www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.3.1

УДК 517.95
ББК 22.161.6

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА [1]

Алексей Павлович Сазонов

Аспирант кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
sazonoff2007@gmail.com, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В данной работе исследуется асимптотическое поведение положительных решений эллиптических уравнений $\Delta u + p(r)u^\gamma = 0$ и $\operatorname{div}(\sigma(r)\nabla u) + p(r)u^\gamma = 0$ на полных римановых многообразиях. Найдены условия существования и несуществования положительных решений изучаемых уравнений на таких многообразиях.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, теоремы типа Лиувилля, модельные римановы многообразия, радиально-симметричные решения, задача Коши.

Введение

Данная работа посвящена вопросам существования положительных решений следующих эллиптических уравнений:

$$\Delta u + p(r)u^\gamma = 0 \tag{1}$$

и

$$\operatorname{div}(\sigma(r)\nabla u) + p(r)u^\gamma = 0 \tag{2}$$

на полных римановых многообразиях. Здесь $\gamma > 1$, $p(r)$ — неотрицательная функция на интервале $[0; +\infty)$, а $\sigma(r)$ — гладкая положительная функция на интервале $[0; +\infty)$.

В исследованиях последних десятилетий была замечена глубокая связь между теорией уравнений в частных производных эллиптического типа второго порядка (в частности уравнения Лапласа — Бельтрами и стационарного уравнения Шредингера), классическими проблемами теории функций, а также геометрией римановых многообразий. Данная тематика нашла свое развитие в работах многих российских и зарубежных математиков. Более подробное представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из публикации [6].

Определение эллиптичности типа достаточно просто и основано на определении компактности поверхности. Значительный интерес вызывает задача определения параболического и гиперболического типов. Отличительным свойством двумерных поверхностей параболического или гиперболического типов является выполнение или невыполнение для них теоремы Лиувилля соответственно, которая утверждает, что всякая положительная супергармоническая функция на рассматриваемой поверхности является тождественной постоянной. Данное свойство служит основой для распространения понятий параболичности и гиперболичности на римановы многообразия размерности больше двух. Иными словами, многообразия, на которых всякая ограниченная снизу супергармоническая функция равна константе, называют многообразиями параболического типа.

Вопросы существования нетривиальных гармонических и супергармонических функций естественным образом приводят к теоремам типа Лиувилля. Считающаяся классической, формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ функция является тождественной постоянной.

Значительный интерес вызывает изучение поведения решений эллиптических уравнений на искривленных римановых произведениях, в частности, на модельных римановых многообразиях. Опишем такие многообразия подробно.

Фиксируем начало координат $0 \in \mathbf{R}^n$ и некоторую гладкую функцию q на интервале $[0;\infty)$, такую, что $q(0) = 0$ и $q'(0) = 1$. Определим модельное риманово многообразие M_q следующим образом:

1. Множеством точек M_q является $\mathbf{R}^n$.

2. В полярных координатах $(r;\theta)$ (где $r \in (0;\infty)$ и $\theta \in S^{n-1}$) риманова метрика на $\{M_q \backslash 0\}$ определяется как

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2, \tag{3}$$

где $d\theta$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n-1}.

3. Риманова метрика в нуле является гладким продолжением метрики (3).

Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство $\mathbf{R}^n$, гиперболическое пространство $\mathbf{H}^n$, поверхность, полученная вращением графика функции $f(r)$ вокруг луча Or в $\mathbf{R}^n$, и т. д.

Отметим, что в течение последних десятилетий значительный интерес вызывает изучение радиально-симметричных решений различных уравнений и неравенств как в евклидовом пространстве, так и на некомпактных римановых многообразиях (см., например, работы [1–5], [7–9]).

В данной работе рассматриваются положительные радиально-симметричные решения уравнений (1) и (2) на многообразиях более общего вида, чем модельные.

Пусть M — полное риманово многообразие, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B — некоторый компакт, а D изометрично прямому произведению

$[0;\infty)\times S$, где S — компактное риманово многообразие, с метрикой

$$ds^2 = h^2(r)dr^2 + q^2(r)d\theta^2. \tag{4}$$

Здесь $h(r)$ и $q(r)$ — положительные, гладкие на $[0;\infty)$ функции, а $d\theta$ — стандартная риманова метрика на сфере S.

Стоит заметить (см., например, [6]), что так как M — полное риманово многообразие, то

$$\int_1^\infty h(t)dt = \infty.$$

Кроме того (см., например, [2]), если выполнено условие

$$\int_1^\infty \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)} = \infty, \tag{5}$$

то говорят, что M — многообразие параболического типа. В противном случае M — многообразие гиперболиченского типа.

1. О радиально-симметричных решениях уравнения $\Delta u + p(r)u^\gamma = 0$

В данном подразделе будут найдены условия существовании и несуществования положительных решений уравнения (1) на многообразии M.

Теорема 1. *Пусть многообразие M таково, что*

$$\int_1^\infty \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)} = \infty.$$

Тогда любое неотрицательное решение уравнения (1) *есть тождественный нуль.*

Доказательство теоремы достаточно очевидно и основано на свойствах многообразий параболического типа.

Далее будем рассматривать многообразия гиперболического типа.

Определим следующие функции:

$$V(r,u(r)) = \frac{q^{n-1}(r)u'(r)u(r)}{h(r)} + \frac{q^{2n-2}(r)(u')^2(r)}{h^2(r)}\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)} +$$
$$+\frac{2}{\gamma+1}q^{2n-2}(r)p(r)u^{\gamma+1}(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)} \tag{6}$$

и

$$\Phi(r) = -\frac{\gamma+3}{\gamma+1}h(r)q^{n-1}(r)p(r) + \frac{4(n-1)}{\gamma+1}q^{2n-3}(r)q'(r)p(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)} +$$
$$+\frac{2}{\gamma+1}q^{2n-2}(r)p'(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)}. \tag{7}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство:*

$$V'_r(r,u(r)) = \Phi(r)u^{\gamma+1}(r). \tag{8}$$

Доказательство. Как известно (см., например, [1]), в локальных координатах $x_1, ..., x_n$ оператор Лапласа — Бельтрами Δ имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

где g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора и $g = \det ||g_{ij}||$. Отсюда легко показать, что в локальных координатах $(r;\theta)$ оператор Лапласа — Бельтрами на S имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{h^2(r)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{h^2(r)} \left((n-1)\frac{q'(r)}{q(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{q^2(r)} \Delta_\theta,$$

где Δ_θ — оператор Лапласа — Бельтрами на сфере S.

Тогда, учитывая вид оператора Лапласа — Бельтрами на M, уравнение (1) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{h^2(r)} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{h^2(r)} \left((n-1)\frac{q'(r)}{q(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{q^2(r)} \Delta_\theta u + p(r) u^\gamma = 0$$

или, так как в нашей работе будут изучаться радиально-симметричные решения, последнее эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{q^{n-1}(r) u'(r)}{h(r)} \right)' + h(r) q^{n-1}(r) p(r) u^\gamma(r) = 0. \tag{9}$$

Далее, вычисляя производную $V_r'(r, u(r))$ и учитывая равенство (9), получаем нужное. Лемма доказана.

Сформулируем и докажем утверждение о существовании положительных радиально-симметричных решений уравнения (1).

Теорема 2. *Предположим, что* $\Phi(r) \leq 0$. *Тогда для любого* $\alpha > 0$ *уравнение* (1) *имеет на* M *положительное радиально-симметричное решение, такое что* $u(0) = \alpha$.

Доказательство. Уравнение (1), с учетом того, что мы рассматриваем радиально-симметричные решения, эквивалентно дифференциальному уравнению (9) с начальными условиями

$$u(0) = \alpha, \quad u'(0) = 0, \tag{10}$$

где $\alpha = \text{const} > 0$ из утверждения теоремы, а $u'(0) = 0$ следует из радиальности рассматриваемых решений.

Обозначим $u_\alpha(r)$ решение уравнения (9) с начальными условиями (10). В силу теоремы Пеано такое решение существует на некотором интервале $[0;\delta)$. Обозначим $[0; r_\alpha)$ за максимальный интервал, на котором $u_\alpha(r)$ положительно.

Интегрируя равенство (9) по отрезку $[0; r_\alpha]$, учитывая начальные условия (10), получаем:

$$u'(r_\alpha) = -\frac{h(r)}{q^{n-1}(r_\alpha)} \int_0^{r_\alpha} h(t) q^{n-1}(t) p(t) u^\gamma(t) dt.$$

Отсюда, в силу положительности функций $h(r)$, $q(r)$, $p(r)$, следует, что $u_\alpha(r)$ — монотонно убывающая функция.

Предположим, что существует $\alpha > 0$, такое, что $r_\alpha < \infty$, откуда в силу монотонного убывания функции получаем, что $u_\alpha(r_\alpha) = 0$ и $u_\alpha(r)$ — положительно на $[0; r_\alpha)$.

Рассмотрим функцию $V(r_\alpha, u(r_\alpha))$ на отрезке $[0; r_\alpha]$. Из утверждения леммы 1 и условия теоремы следует, что $V'_{r_\alpha}(r_\alpha, u(r_\alpha)) \leq 0$. Таким образом, функция $V(r_\alpha, u(r_\alpha))$ монотонно убывает на интервале $(0; r_\alpha)$, следовательно,

$$V(r_\alpha, u(r_\alpha)) \leq V(0). \tag{11}$$

Определим функцию

$$\varphi(r) = \frac{q^{n-1}(r)}{h(r)} \int_r^\tau \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(r)}. \tag{12}$$

По определению метрики многообразия M в окрестности нуля справедливо следующее: $q^{n-1}(r) \sim r^{n-1}$ и $h(r) \sim c > 0$. Тогда в окрестности нуля функция $\frac{q^{n-1}(r)}{h(r)} \sim \frac{r^{n-1}}{c}$. Из определения эквивалентности двух функций следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что для всех $r < \delta$ выполнено:

$$(1-\varepsilon)\frac{r^{n-1}}{c} \leq \frac{q^{n-1}(r)}{h(r)} \leq (1+\varepsilon)\frac{r^{n-1}}{c}. \tag{13}$$

Тогда в окрестности нуля функция $\varphi(r)$ с учетом неравенства (13) принимает вид:

$$(1-\varepsilon)\frac{r^{n-1}}{c} \int_r^\tau \frac{cdt}{(1+\varepsilon)t^{n-1}} \leq \varphi(r) \leq (1+\varepsilon)\frac{r^{n-1}}{c} \int_r^\tau \frac{cdt}{(1-\varepsilon)t^{n-1}}$$

или

$$(1-\varepsilon)r^{n-1} \int_r^\tau \frac{dt}{(1+\varepsilon)t^{n-1}} \leq \varphi(r) \leq (1+\varepsilon)r^{n-1} \int_r^\tau \frac{dt}{(1-\varepsilon)t^{n-1}}. \tag{14}$$

Рассмотрим случай, когда $n > 2$. Тогда из неравенства (14) получаем:

$$\frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)(n-2)}\left(r - \frac{r^{n-1}}{\tau^{n-2}}\right) \leq \varphi(r) \leq \frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)(n-2)}\left(r - \frac{r^{n-1}}{\tau^{n-2}}\right).$$

Переходя к пределу при $r \to 0$ в последнем неравенстве, получаем, что $\varphi(r) \to 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 2$. Аналогично, из неравенства (14) получаем:

$$\frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)(n-2)} r \ln\frac{\tau}{r} \leq \varphi(r) \leq \frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)(n-2)} r \ln\frac{\tau}{r}$$

и, переходя к пределу при $r \to 0$ в последнем неравенстве, получаем, что $\varphi(r) \to 0$.

В результате приходим к выводу, что $\varphi(r) \to 0$ при $r \to 0$. А это значит, что $V(0) = 0$.

Тогда неравенство (11) эквивалентно следующему:

$$V(r_\alpha, u(r_\alpha)) \leq 0. \tag{15}$$

Заметим, что $V(r_\alpha, u(r_\alpha))$ в силу обозначения (6) имеет вид:

$$V(r_\alpha, u(r_\alpha)) = \frac{q^{n-1}(r_\alpha)u'(r_\alpha)u(r_\alpha)}{h(r_\alpha)} + \frac{q^{2n-2}(r_\alpha)(u')^2(r_\alpha)}{h^2(r_\alpha)} \int_{r_\alpha}^\infty \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)} +$$

$$+\frac{2}{\gamma+1}q^{2n-2}(r_\alpha)p(r_\alpha)u^{\gamma+1}(r_\alpha)\int_{r_\alpha}^{\infty}\frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)}. \qquad (16)$$

С учетом предположения, что $u_\alpha(r_\alpha)=0$, из выражения (16) получаем, что

$$V(r_\alpha,u(r_\alpha))=\frac{q^{2n-2}(r_\alpha)(u')^2(r_\alpha)}{h^2(r_\alpha)}\int_{r_\alpha}^{\infty}\frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)},$$

то есть справедливо следующее:

$$\frac{q^{2n-2}(r_\alpha)(u')^2(r_\alpha)}{h^2(r_\alpha)}\int_{r_\alpha}^{\infty}\frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)}\le 0.$$

В силу положительности $h(r_\alpha)$ и $q(r_\alpha)$ заключаем, что $u'(r_\alpha)=0$.

В результате получили, что $u_\alpha(r_\alpha)=u'(r_\alpha)=0$. Тогда, по теореме единственности задачи Коши, следует, что $u_\alpha\equiv 0$ для всех $r\in[0;r_\alpha]$. Получаем противоречие с условием теоремы. Теорема доказана.

Далее сформулируем некоторые вспомогательные утверждения, основанные на свойствах рассматриваемых решений.

Лемма 2. *Пусть функция* $\frac{q(r)}{h^{\frac{1}{n-1}}(r)}$ *выпукла вверх и уравнение* (1) *имеет положительное радиально-симметричное решение. Тогда функция* $\frac{q^{n-2}(r)}{h^{\frac{n-2}{n-1}}(r)}u(r)$ *не убывает на интервале* $(0;\infty)$.

Лемма 3. *Пусть функция* $\frac{q(r)}{h^{\frac{1}{n-1}}(r)}$ *выпукла вверх. Тогда, если*

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)h^{\frac{3n-6+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)p(r)\right)\ge 0, \quad \text{\textit{то}} \quad \Phi(r)\ge 0.$$

Подробное доказательство лемм 2 и 3 см. в работе [4], положив замену $A(r)=\frac{q(r)}{h^{\frac{1}{n-1}}(r)}$ и $f(r)=h^2(r)p(r)$.

Далее найдем условия, при которых уравнение (1) не имеет положительных радиально-симметричных решений.

Теорема 3. *Пусть функция* $\frac{q(r)}{h^{\frac{1}{n-1}}(r)}$ *выпукла вверх. Предположим, что выполнены следующие условия:*

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)h^{\frac{3n-6+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)p(r)\right)\ge 0$$

и

$$\int_r^{\infty}\frac{q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)h^{\frac{2n-1+\gamma(n-2)}{n-1}}(\xi)}{h(\xi)q'(\xi)+\frac{1}{n-1}q(\xi)h'(\xi)}p(\xi)d\xi=\infty.$$

Тогда уравнение (1) *не имеет на* M *положительных радиально-симметричных решений.*

Теорема 4. *Пусть функция* $\frac{q(r)}{h^{\frac{1}{n-1}}(r)}$ *выпукла вверх. Предположим, что выполнены следующие условия:*

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)h^{\frac{3n-6+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)p(r)\right)\ge 0,$$

$$\int_r^{\infty} \frac{q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi) h^{\frac{2n-1+\gamma(n-2)}{n-1}}(\xi)}{h(\xi)q'(\xi) + \frac{1}{n-1}q(\xi)h'(\xi)} p(\xi)d\xi < \infty$$

и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{q^{n-\gamma(n-2)}(r) h^{\frac{3n-2+\gamma(n-2)}{n-1}}(r)}{\left(h(r)q'(r) + \frac{1}{n-1}q(r)h'(r)\right)^2} p(r) = \infty.$$

Тогда уравнение (1) *не имеет на* M *положительных радиально-симметричных решений*

Теорема 5. *Пусть функция* $\frac{q(r)}{h^{\frac{1}{n-1}}(r)}$ *выпукла вверх. Предположим, что выполнены следующие условия:*

$$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{q(r)}{h^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right)' = a > 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r) h^{\frac{3n-6+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)p(r)\right) \geq 0,$$

$$\int_r^{\infty} \frac{q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi) h^{\frac{2n-1+\gamma(n-2)}{n-1}}(\xi)}{h(\xi)q'(\xi) + \frac{1}{n-1}q(\xi)h'(\xi)} p(\xi)d\xi < \infty$$

и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r) h^{\frac{7n-6+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)}{\left(h(r)q'(r) + \frac{1}{n-1}q(r)h'(r)\right)^2} p(r) = \infty.$$

Тогда уравнение (1) *не имеет на* M *положительных радиально-симметричных решений*

Положив замену $A(r) = \frac{q(r)}{h^{\frac{1}{n-1}}(r)}$ и $f(r) = h^2(r)p(r)$, доказательство теорем 3, 4 и 5 аналогично доказательству подобных теорем в работе [4].

2. О радиально-симметричных решениях уравнения div $(\sigma(r)\nabla u) + p(r)u^{\gamma} = 0$

В данном подразделе будут найдены условия существования и несуществования положительных решений уравнения (2) на многообразии M.

Теорема 6. *Пусть многообразие* M *таково, что*

$$\int_1^{\infty} \frac{h(t)dt}{\sigma(r)q^{n-1}(t)} = \infty.$$

Тогда любое неотрицательное решение уравнения (2) *есть тождественный нуль.*

Далее будем считать, что

$$\int_1^{\infty} \frac{h(t)dt}{\sigma(r)q^{n-1}(t)} < \infty.$$

Определим следующие функции:

$$V(r, u(r)) = \frac{\sigma(r)q^{n-1}(r)u'(r)u(r)}{h(r)} + \frac{\sigma^2(r)q^{2n-2}(r)u'^2(r)}{h^2(r)} \int_r^{\infty} \frac{h(t)dt}{\sigma(t)q^{n-1}(t)} +$$

$$+\frac{2}{\gamma+1}\sigma(r)q^{2n-2}(r)p(r)u^{\gamma+1}(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{\sigma(t)q^{n-1}(t)} \qquad (17)$$

и

$$\Phi(r) = -\frac{\gamma+3}{\gamma+1}h(r)q^{n-1}(r)p(r) + \frac{4(n-1)}{\gamma+1}\sigma(r)q^{2n-3}(r)q'(r)p(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{\sigma(t)q^{n-1}(t)} +$$

$$+\frac{2}{\gamma+1}\sigma(r)q^{2n-2}(r)p'(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{\sigma(t)q^{n-1}(t)} +$$

$$+\frac{2}{\gamma+1}\sigma'(r)q^{2n-2}(r)p(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{\sigma(t)q^{n-1}(t)}. \qquad (18)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Справедливо равенство:*

$$V_r'(r, u(r)) = \Phi(r)u^{\gamma+1}(r).$$

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 1, вычисляя оператор Лапласа — Бельтрами в локальных координатах $(r;\theta)$ на S, получаем:

$$\Delta = \frac{1}{h^2(r)}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{h^2(r)}\left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} + (n-1)\frac{q'(r)}{q(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{q^2(r)}\Delta_\theta,$$

где Δ_θ — оператор Лапласа — Бельтрами на сфере S.

Тогда, учитывая вид оператора Лапласа — Бельтрами на M, уравнение (2) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{h^2(r)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{h^2(r)}\left(\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} + (n-1)\frac{q'(r)}{q(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)}\right)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{q^2(r)}\Delta_\theta u + \frac{p(r)u^\gamma}{\sigma(r)} = 0$$

или, поскольку в нашей работе изучаются радиально-симметричные решения, то последнее уравнение эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{\sigma(r)q^{n-1}(r)u'(r)}{h(r)}\right)' + h(r)q^{n-1}(r)p(r)u^\gamma(r) = 0. \qquad (19)$$

Далее, вычисляя производную $V_r'(r, u(r))$ и, учитывая равенство (19), получаем нужное. Лемма доказана.

Сформулируем теорему о существовании положительных радиально-симметричных решений уравнения (2).

Теорема 7. *Предположим, что* $\Phi(r) \le 0$. *Тогда для любого* $\alpha > 0$ *уравнение* (2) *имеет на* M *положительное радиально-симметричное решение, такое что* $u(0) = \alpha$.

Далее введем следующие обозначения:

$$A(r) = \left(\frac{\sigma(r)}{h(r)}\right)^{\frac{1}{n-1}} q(r)$$

и

$$f(r) = \frac{h^2(r)p(r)}{\sigma(r)}.$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\left(A^{n-1}(r)u'(r)\right)' + A^{n-1}(r)f(r)u^{\gamma}(r) = 0. \tag{20}$$

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения, основанные на свойствах рассматриваемых решений.

Лемма 5. *Пусть функция* $\left(\frac{\sigma(r)}{h(r)}\right)^{\frac{1}{n-1}} q(r)$ *выпукла вверх и уравнение* (2) *имеет положительное радиально-симметричное решение. Тогда функция* $\left(\frac{\sigma(r)}{h(r)}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} q(r)$ *не убывает на интервале* $(0;\infty)$.

Лемма 6. *Пусть функция* $\left(\frac{\sigma(r)}{h(r)}\right)^{\frac{1}{n-1}} q(r)$ *выпукла вверх. Тогда, если*

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{h^{\frac{3n-6+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)}{\sigma^{\frac{n-4+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)} q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0, \quad \text{то} \quad \Phi(r) \geq 0.$$

Сформулируем утверждения, при которых уравнение (2) не имеет положительных радиально-симметричных решений.

Теорема 8. *Пусть функция* $\left(\frac{\sigma(r)}{h(r)}\right)^{\frac{1}{n-1}} q(r)$ *выпукла вверх. Предположим, что выполнены следующие условия:*

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{h^{\frac{3n-6+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)}{\sigma^{\frac{n-4+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)} q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0$$

и

$$\int_r^{\infty} \frac{\sigma^{\frac{n-2-\gamma(n-2)}{n-1}}(\xi)h^{\frac{2n-3+\gamma(n-2)}{n-1}}(\xi)q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)}{\frac{1}{n-1}\left(\sigma'(\xi)h(\xi)-h'(\xi)\sigma(\xi)\right)+\sigma(\xi)h(\xi)q'(\xi)} p(\xi)d\xi = \infty.$$

Тогда уравнение (2) *не имеет на* M *положительных радиально-симметричных решений.*

Теорема 9. *Пусть функция* $\left(\frac{\sigma(r)}{h(r)}\right)^{\frac{1}{n-1}} q(r)$ *выпукла вверх. Предположим, что выполнены следующие условия:*

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{h^{\frac{3n-6+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)}{\sigma^{\frac{n-4+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)} q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0,$$

$$\int_r^{\infty} \frac{\sigma^{\frac{n-2-\gamma(n-2)}{n-1}}(\xi)h^{\frac{2n-3+\gamma(n-2)}{n-1}}(\xi)q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)}{\frac{1}{n-1}\left(\sigma'(\xi)h(\xi)-h'(\xi)\sigma(\xi)\right)+\sigma(\xi)h(\xi)q'(\xi)} p(\xi)d\xi < \infty$$

и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\sigma^{\frac{2n-3-\gamma(n-2)}{n-1}}(r)h^{\frac{3n-6+\gamma(n-2)}{n-1}}(r)}{\left(\frac{1}{n-1}\left(\sigma'(r)h(r)-h'(r)\sigma(r)\right)+\sigma(r)h(r)q'(r)\right)^2} q^{n-\gamma(n-2)}(r)p(r) = \infty.$$

Тогда уравнение (2) *не имеет на* M *положительных радиально-симметричных решений.*

Теорема 10. *Пусть функция* $\left(\frac{\sigma(r)}{h(r)}\right)^{\frac{1}{n-1}} q(r)$ *выпукла вверх. Предположим, что выполнены следующие условия:*

$$\lim_{r\to\infty}\left(\left(\frac{\sigma(r)}{h(r)}\right)^{\frac{1}{n-1}} q(r)\right)' = a > 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{h^{\frac{3n-6+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)}{\sigma^{\frac{n-4+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)} q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\right) \geq 0,$$

$$\int_r^\infty \frac{\sigma^{\frac{n-2-\gamma(n-2)}{n-1}}(\xi)h^{\frac{2n-3+\gamma(n-2)}{n-1}}(\xi)q^{n-1-\gamma(n-2)}(\xi)}{\frac{1}{n-1}\left(\sigma'(\xi)h(\xi)-h'(\xi)\sigma(\xi)\right)+\sigma(\xi)h(\xi)q'(\xi)} p(\xi)d\xi < \infty$$

и

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\sigma^{\frac{3n-4-\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)h^{\frac{7n-14+\gamma(n-2)}{2(n-1)}}(r)}{\left(\frac{1}{n-1}\left(\sigma'(r)h(r)-h'(r)\sigma(r)\right)+\sigma(r)h(r)q'(r)\right)^2} q^{\frac{n+2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r) = \infty.$$

Тогда уравнение (2) *не имеет на* M *положительных радиально-симметричных решений.*

Доказательства теорем 8, 9, 10 в терминах $A(r)$ и $f(r)$ аналогичны доказательству подобных теорем в работе [4].

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 15-41-02479-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вихарев, С. С. О некоторых лиувиллевых теоремах для стационарного уравнения Гинзбурга — Ландау на квазимодельных римановых многообразиях / С. С. Вихарев // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, вып. 3. — С. 127–135.

2. Лосев, А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 12. — С. 15–24.

3. Лосев, А. Г. Уравнение Шредингера на искривленных римановых произведениях / А. Г. Лосев // Труды по анализу и геометрии. — Новосибирск : Изд-во ин-та математики, 2000. — С. 350–369.

4. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых полулинейных уравнений на модельных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, А. П. Сазонов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 2 (19). — С. 36–56. — DOI: 1015688/jvolsu1.2013.2.5.

5. Лосев, А. Г. О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Ю. С. Федоренко // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 867–878.

6. Grigor'yan, A. Analitic and geometric background of recurence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36. — P. 135–249.

7. Kusan, T. Positive entire solutions of superlinear elliptic equations / T. Kusan, M. Naito // Hirosima math. J. — 1986. — № 16. — P. 361–366.

8. Murata, M. Nonnegative solutions of the geat equation on rotationally symmetric Riemannian manifolds and semismall parrurbations / M. Murata // Rev. Mat. Iberoamericana. — 2011. — Vol. 27, № 3. — P. 885–907.

9. Murata, M. Uniqueness of L^1-harmonic functions on rotationally symmetric Riemannian manifolds / M. Murata, T. Tsuchida // Kodai Math. J. — 2014. — Vol. 37, № 1. — P. 1–15.

REFERENCES

1. Vikharev S.S. O nekotorykh liuvillevykh teoremakh dlya statsionarnogo uravneniya Ginzburga — Landau na kvazimodelnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Some Liouville Theorems for Stationary Ginzburg — Landau Equation on Quasimodel Riemannian Manifolds]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 127-135.

2. Losev A.G. Nekotorye liuvillevy teoremy na rimanovykh mnogoobraziyakh spetsialnogo vida [Some Liouville Theorems on Riemannian Manifolds of Special Type]. *Izv. vuzov. Matematika* [Soviet Mathematics], 1991, no. 12, pp. 15-24.

3. Losev A.G. Uravnenie Shredingera na iskrivlennykh rimanovykh proizvedeniyakh [The Schrodinger Equation in the Curved Riemannian Products]. *Trudy po analizu i geometrii.* Novosibirsk, Izd-vo in-ta matematiki Publ., 2000, pp. 350-369.

4. Losev A.G., Sazonov A.P. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh polulineynykh uravneniy na modelnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Asymptotic Behavior of Solutions of Semilinear Equations on Model Riemannian Manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2013, no. 2 (19), pp. 36-56. DOI: 1015688/jvolsu1.2013.2.5.

5. Losev A.G., Fedorenko Yu.S. O polozhitelnykh resheniyakh kvazilineynykh ellipticheskikh neravenstv na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Positive Solutions of Quasilinear Elliptic Inequalities on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2007, vol. 81, no. 6, pp. 867-878.

6. Grigor'yan A. Analitic and Geometric Background of Recurence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, pp. 135-249.

7. Kusan T., Naito M. Positive Entire Solutions of Superlinear Elliptic Equations. *Hirosima math. J.*, 1986, no. 16, pp. 361-366.

8. Murata M. Nonnegative Solutions of the Geat Equation on Rotationally Symmetric Riemannian Manifolds and Semismall Parrurbations. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 2011, vol. 27, no. 3, pp. 885-907.

9. Murata M., Tsuchida T. Uniqueness of L^1-Harmonic Functions on Rotationally Symmetric Riemannian Manifolds. *Kodai Math. J.*, 2014, vol. 37, no. 1, pp. 1-15.

POSITIVE SOLUTIONS OF ELLIPTIC EQUATIONS ON RIEMANNIAN MANIFOLDS OF A SPECIAL TYPE

Aleksey Pavlovich Sazonov

Postgraduate Student, Department of Mathematical Analysis and Functions Theory, Volgograd State University

sazonoff2007@gmail.com, matf@volsu.ru

Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper we study the asymptotic behavior of positive solutions of elliptic equations $\Delta u + p(r)u^\gamma = 0$ and $\operatorname{div}(\sigma(r)\nabla u) + p(r)u^\gamma = 0$

on complete Riemannian manifolds. The conditions of existence and nonexistence of positive solutions of the equations studied on such manifolds.

Let M — complete Riemannian manifold can be represented as a union of $M = B \cup D$, where B — a compact and D isometric to the direct product of $[0; \infty) \times S$, where S — compact Riemannian manifold with metric

$$ds^2 = h^2(r)dr^2 + q^2(r)d\theta^2.$$

Where $h(r)$ and $q(r)$ — a positive, smooth on $[0; \infty)$ functions, and $d\theta$ — the standard Riemannian metric on the sphere S.

The following assertions.

Theorem 1. *Let the manifold M is such that*

$$\int_1^\infty \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)} = \infty.$$

Then every non-negative solution (1) *is identically zero.*

Theorem 2. *Let the manifold M is such that*

$$\int_1^\infty \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)} =< \infty$$

and let it go

$$-\frac{\gamma+3}{\gamma+1}h(r)q^{n-1}(r)p(r) + \frac{4(n-1)}{\gamma+1}q^{2n-3}(r)q'(r)p(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)}+$$

$$+\frac{2}{\gamma+1}q^{2n-2}(r)p'(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{q^{n-1}(t)} \leq 0.$$

Then for every $\alpha > 0$ the equation (1) *is on M a positive radially symmetric solution such that $u(0) = \alpha$.*

Theorem 3. *Let the manifold M is such that*

$$\int_1^\infty \frac{h(t)dt}{\sigma(r)q^{n-1}(t)} = \infty.$$

Then every non-negative solution (2) *is identically zero.*

Theorem 4. *Let the manifold M is such that*

$$\int_1^\infty \frac{h(t)dt}{\sigma(r)q^{n-1}(t)} < \infty.$$

and let it go

$$-\frac{\gamma+3}{\gamma+1}h(r)q^{n-1}(r)p(r) + \frac{4(n-1)}{\gamma+1}\sigma(r)q^{2n-3}(r)q'(r)p(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{\sigma(t)q^{n-1}(t)}+$$

$$+\frac{2}{\gamma+1}\sigma(r)q^{2n-2}(r)p'(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{\sigma(t)q^{n-1}(t)}+$$

$$+\frac{2}{\gamma+1}\sigma'(r)q^{2n-2}(r)p(r)\int_r^\infty \frac{h(t)dt}{\sigma(t)q^{n-1}(t)} \le 0.$$

Then for every $\alpha > 0$ *the equation* (2) *is on* M *a positive radially symmetric solution such that* $u(0) = \alpha$.

In addition, the found conditions under which the equations (1) and (2) haven't a positive radially symmetric solutions.

Key words: elliptic equations, theorems of Liouville, model Riemannian manifolds, radially symmetric solutions, problem of Cauchy.