{M}} (\varphi - n \alpha H) h d\mathcal{M} = 0,$$

где  $h = \langle v, \xi \rangle$ . Если мы считаем, что жидкость несжимаема, то последнее соотношение должно быть выполнено не при всех вариациях поверхности  $\mathcal{M}$ , а только для тех, для которых вариация объема жидкости равна нулю. Как нетрудно видеть (опять же из теоремы 1), последнее имеет место при условии

$$\int_{\mathcal{M}} h d\mathcal{M} = 0,$$

если мы считаем, что жидкость однородна и ее плотность  $\rho = 1$ . Используя основную лемму вариационного исчисления и метод множителей Лагранжа при решении задач условного экстремума, приходим к равенству

$$\varphi - n\alpha H = \lambda \equiv \text{const},$$

или

$$n\alpha H = \varphi + \lambda.$$

Таким образом, экстремали функционала  $W_0$  в рассматриваемом примере имеют среднюю кривизну, определяемую с точностью до постоянной потенциалом  $\varphi(x)$ . Из теоремы 1 так же находим условие устойчивого равновесия

$$\int_{\mathcal{M}} \{ \alpha (|\nabla h|^2 + (n^2 H^2 - \|A\|^2) + (\langle \bar{\nabla} \varphi, \xi \rangle - nH\varphi - nH\lambda)h^2) \} d\mathcal{M} \geq 0.$$

Это неравенство должно быть выполнено для всех  $C^1$ -функций  $h(x) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что

$$h(x)|_{\partial\mathcal{M}} = 0, \quad \int_{\mathcal{M}} h(x) d\mathcal{M} = 0. \quad (3)$$

Используя равенство нулю первой вариации, это неравенство переписывается в виде

$$\int_{\mathcal{M}} \{ \alpha (|\nabla h|^2 + (\langle \bar{\nabla} \varphi, \xi \rangle - \|A\|^2)h^2) \} d\mathcal{M} \geq 0. \quad (4)$$

Подчеркнем, что условие (4) не зависит от постоянной  $\lambda$ .

**Определение.** Поверхность  $\mathcal{M}$  назовем экстремальной поверхностью для функционала  $W_0(\mathcal{M})$ , если для некоторой постоянной  $\lambda$  выполнено равенство

$$\varphi - n\alpha H = \lambda \equiv \text{const}.$$

При этом поверхность  $\mathcal{M}$  называется *устойчивой*, если неравенство (4) выполнено для любой  $C^1$ -гладкой функции  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  и такой, что выполнены равенства (3).

Всюду ниже в статье рассматривается случай функционала  $W_0(\mathcal{M})$ , когда  $\alpha \equiv 1$ .

Пусть  $\mathcal{M} = (M, u)$   $n$ -мерная поверхность в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Мы введем следующие величины

$$\mu_A(\mathcal{M}) = \inf \frac{\int_{\mathcal{M}} |\nabla h|^2 d\mathcal{M}}{\int_M \|A\|^2 h^2 dM}, \quad \mu(\mathcal{M}) = \inf \frac{\int_{\mathcal{M}} |\nabla h|^2 d\mathcal{M}}{\int_M h^2 dM},$$

где точная нижняя грань взята по всем липшицевым функциям  $h(m) : M \rightarrow \mathbb{R}$  таким, что  $h(m)|_{\partial M} = 0$ .

**Замечание.** Предположим, что  $\varphi(x) \equiv 1$ . Тогда экстремали функционала  $W_0(M)$  суть поверхности постоянной средней кривизны. В этом случае условие устойчивости запишется в виде

$$\int_M \{(|\nabla h|^2 - \|A\|^2 h^2)\} dM \geq 0. \quad (5)$$

Отсюда следует, что поверхность постоянной средней кривизны устойчива тогда и только тогда, когда  $\mu_A(M) \geq 1$ . Отметим, что для минимальных гиперповерхностей в работе [7] предложен емкостный подход к оценке величины  $\mu_A(M)$ .

В настоящей статье предлагается метод численного исследования устойчивости равновесных поверхностей в  $\mathbb{R}^3$ , основанный на использовании пакета NumPy в виде расширения языка программирования Python.

## 2. Кусочно-линейная аппроксимация задачи

Теоретическое обоснование кусочно-линейной аппроксимации исследовалось, в частности, в работах [5; 8; 9]. Кроме того, обоснование аппроксимации решений соответствующих вариационных задач дано в работах [3; 4]. Мы приведем основные формулы, позволяющие строить аппроксимацию поверхностей, минимизирующих поверхностный интеграл в следующей ситуации.

Пусть  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  — положительная однородная степени 1 выпуклая функция такая, что  $\Phi(\xi) = \Phi(-\xi)$ . Для гладкой поверхности  $M \subset \mathbb{R}^3$  рассмотрим величину

$$F(M) = \int_M \Phi(\xi) dS,$$

где  $\xi$  — вектор единичной нормали к поверхности  $M$ . Отметим работу [2], где предложен подход к оценке величин типа величины  $\mu(M)$  для функционалов введенного вида, основанный на положительных решениях нелинейных дифференциальных неравенств.

Поверхность  $M$  будем аппроксимировать поверхностью  $\tilde{M}$ , которая задается конечным множеством точек  $P = \{P_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, N\}$  и совокупностью треугольников  $T = \{T_j, j = 1, \dots, M\}$ . Каждый треугольник  $T_j$  однозначно определяется тремя целыми числами  $k_j, l_j, m_j \in \{1, \dots, N\}$ , такими, что точки  $P_{k_j}, P_{l_j}, P_{m_j}$  являются вершинами треугольника  $T_j$ .

Если  $M$  — кусочно-линейная аппроксимация поверхности  $M$ , то приближенное значение введенного функционала будет вычисляться согласно формуле

$$F(M) = \sum_{j=1}^M \Phi(\xi_j) |T_j|,$$

где  $M$  представляет собой объединение треугольников  $T_j$ ,  $\xi_j$  — нормаль к плоскости этих треугольников, а  $|T_j|$  — площади треугольников. Поверхность  $M$  можно рассматривать как точку в пространстве  $LM$  размерности  $3n$ , где  $n$  — число вершин на  $M$ . Если задать в каждой точке-вершине поверхности вектор  $h$ , то этим векторам будет

соответствовать вектор в  $LM$ . Тогда оказывается, если функционал  $F$  рассмотреть как числовую функцию  $F : LM \rightarrow \mathbb{R}$ , то имеет место формула

$$\frac{\partial F}{\partial h}(p_i) = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{j=1}^k \left( \nabla \Phi(\xi_j) |\xi_j| + \frac{\xi_j}{|\xi_j|} \Phi(\xi_j) \right) \times l_j, h \right\rangle,$$

где сумма идет по всем треугольникам, имеющим вершину  $p_i \in \mathcal{M}$ ,  $\xi_j$ , как и выше, обозначает нормаль к соответствующему треугольнику и  $l_j$  вектор, соединяющий вершины треугольника, не совпадающие с  $p_i$  таким образом, что эта вершина при обходе остается слева.

**Пример 1.** Рассмотрим случай

$$\Phi(\xi) = |\xi|.$$

Тогда, как нетрудно посчитать, получим

$$\frac{\partial F}{\partial h}(p_i) = \left\langle \sum_{j=1}^k \xi_j \times l_j, h \right\rangle.$$

Если предположить, что поверхность  $\mathcal{M}$  минимизирует функционал  $F(\mathcal{M})$ , то

$$\frac{\partial F}{\partial h}(p_i) = \left\langle \sum_{j=1}^k \xi_j \times l_j, h \right\rangle = 0$$

для любой вершины  $p_i \in \mathcal{M}$ .

Следовательно, условие минимума площади для кусочно-линейных поверхностей выражается равенством

$$\sum_{j=1}^k \xi_j \times l_j = 0.$$

Эти равенства можно рассматривать как систему уравнений в пространстве  $LM$ . Сложность этой системы заключается в том, что уравнения ее составляющие нелинейны относительно координат вершин  $p_i$ . В общем случае функционала  $F(\mathcal{M})$  соответствующая система приобретает вид

$$\sum_{j=1}^k \left( \nabla \Phi(\xi_j) |\xi_j| + \frac{\xi_j}{|\xi_j|} \Phi(\xi_j) \right) \times l_j = 0.$$

Решение построенной системы уравнений в рамках общей задачи решается нами итерационным методом.

Перейдем к кусочно-линейной аппроксимации задачи устойчивости. Каждая функция  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  аппроксимируется функцией  $\tilde{h} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ , которая однозначно определяется значениями  $h_i = \tilde{h}(P_i), i = 1, \dots, N$  и линейно продолжается внутрь каждого треугольника  $T_j, j = 1, \dots, M$ . Будем предполагать также, что задана некоторая положительная весовая функция  $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$\int_{\mathcal{M}} h^2 g \approx \int_{\mathcal{M}} \tilde{h}^2 \tilde{g} = \sum_{j=1}^M \int_{T_j} \tilde{h}^2 \tilde{g} =$$

$$= \sum_{j=1}^M \frac{\tilde{h}^2(P_{k_j})\tilde{g}(P_{k_j}) + \tilde{h}^2(P_{l_j})\tilde{g}(P_{l_j}) + \tilde{h}^2(P_{m_j})\tilde{g}(P_{m_j})}{3} \Delta(T_j) = \sum_{s,t=1}^N b_{st} \tilde{h}_s \tilde{h}_t = \langle B\bar{h}, \bar{h} \rangle,$$

где  $\Delta(T_j)$  — площадь треугольника  $T_j$ ,  $\bar{h} = (h_1, \dots, h_N)$ . Коэффициенты  $b_{st}$  образуют симметричную положительно определенную матрицу  $B$ . Аналогично

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla h|^2 \approx \int_{\tilde{M}} |\nabla \tilde{h}|^2 = \sum_{j=1}^M \int_{T_j} |\nabla \tilde{h}|^2 \Delta(T_j) = \sum_{s,t=1}^N a_{st} h_s h_t = \langle A\bar{h}, \bar{h} \rangle.$$

Здесь коэффициенты  $a_{st}$  образуют симметричную положительно определенную матрицу  $B$ . Если в качестве функции  $g$  взять величину квадрата нормы второй квадратичной формы  $\|A\|$ , то приближенное вычисление величины  $\mu_A(\mathcal{M})$  сводится к вычислению минимума

$$\tilde{\mu} = \min_{\bar{h}} \frac{\langle A\bar{h}, \bar{h} \rangle}{\langle B\bar{h}, \bar{h} \rangle}. \tag{6}$$

Поскольку матрицы  $A$  и  $B$  симметричны и положительно определены, то решение задачи (6) существует и единственно. Более того, минимум в (6) совпадает с минимальным собственным числом матрицы  $C = A \cdot B^{-1}$ .

### 3. Пакет NDimVar

Пакет NumPy представляет собой расширение языка программирования Python, реализующее множество различных операций при работе с многомерными массивами данных. Несмотря на то что этот пакет предназначен для использования его в контексте интерпретируемого языка, тем не менее массивы NumPy являются Си-подобными [11]. Так что эти массивы могут управляться стандартными инструкциями языка Python. Удобство использования массивов NumPy, в частности, состоит в том, что для этих массивов перегружены арифметические операции и математические функции.

В настоящей статье мы покажем использование пакета для решения задачи численного анализа устойчивости экстремальных поверхностей.

С целью исследования устойчивости экстремальных поверхностей разработан пакет NDimVar на языке программирования Python, в рамках которого реализованы классы в рамках основных модулей (см. диаграмму классов на рис. 1)

```
ndimvar.py,
geometry.py,
triangulation.py,
weight_dirichlet.py.
```

Модуль ndimvar.py реализует абстрактный класс **NDimVar**, инкапсулирующий обобщенный итерационный процесс, в частности итерационный процесс метода градиентного спуска. В подклассах требуется реализация метода вычисления градиента минимизируемой функции, который зависит от функционала  $W_0(\mathcal{M})$ . Модуль geometry.py реализует классы для вычисления геометрических характеристик граней кусочно-линейной

поверхности. Модуль `triangulation.py` реализует базовый класс **Triangulation** кусочно-линейной поверхности. В классах **Cylinder**, **Rectangle**, **Catenoid**, производных от класса **Triangulation**, необходимо реализовать конструкторы и метод `set_boundary()`, для установки граничных точек. Наконец, модуль `weight_dirichlet.py` реализует класс **WDirichlet**, который вычисляет матрицы  $A, B$  построенных выше квадратичных форм, соответствующих аппроксимациям интегралов в (4) с учетом граничных нулевых значений функции  $h(m)$ . Эти матрицы представлены двумерными NumPy массивами. Производные классы **EvalCylinder**, **EvalRectangle**, **EvalCatenoid** от класса **WDirichlet** позволяют уточнить значения весовой функции  $\tilde{g} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ .

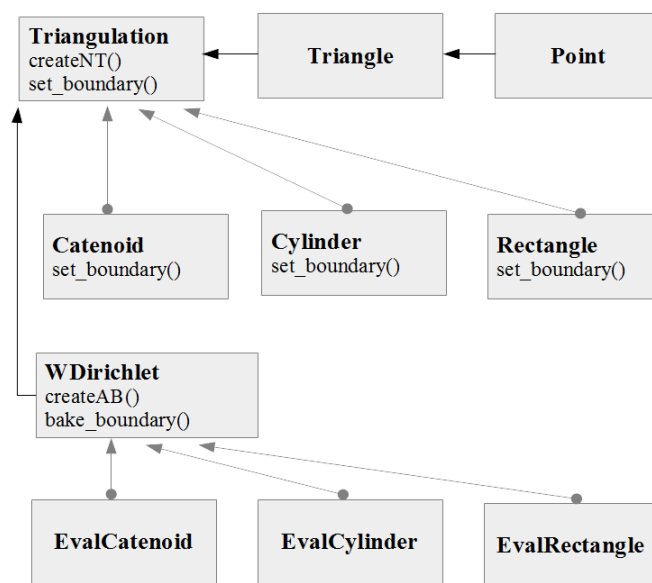


Рис. 1. Диаграмма классов пакета **NDimVar**

Отметим, что надстройка SciPy для пакета NumPy (пакет `scipy.optimize`) содержит возможности решения экстремальных многомерных задач на основе симплекс-методов Нельдера — Мида, метода Ньютона, метода Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно. Однако использование соответствующих функций и процедур, определенных в SciPy, не совсем подходит для решения геометрических вариационных задач, поскольку набор неизвестных значений представляет собой не многомерный вектор, а двумерную матрицу  $n \times 3$  — неизвестными являются местоположения точек в пространстве. Конечно, никаких трудностей развернуть двумерный массив в одномерный нет, однако в этом случае усложняется управление граничными точками и граничными значениями — теряется геометричность данных. Тем не менее использование этого пакета целесообразно для исследования устойчивости равновесных поверхностей, поскольку в этом случае мы имеем задачу на экстремум в классе допустимых функций, заданных в узлах триангулированной поверхности.

#### 4. Схема вычисления $\tilde{\mu}(\tilde{\mathcal{M}})$ на основе SciPy и NDimVar

Приведем схему вычисления величины  $\tilde{\mu}(\tilde{\mathcal{M}})$  при использовании пакета SciPy.



```

import numpy as np
import evalcatenoid as ecat
import catenoid as ct
import math
from scipy import linalg

# Параметр сетки
n=20

# Параметры катеноида
a=1.0
H=1.0*a

cat=ct.Catenoid(a,H,n)
cat.createNT()
cat.set_boundary()
stable=ecat.EvalCatenoid(cat)

# Создаем матрицы A,B
stable.createAB()

# Фиксируем границу поверхности
stable.bake_boundary()
A=stable.AA
B=stable.BB
# Вычисляем матрицу, обратную к B
C=linalg.inv(B)
C=A.dot(C)

# Вычисление собственных значений
la,v = linalg.eig(C)

lam=[clam.real for clam in la]
lamb=np.array(lam)

# Получаем требуемое минимальное собственное значение
print lamb.min()

```

Для использования реализованного нами пакета NDimVar необходимо внести немного изменений:

```

import numpy as np
import evalcatenoid as ecat
import ndimvar as ndv
import catenoid as cat
import math

n=30

```

```

# Количество итераций
k=500

# Параметры катеноида
a=1.0
H=1.0*a

catenoid=cat.Catenoid(1.0,1.0,n)
catenoid.set_boundary()
stable=ecyl.EvalCylinder(cyl)

# Создаем матрицы A,B
stable.createAB()

# Фиксируем границу поверхности
stable.bake_boundary()
A=stable.AA
B=stable.BB

# Создаем вектор начального приближения
h0=[0.7 for i in range(cyl.N-len(cyl.Bnd))]
calcul=ndv.NDimVar(A,B)

# Запускаем итерационный процесс градиентного спуска
y=calcul.process(k,h0)

# Получаем требуемое значение
print calcul.value()

```

## 5. Тестирование модулей

Для тестирования рассмотрим поверхность катеноида, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a \cosh \frac{t}{a} \cos \varphi \\ x_2 = a \cosh \frac{t}{a} \sin \varphi \\ x_3 = t, |t| < T. \end{cases}$$

Несложно подсчитать, что квадрат нормы  $\|A\|^2$  второй квадратичной формы поверхности равен

$$\|A\|^2 = \frac{2a^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Это значение используется в реализации класса **EvalCatenoid**. Известно (см., например, [1;6]), что поверхность катеноида устойчива, если  $T \leq at_0$ , и неустойчива при  $T > at_0$ , где  $t_0$  положительное решение уравнения

$$x \tanh x = 1. \tag{7}$$

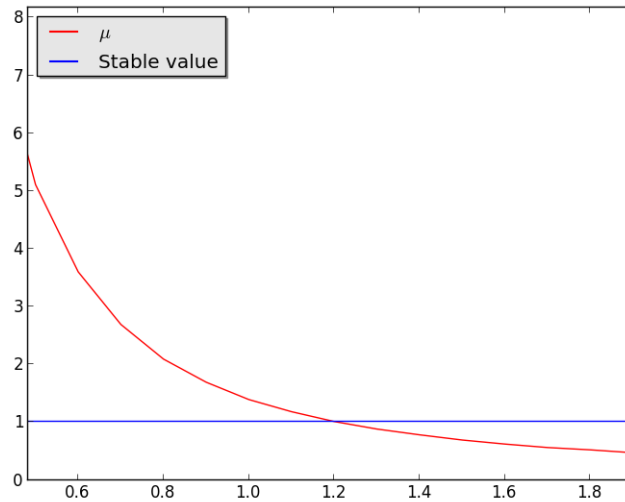


Рис. 2. Зависимость величины  $\mu$  от  $T$  для катеноида

Результаты тестирования представлены на нижеприведенном графике зависимости рассчитываемой величины  $\mu$  от величины  $T$ , характеризующей протяженность катеноида. Значения  $T$ , для которых  $\mu \geq 1$ , соответствуют устойчивым областям поверхности, а значения  $T$ , для которых  $\mu < 1$  — неустойчивым областям.

Данный график согласуется с теоретическими результатами, поскольку приближенное значение корня уравнения (7) равно  $t_0 \approx 1,2005$ .

Для случая поверхностей постоянной средней кривизны проведен аналогичный эксперимент, результаты которого согласуются с теоретическими выводами (рис. 3). В частности, в работах [6; 12] показано, что поверхность кругового цилиндра устойчива, если только его высота не превосходит длины основания.

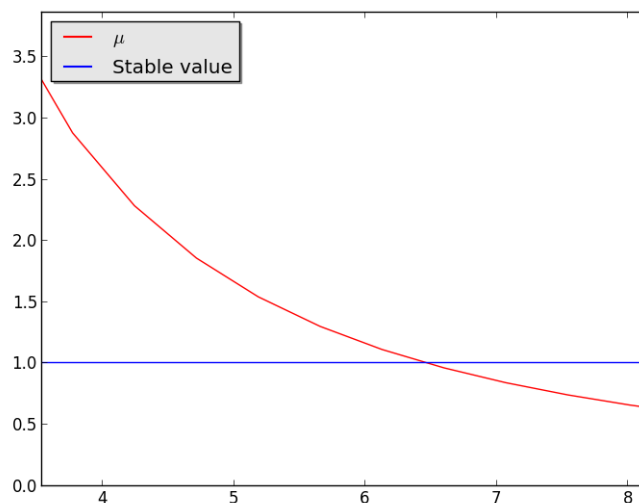


Рис. 3. Зависимость величины  $\mu$  от  $T$  для кругового цилиндра

**ПРИМЕЧАНИЕ**

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02517 р\_поволжье\_а).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Аминов, Ю. А. Минимальные поверхности. Цикл лекций / Ю. А. Аминов. — Харьков : Изд-во ХГУ, 1978. — 126 с.
2. Григорьева, Е. Г. Некоторые оценки основной частоты для финслеровой метрики / Е. Г. Григорьева // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 1 (14). — С. 18–22.
3. Клячин, А. А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / А. А. Клячин, М. А. Гацунаев // Уфим. мат. журн. — 2014. — Т. 6, № 3. — С. 3–16.
4. Клячин, А. А. О скорости сходимости последовательностей, доставляющей минимум в вариационной задаче / А. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 1 (16). — С. 12–20.
5. Клячин, В. А. О многомерном аналоге примера Шварца / В. А. Клячин // Изв. РАН. Серия математическая. — 2012. — Т. 76, № 4. — С. 41–48.
6. Клячин, В. А. О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны / В. А. Клячин // Изв. РАН. Серия математическая. — 2006. — Т. 70, № 4. — С. 77–90.
7. Клячин, В. А. Об одном емкостном признаке неустойчивости минимальных гиперповерхностей / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Докл. РАН. — 1993. — Т. 330, № 4. — С. 424–426.
8. Клячин, В. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства / В. А. Клячин, А. А. Широкий // Изв. вузов. Математика. — 2012. — Т. 56, № 1. — С. 31–39.
9. Клячин, В. А.  $C^1$ -аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках / В. А. Клячин, Е. А. Пабат // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2010. — Т. XIII, № 2. — С. 69–78.
10. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии. В 2 т. Т. 2 / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. — М. : Наука, 1981. — 416 с.
11. Олифант, Т. Многомерные итераторы NumPy / Т. Олифант // Идеальный код : сб. ст. / под ред. Э. Орама и Г. Уилсона. — СПб. : Питер, 2011. — С. 341–358.
12. Саранин, В. А. Равновесие жидкостей и его устойчивость / В. А. Саранин. — М. : Ин-т компьютер. исследований, 2002. — 144 с.
13. Финн, Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория / Р. Финн. — М. : Наука, 1989. — 312 с.
14. Wente, H. C. The stability of the axially symmetric pendant drop / H. C. Wente // Pacific J. Math. — 1980. — Vol. 88. — P. 421–470.

**REFERENCES**

1. Aminov Yu.A. *Minimalnye poverkhnosti. Tsikl lektsiy* [Minimal surfaces. Series of lectures]. Kharkov, Izd-vo KhGU Publ., 1978. 126 p.
2. Grigoreva E.G. *Nekotorye otsenki osnovnoy chastoty dlya finslerovoy metriki* [Some estimates of principle frequency for Finsler metrics]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2011, no. 1 (14), pp. 18-22.

3. Klyachin A.A., Gatsunaev M.A. O ravnomernoy skhodimosti kusochno-lineynykh resheniy uravneniya minimalnoy poverkhnosti [On uniform convergence of piecewise-linear solutions to minimal surface equation]. *Ufim. mat. zhurn.* [Ufa Mathematical Journal], 2014, vol. 6, no. 3, pp. 3-16.

4. Klyachin A.A. O skorosti skhodimosti posledovatel'nostey, dostavlyayushchey minimum v variatsionnoy zadache [On the rate of convergence of sequences, delivering a minimum in the variational problem]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2012, no. 1 (16), pp. 12-20.

5. Klyachin V.A. O mnogomernom analoge primera Shvartsa [On a multidimensional analogue of the Schwarz example]. *Izv. RAN. Seriya matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 2012, vol. 76, no. 4, pp. 41-48.

6. Klyachin V.A. O nekotorykh svoystvakh ustoychivyykh i neustoychivyykh poverkhnostey predpisannoy sredney krivizny [On some properties of stable and unstable surfaces with prescribed mean curvature]. *Izv. RAN. Seriya matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 2006, vol. 70, no. 4, pp. 77-90.

7. Klyachin V.A., Miklyukov V.M. Ob odnom emkostnom priznake neustoychivosti minimalnykh giperpoverkhnostey [On capacity condition for instability for minimal hypersurfaces]. *Dokl. RAN* [Doklady Mathematics], 1993, vol. 330, no. 4, pp. 424-426.

8. Klyachin V.A., Shirokiy A.A. Triangulyatsiya Delone mnogomernyykh poverkhnostey i ee approksimatsionnye svoystva [Delaunay triangulation of surfaces and approximations]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2012, vol. 56, no. 1, pp. 31-39.

9. Klyachin V.A., Pabat E.A.  $C^1$ -approksimatsiya poverkhnostey urovnya funktsiy, zadannykh na neregulyarnyykh setkakh [The  $C^1$ -approximation of the level surfaces of functions defined on irregular meshes]. *Sibirskiy zhurnal industrialnoy matematiki* [Siberian journal of industrial mathematics], 2010, vol. XIII, no. 2, pp. 69-78.

10. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsialnoy geometrii. V 2 t. T. 2* [Foundations of differential geometry]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 416 p.

11. Olifant T. *Mnogomernye iteratory NumPy* [Multidimensional iterators NumPy]. *Idealnyy kod : sb. st. / pod red. E. Orama i G. Uilsona* [Beautiful Code, Edited by Andy Oram and Greg Wilson]. SPb., Piter Publ., 2011, pp. 341-358.

12. Saranin V.A. *Ravnovesie zhidkostey i ego ustoychivost* [Uquilibrium fluids and its stability]. Moscow, In-t kompyuter. issledovaniy Publ., 2002. 144 p.

13. Finn R. *Ravnovesnye kapillyarnye poverkhnosti. Matematicheskaya teoriya* [Uquilibrium capillar surfces. Mathematical theory]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 312 p.

14. Wente H.C. The stability of the axially symmetric pendant drop. *Pacific J. Math.*, 1980, vol. 88, pp. 421-470.

## NUMERICAL STUDY OF THE STABILITY OF EQUILIBRIUM SURFACES USING NUMPY PACKAGE

**Klyachin Vladimir Aleksandrovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
 Head of Department of Computer Science and Experimental Mathematics,  
 Volgograd State University  
 klehnv@mail.ru, kiem@volsu.ru  
 Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Grigoreva Elena Gennadievna**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of  
 Computer Science and Experimental Mathematics,  
 Volgograd State University  
 e\_grigoreva@mail.ru, kiem@volsu.ru  
 Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Abstract.** The article is devoted to numerical investigation of stability for equilibrium surfaces. These surfaces are models for surfaces between two media. Moreover, these surfaces are extremal surfaces for the functional of the following type

$$W(\mathcal{M}) = A(\mathcal{M}) + G(\mathcal{M}),$$

where

$$A(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \alpha(x) d\mathcal{M}, \quad G(\mathcal{M}) = \int_{\Omega_1} \varphi(x) dx,$$

and domains  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\Omega_1 \subset \Omega$  such that  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega = \mathcal{M}$ . The problem of study a stability of equilibrium surfaces is reduced to investigate the value of kind

$$\inf_h \frac{\int_{\mathcal{M}} |\nabla h|^2 d\mathcal{M}}{\int_{\mathcal{M}} \|A\|^2 h^2 d\mathcal{M}},$$

where  $\|A\|$  is norm of second fundamental form for surface  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ , and gradient  $\nabla h$  is calculated in Riemann metric of  $\mathcal{M}$ . Using piecewise linear interpolation this value can be approximated by the value

$$\min_{\bar{h}} \frac{\langle A\bar{h}, \bar{h} \rangle}{\langle B\bar{h}, \bar{h} \rangle},$$

where  $A, B$  are symmetric positive definite matrixes. The article describes Python package NDimVar implemented on the basis package NumPy for solution of the above pointed problem. In addition, the study of stability for minimal surface of catenoid

$$\begin{cases} x_1 = a \cosh \frac{t}{a} \cos \varphi \\ x_2 = a \cosh \frac{t}{a} \sin \varphi \\ x_3 = t, |t| < T. \end{cases}$$

is considered. It is calculated maximal value of  $T$  under which catenoid is stable minimal surface.

**Key words:** extremal surface, triangulation, piecewise linear approximation, main frequency, package NumPy.