



www.volsu.ru

DOI: <http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.4.5>

УДК 539.3

ББК 22.251

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ
УПРУГОГО ТОЛСТОСТЕННОГО КОЛЬЦА
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ
САМОУРАВНОВЕШИВАЮЩИХСЯ ДАВЛЕНИЯХ
НА ЕГО ВНУТРЕННЕЙ И ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦАХ**

Александр Степанович Кравчук

Доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры био- и наномеханики,
Белорусский государственный университет
ask_Belarus@inbox.ru
просп. Независимости, 4, 220030 г. Минск, Республика Беларусь

Анжелика Ивановна Кравчук

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования,
Белорусский государственный университет
anzhelika.kravchuk@gmail.com
просп. Независимости, 4, 220030 г. Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Впервые с помощью теории аналитических функций и формул Колосова-Мусхелишвили решена задача двумерной теории упругости для толстостенного кольца при неравномерных самоуравновешивающихся давлениях, представленных в виде рядов Фурье, действующих на его границах.

Ключевые слова: аналитические функции, формулы Колосова-Мусхелишвили, комплексные числа, упругое толстенное кольцо, неравномерное давление.

Введение

Обобщение задачи Ляме для толстостенного кольца на случай произвольного распределения давлений на его внутренней и внешней границах представляет определенный методический

интерес, так как при решении указанной задачи у студентов закрепляются навыки решения краевых задач для областей, имеющих круговые границы с помощью рядов аналитических функций.

Отсутствие решения этой задачи как в научной, так и в учебной литературе объясняется довольно громоздкими преобразованиями, которые необходимо выполнить для получения распределений компонент напряжений.

Общие формулы Колосова-Мусхелишвили

Для упругого изотропного кольца формулы в декартовых координатах имеют вид [1; 2]:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})}], \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2 \cdot [z\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (2)$$

$$2\mu \cdot (u_x + iu_y) = \kappa \cdot \varphi(z) - z\overline{\varphi'(\bar{z})} - \overline{\psi(z)}, \quad (3)$$

где σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} – компоненты напряжений; u_x , u_y – проекции вектора перемещений в декартовой системе координат; i – комплексная единица; $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – функции, голоморфные в кольце (рис. 1); $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; κ – константа, определяемая видом напряженного состояния:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{при плоской деформации;} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{при плоском напряженном состоянии.} \end{cases}$$

Учитывая, что в [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy}, \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy}) \cdot e^{2i\theta}, \end{aligned} \quad (4)$$

где σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ – компоненты напряжений в полярной системе координат, вычитаем из первого уравнения системы (4) и, используя (1) и (2), получаем:

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})} - z\varphi''(z) - \frac{z}{z} \cdot \psi'(z). \quad (5)$$

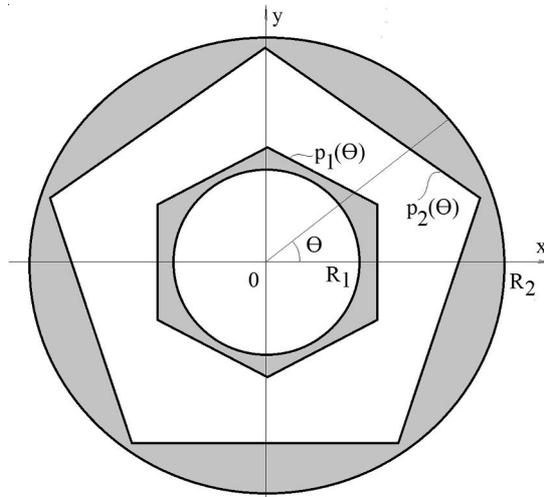


Рис. 1. Кольцо под действием самоуравновешивающегося внутреннего $p_1(\theta)$ и внешнего $p_2(\theta)$ давлений (R_1 – внутренний радиус кольца; R_2 – внешний радиус кольца)

**Общий вид комплексных потенциалов,
решающих первую основную краевую задачу для кольца в общем случае**

Очевидно, что общий вид комплексных потенциалов, решающих задачу для кольца, является простой суперпозицией комплексных потенциалов для линейно упругих изотропных отверстий в плоскости и диска:

$$\varphi(z) = -\frac{(V_{x,1} + V_{x,2}) + i(V_{y,1} + V_{y,2})}{2\pi \cdot (1 + \kappa)} \cdot \ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k} \cdot z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2,k}}{z^k}, \quad (6)$$

$$\psi(z) = \kappa \frac{(V_{x,1} + V_{x,2}) - i(V_{y,1} + V_{y,2})}{2\pi \cdot (1 + \kappa)} \cdot \ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,k} \cdot z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{2,k}}{z^k},$$

где

$$V_{x,1} = -R_1 \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}|_{r=R_1} \cos(\theta) - \sigma_{r\theta}|_{r=R_1} \cdot \sin(\theta)) d\theta, \quad (7)$$

$$V_{y,1} = -R_1 \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}|_{r=R_1} \cdot \sin(\theta) + \sigma_{r\theta}|_{r=R_1} \cdot \cos(\theta)) d\theta,$$

$$V_{x,2} = -R_2 \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}|_{r=R_2} \cos(\theta) - \sigma_{r\theta}|_{r=R_2} \cdot \sin(\theta)) d\theta, \quad (8)$$

$$V_{y,2} = -R_2 \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}|_{r=R_2} \cdot \sin(\theta) + \sigma_{r\theta}|_{r=R_2} \cdot \cos(\theta)) d\theta,$$

$V_{x,1}, V_{y,1}$ – компоненты главного вектора сил, действующих на внутреннем радиусе кольца; $V_{x,2}, V_{y,2}$ – компоненты главного вектора сил, действующих на внешнем радиусе кольца.

Краевые условия на границах кольца.

Определение самоуравновешивающейся нагрузки

Будем предполагать, что трение на границах кольца отсутствует ($\sigma_{r\theta}|_{r=R_1 \vee R_2} = 0$), а также $\sigma_{rr}|_{r=R_1} = -p_1(\theta)$ и $\sigma_{rr}|_{r=R_2} = -p_2(\theta)$. Исходя из краевых условий задачи и из формул для определения главных векторов сил, действующих на одной и другой границе кольца (7) и (8), получаем:

$$V_{x,1} = R_1 \int_0^{2\pi} p_1(\theta) \cos(\theta) d\theta, \quad V_{y,1} = R_1 \int_0^{2\pi} p_1(\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta, \quad (9)$$

$$V_{x,2} = R_2 \int_0^{2\pi} p_2(\theta) \cos(\theta) d\theta, \quad V_{y,2} = R_2 \int_0^{2\pi} p_2(\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta.$$

Условие самоуравновешенности нагрузок, действующих на границах кольца, определяется очевидным образом, исходя из (9):

$$V_{x,1} = V_{y,1} = V_{x,2} = V_{y,2} = 0. \quad (10)$$

Будем полагать, что на внутренней и внешней границе кольца для $p_1(\theta)$ и $p_2(\theta)$ справедливы следующие равенства:

$$p_1(\theta) = \frac{A_{1,0}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_{1,j} \cdot \cos(j \cdot \theta) + B_{1,j} \cdot \sin(j \cdot \theta)), \quad (11)$$

$$p_2(\theta) = \frac{A_{2,0}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_{2,j} \cdot \cos(j \cdot \theta) + B_{2,j} \cdot \sin(j \cdot \theta)),$$

где $A_{n,j}, B_{n,j} (n = \overline{1,2}, j = \overline{1,\infty})$ – вещественные коэффициенты рядов Фурье, для которых выполнено:

$$A_{n,j} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(\theta) \cdot \cos(j \cdot \theta) d\theta \quad (n = \overline{1,2}, j = \overline{0,\infty}), \quad (12)$$

$$B_{n,j} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(\theta) \cdot \sin(j \cdot \theta) d\theta \quad (n = \overline{1,2}, j = \overline{1,\infty}).$$

Тогда, подставляя (11) в (9), с учетом (10), можно получить условия самоуравновешивания обеих нагрузок, действующих на внутренней и внешней поверхностях кольца. Используя известное свойство ортогональности тригонометрических функций, с учетом (11) и (12), условие (10) можно переписать в виде:

$$A_{1,1} = B_{1,1} = 0, \quad A_{2,1} = B_{2,1} = 0. \quad (13)$$

Решение первой основной задачи для упругого изотропного кольца с произвольными самоуравновешиваемыми распределениями давлений, заданными на его границах в виде рядов Фурье

Подставляя (10) в (6), можно получить:

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_{1,k} \cdot z^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_{2,k}}{z^{k+1}}, \\ \varphi''(z) &= \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot a_{1,k} \cdot z^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{a_{2,k}}{z^{k+2}}, \\ \psi'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,k} \cdot k \cdot z^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_{2,k}}{z^{k+1}}, \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (5), получаем выражение нормального радиального и касательного напряжений, действующих в кольце, с использованием разложений в ряд:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_{1,k} \cdot z^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_{2,k}}{z^{k+1}} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \overline{a_{1,k}} \cdot \overline{z}^{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_{2,k}}}{\overline{z}^{k+1}} - \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot a_{1,k} \cdot z^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{a_{2,k}}{z^{k+1}} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,k} \cdot k \cdot \frac{z^k}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_{2,k}}{z \cdot z^k}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляем в (15) выражение $z = r \cdot e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_{1,k} \cdot r^{k-1} \cdot e^{i(k-1)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_{2,k}}{r^{k+1}} \cdot e^{-i(k+1)\theta} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \overline{a_{1,k}} \cdot r^{k-1} \cdot e^{-i(k-1)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_{2,k}}}{r^{k+1}} \cdot e^{i(k+1)\theta} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot a_{1,k} \cdot r^{k-1} \cdot e^{i(k-1)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{a_{2,k}}{r^{k+1}} e^{-i(k+1)\theta} - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot b_{1,k} \cdot r^{k-1} \cdot e^{i(k+1)\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_{2,k}}{r^{k+1}} e^{-i(k-1)\theta}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Задавая последовательно два значения r ($r = R_1$ и $r = R_2$) в (16), получаем значение $\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta}$ на обеих границах с учетом краевых условий:

$$\begin{aligned}
 -p_{n,n=1,2}(\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_{1,k} \cdot R_n^{k-1} \cdot e^{i(k-1)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_{2,k}}{R_n^{k+1}} \cdot e^{-i(k+1)\theta} + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \overline{a_{1,k}} \cdot R_n^{k-1} \cdot e^{-i(k-1)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_{2,k}}}{R_n^{k+1}} e^{i(k+1)\theta} - \\
 &- \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot a_{1,k} \cdot R_n^{k-1} \cdot e^{i(k-1)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{a_{2,k}}{R_n^{k+1}} e^{-i(k+1)\theta} - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot b_{1,k} \cdot R_n^{k-1} \cdot e^{i(k+1)\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_{2,k}}{R_n^{k+1}} e^{-i(k-1)\theta}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Разделяя вещественную и мнимую части в (17), получаем очевидные уравнения:

$$\begin{aligned}
 -p_{n,n=1,2}(\theta) &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Re}(a_{1,k} \cdot e^{i(k-1)\theta}) - \\
 &- 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,k} \cdot e^{-i(k+1)\theta}) - \\
 &- \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Re}(a_{1,k} \cdot e^{i(k-1)\theta}) - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,k} \cdot e^{-i(k+1)\theta}) - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Re}(b_{1,k} \cdot e^{i(k+1)\theta}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,k} \cdot e^{-i(k-1)\theta}), \\
 0 &= - \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Im}(a_{1,k} \cdot e^{i(k-1)\theta}) - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,k} \cdot e^{-i(k+1)\theta}) - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Im}(b_{1,k} \cdot e^{i(k+1)\theta}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,k} \cdot e^{-i(k-1)\theta}).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Используя очевидные подстановки $a_{n,k} = \operatorname{Re}(a_{n,k}) + i \cdot \operatorname{Im}(a_{n,k})$, $b_{n,k} = \operatorname{Re}(b_{n,k}) + i \cdot \operatorname{Im}(b_{n,k})$ и $e^{i \cdot m \cdot \theta} = \cos(m \cdot \theta) + i \cdot \sin(m \cdot \theta)$ в (18) и (11) для левой части (18), можно получить две вещественные системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{A_{n,0}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_{n,j} \cdot \cos(j \cdot \theta) + B_{n,j} \cdot \sin(j \cdot \theta)) \right)_{n,n=1,2} = \\
 & = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot R_n^{k-1} \cdot (\operatorname{Re}(a_{1,k}) \cdot \cos((k-1) \cdot \theta) - \operatorname{Im}(a_{1,k}) \cdot \sin((k-1) \cdot \theta)) - \\
 & - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_n^{k+1}} \cdot (\operatorname{Re}(a_{2,k}) \cdot \cos((k+1) \cdot \theta) + \operatorname{Im}(a_{2,k}) \cdot \sin((k+1) \cdot \theta)) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot R_n^{k-1} \cdot (\operatorname{Re}(a_{1,k}) \cdot \cos((k-1) \cdot \theta) - \operatorname{Im}(a_{1,k}) \cdot \sin((k-1) \cdot \theta)) - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_n^{k+1}} \cdot (\operatorname{Re}(a_{2,k}) \cdot \cos((k+1) \cdot \theta) + \operatorname{Im}(a_{2,k}) \cdot \sin((k+1) \cdot \theta)) - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot R_n^{k-1} \cdot (\operatorname{Re}(b_{1,k}) \cdot \cos((k+1) \cdot \theta) - \operatorname{Im}(b_{1,k}) \cdot \sin((k+1) \cdot \theta)) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_n^{k+1}} \cdot (\operatorname{Re}(b_{2,k}) \cdot \cos((k-1) \cdot \theta) + \operatorname{Im}(b_{2,k}) \cdot \sin((k-1) \cdot \theta)),
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & - \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot R_n^{k-1} \cdot (\operatorname{Re}(a_{1,k}) \cdot \sin((k-1) \cdot \theta) + \operatorname{Im}(a_{1,k}) \cdot \cos((k-1) \cdot \theta)) - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_n^{k+1}} \cdot (-\operatorname{Re}(a_{2,k}) \cdot \sin((k+1) \cdot \theta) + \operatorname{Im}(a_{2,k}) \cdot \cos((k+1) \cdot \theta)) - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot R_n^{k-1} \cdot (\operatorname{Re}(b_{1,k}) \cdot \sin((k+1) \cdot \theta) + \operatorname{Im}(b_{1,k}) \cdot \cos((k+1) \cdot \theta)) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_n^{k+1}} \cdot (-\operatorname{Re}(b_{2,k}) \cdot \sin((k-1) \cdot \theta) + \operatorname{Im}(b_{2,k}) \cdot \cos((k-1) \cdot \theta)).
 \end{aligned}$$

Разделяем уравнения (19) для коэффициентов при $\cos(m \cdot \theta)$ и $\sin(m \cdot \theta)$ отдельно для вещественной и мнимой частей:

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{A_{n,0}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_{n,j} \cdot \cos(j \cdot \theta) \right)_{n,n=\overline{1,2}} = \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \cdot k \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Re}(a_{1,k}) + \frac{k}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,k}) \right) \cdot \cos((k-1) \cdot \theta) - \\
 & - \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Re}(a_{1,k}) \cdot \cos((k-1) \cdot \theta) - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k+3) \cdot k}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,k}) + k \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Re}(b_{1,k}) \right) \cdot \cos((k+1) \cdot \theta), \\
 & - \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_{n,j} \cdot \sin(j \cdot \theta) \right)_{n,n=\overline{1,2}} = \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,k}) - 2 \cdot k \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Im}(a_{1,k}) \right) \cdot \sin((k-1) \cdot \theta) + \\
 & + \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Im}(a_{1,k}) \cdot \sin((k-1) \cdot \theta) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Im}(b_{1,k}) - \frac{(k+3) \cdot k}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,k}) \right) \cdot \sin((k+1) \cdot \theta),
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= -\sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Im}(a_{1,k}) \cdot \cos((k-1) \cdot \theta) - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k+1)}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,k}) + k \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Im}(b_{1,k}) \right) \cdot \cos((k+1) \cdot \theta) + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,k}) \cdot \cos((k-1) \cdot \theta). \\
 0 &= -\sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Re}(a_{1,k}) \cdot \sin((k-1) \cdot \theta) + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k+1)}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,k}) - k \cdot R_n^{k-1} \cdot \operatorname{Re}(b_{1,k}) \right) \cdot \sin((k+1) \cdot \theta) - \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_n^{k+1}} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,k}) \cdot \sin((k-1) \cdot \theta).
 \end{aligned}$$

Выделяя уравнения для коэффициентов при одинаковых $\cos(m \cdot \theta)$ и $\sin(m \cdot \theta)$ в (20), получаем систему уравнений (ограничимся несколькими первыми слагаемыми в (6), то есть $a_{1,k(k=5,\infty)} = a_{2,k(k=3,\infty)} = 0$, $b_{1,k(k=3,\infty)} = b_{2,k(k=5,\infty)} = 0$):

Полагая $j = 0$ в левой части первого и второго уравнений (20), определим вещественные части коэффициентов $a_{1,1}$ и $b_{2,1}$:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \operatorname{Re}(a_{1,1}) + \frac{1}{R_1^2} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,1}) &= -\frac{A_{1,0}}{2}, \\
 2 \cdot \operatorname{Re}(a_{1,1}) + \frac{1}{R_2^2} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,1}) &= -\frac{A_{2,0}}{2}, \\
 \operatorname{Im}(a_{1,1}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Из третьего уравнения (20):

$$\operatorname{Im}(b_{2,1}) = 0. \tag{22}$$

Полагая $j = 1$ в левой части первого и второго уравнений (20), получаем систему для определения вещественной части $a_{1,2}$, а также вещественной и мнимой части $b_{2,2}$ для тригонометрических функций аргумента θ , учитывая условие самоуравновешенности нагрузки на внутренней и внешней границе кольца (13):

$$\begin{aligned}
 2 \cdot R_n \cdot \operatorname{Re}(a_{1,2}) + \frac{2}{R_n^3} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,2}) &= -A_{n,1} = 0, \\
 -2 \cdot R_n \cdot \operatorname{Im}(a_{1,2}) + \frac{2}{R_n^3} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,2}) &= -B_{n,1} = 0.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Из третьего и четвертого уравнения (20) дополнительно получаем для тригонометрических функций аргумента θ :

$$\begin{aligned}
 -2 \cdot R_n \cdot \operatorname{Im}(a_{1,2}) + \frac{2}{R_n^3} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,2}) &= 0, \\
 -2 \cdot R_n \cdot \operatorname{Re}(a_{1,2}) - \frac{2}{R_n^3} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,2}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Полагая $j = 2$ в левой части первого и второго уравнений (20), получаем систему для тригонометрических функций аргумента $2 \cdot \theta$:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{R_n^2} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,1}) - \operatorname{Re}(b_{1,1}) + \frac{3}{R_n^4} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,3}) &= -A_{n,2}, \\ -\frac{4}{R_n^2} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,1}) + \operatorname{Im}(b_{1,1}) + \frac{3}{R_n^4} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,3}) &= -B_{n,2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из третьего и четвертого уравнений (20) дополнительно получаем для тригонометрических функций аргумента $2 \cdot \theta$:

$$\begin{aligned} -6 \cdot R_n^2 \cdot \operatorname{Im}(a_{1,3}) - \frac{2}{R_n^2} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,1}) - \operatorname{Im}(b_{1,1}) + \frac{3}{R_n^4} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,3}) &= 0, \\ -6 \cdot R_n^2 \cdot \operatorname{Re}(a_{1,3}) + \frac{2}{R_n^2} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,1}) - \operatorname{Re}(b_{1,1}) - \frac{3}{R_n^4} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,3}) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Полагая $j = 3$ в левой части первого и второго уравнений (20), получаем систему для тригонометрических функций аргумента $3 \cdot \theta$:

$$\begin{aligned} -4 \cdot R_n^3 \cdot \operatorname{Re}(a_{1,4}) - \frac{10}{R_n^3} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,2}) - 2 \cdot R_n \cdot \operatorname{Re}(b_{1,2}) + \frac{4}{R_n^5} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,4}) &= -A_{n,3}, \\ 4 \cdot R_n^3 \cdot \operatorname{Im}(a_{1,4}) - \frac{10}{R_n^3} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,2}) + 2 \cdot R_n \cdot \operatorname{Im}(b_{1,2}) + \frac{4}{R_n^5} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,4}) &= -B_{n,3}. \end{aligned} \quad (27)$$

Из третьего и четвертого уравнений (20) дополнительно получаем для тригонометрических функций аргумента $3 \cdot \theta$:

$$\begin{aligned} -12 \cdot R_n^3 \cdot \operatorname{Im}(a_{1,4}) - \frac{6}{R_n^3} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,2}) - 2 \cdot R_n \cdot \operatorname{Im}(b_{1,2}) + \frac{4}{R_n^5} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,4}) &= 0, \\ -12 \cdot R_n^3 \cdot \operatorname{Re}(a_{1,4}) + \frac{6}{R_n^3} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,2}) - 2 \cdot R_n \cdot \operatorname{Re}(b_{1,2}) - \frac{4}{R_n^5} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,4}) &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Исходя из систем (21)–(28), следует, что, решив эти уравнения, можно получить выражение коэффициентов $a_{1,k(k=1,4)}$, $a_{2,k(k=1,2)}$, $b_{1,k(k=1,2)}$, $b_{2,k(k=1,4)}$ через коэффициенты двух рядов Фурье (11) в следующем виде

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \frac{A_{1,0} \cdot R_1^2 - A_{2,0} \cdot R_2^2}{4 \cdot (R_1^2 - R_2^2)}, \quad a_{1,2} = 0, \\ b_{2,1} &= \frac{(A_{1,0} - A_{2,0}) \cdot R_1^2 \cdot R_2^2}{2 \cdot (R_2^2 - R_1^2)}, \quad b_{2,2} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Система для определения вещественной части коэффициентов при тригонометрических функциях аргумента $2 \cdot \theta$:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{R_1^2} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,1}) - \operatorname{Re}(b_{1,1}) + \frac{3}{R_1^4} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,3}) &= -A_{1,2}, \\ -\frac{4}{R_2^2} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,1}) - \operatorname{Re}(b_{1,1}) + \frac{3}{R_2^4} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,3}) &= -A_{2,2}, \\ -6 \cdot R_1^2 \cdot \operatorname{Re}(a_{1,3}) + \frac{2}{R_1^2} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,1}) - \operatorname{Re}(b_{1,1}) - \frac{3}{R_1^4} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,3}) &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$-6 \cdot R_2^2 \cdot \operatorname{Re}(a_{1,3}) + \frac{2}{R_2^2} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,1}) - \operatorname{Re}(b_{1,1}) - \frac{3}{R_2^4} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,3}) = 0.$$

Система для определения мнимой части коэффициентов при тригонометрических функциях аргумента $2 \cdot \theta$:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{R_1^2} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,1}) + \operatorname{Im}(b_{1,1}) + \frac{3}{R_1^4} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,3}) &= -B_{1,2}, \\ -\frac{4}{R_2^2} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,1}) + \operatorname{Im}(b_{1,1}) + \frac{3}{R_2^4} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,3}) &= -B_{2,2}, \\ -6 \cdot R_1^2 \cdot \operatorname{Im}(a_{1,3}) - \frac{2}{R_1^2} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,1}) - \operatorname{Im}(b_{1,1}) + \frac{3}{R_1^4} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,3}) &= 0, \\ -6 \cdot R_2^2 \cdot \operatorname{Im}(a_{1,3}) - \frac{2}{R_2^2} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,1}) - \operatorname{Im}(b_{1,1}) + \frac{3}{R_2^4} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,3}) &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Система для определения вещественной части коэффициентов при тригонометрических функциях аргумента $3 \cdot \theta$:

$$\begin{aligned} -4 \cdot R_1^3 \cdot \operatorname{Re}(a_{1,4}) - \frac{10}{R_1^3} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,2}) - 2 \cdot R_1 \cdot \operatorname{Re}(b_{1,2}) + \frac{4}{R_1^5} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,4}) &= -A_{1,3}, \\ -4 \cdot R_2^3 \cdot \operatorname{Re}(a_{1,4}) - \frac{10}{R_2^3} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,2}) - 2 \cdot R_2 \cdot \operatorname{Re}(b_{1,2}) + \frac{4}{R_2^5} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,4}) &= -A_{2,3}, \\ -12 \cdot R_1^3 \cdot \operatorname{Re}(a_{1,4}) + \frac{6}{R_1^3} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,2}) - 2 \cdot R_1 \cdot \operatorname{Re}(b_{1,2}) - \frac{4}{R_1^5} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,4}) &= 0, \\ -12 \cdot R_2^3 \cdot \operatorname{Re}(a_{1,4}) + \frac{6}{R_2^3} \cdot \operatorname{Re}(a_{2,2}) - 2 \cdot R_2 \cdot \operatorname{Re}(b_{1,2}) - \frac{4}{R_2^5} \cdot \operatorname{Re}(b_{2,4}) &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Система для определения мнимой части коэффициентов при тригонометрических функциях аргумента $3 \cdot \theta$:

$$\begin{aligned} 4 \cdot R_1^3 \cdot \operatorname{Im}(a_{1,4}) - \frac{10}{R_1^3} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,2}) + 2 \cdot R_1 \cdot \operatorname{Im}(b_{1,2}) + \frac{4}{R_1^5} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,4}) &= -B_{1,3}, \\ 4 \cdot R_2^3 \cdot \operatorname{Im}(a_{1,4}) - \frac{10}{R_2^3} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,2}) + 2 \cdot R_2 \cdot \operatorname{Im}(b_{1,2}) + \frac{4}{R_2^5} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,4}) &= -B_{2,3}, \\ -12 \cdot R_1^3 \cdot \operatorname{Im}(a_{1,4}) - \frac{6}{R_1^3} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,2}) - 2 \cdot R_1 \cdot \operatorname{Im}(b_{1,2}) + \frac{4}{R_1^5} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,k}) &= 0, \\ -12 \cdot R_2^3 \cdot \operatorname{Im}(a_{1,4}) - \frac{6}{R_2^3} \cdot \operatorname{Im}(a_{2,2}) - 2 \cdot R_2 \cdot \operatorname{Im}(b_{1,2}) + \frac{4}{R_2^5} \cdot \operatorname{Im}(b_{2,k}) &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

При решении примера будем предполагать, что распределение нагрузки на внешней и внутренней границах кольца $p_{n,n=1,2}(\theta)$ (11) является четной функцией аргумента $\theta \in [-\pi, \pi]$, то есть $B_{n,j} = 0$ в (11), (31) и (33). Это условие приводит к тому, что все искомые коэффициенты $a_{1,k(k=1,4)}$, $a_{2,k(k=1,2)}$, $b_{1,k(k=1,2)}$, $b_{2,k(k=1,4)}$ являются вещественными числами и вычисляются с учетом (29) по формулам:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \frac{A_{1,0} \cdot R_1^2 - A_{2,0} \cdot R_2^2}{4 \cdot (R_1^2 - R_2^2)}, \\ a_{1,2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{1,3} &= \frac{3 \cdot R_1^2 \cdot R_2^2 \cdot (A_{2,2} - A_{1,2}) - A_{1,2} \cdot R_1^4 + A_{2,2} \cdot R_2^4}{6 \cdot (R_1^2 - R_2^2)^3}, \\
 a_{1,4} &= \frac{-5 \cdot A_{1,3} \cdot R_1^4 + 8 \cdot A_{2,3} \cdot R_1 \cdot R_2^3 - 3 \cdot A_{1,3} \cdot R_2^4}{8 \cdot (5 \cdot R_1^7 - 9 \cdot R_1^3 \cdot R_2^4 + 4 \cdot R_1 \cdot R_2^6)}, \\
 a_{2,1} &= (R_1^6 \cdot R_2^2 \cdot (A_{2,2} - 2 \cdot A_{1,2}) + R_1^4 \cdot R_2^4 \cdot (A_{2,2} - A_{1,2}) - \\
 &\quad - R_1^2 \cdot R_2^6 \cdot (A_{1,2} - 2A_{2,2})) / 2 \cdot (R_1^2 - R_2^2)^3, \\
 a_{2,2} &= \frac{R_1^3 \cdot R_2^3 \cdot (2 \cdot A_{2,3} \cdot R_1^3 + A_{1,3} \cdot R_2 \cdot (-3 \cdot R_1^2 + R_2^2))}{4 \cdot (5 \cdot R_1^6 - 9 \cdot R_1^2 \cdot R_2^4 + 4 \cdot R_2^6)}, \\
 b_{1,1} &= (R_1^4 \cdot R_2^2 \cdot (A_{1,2} - 2 \cdot A_{2,2}) + R_1^2 \cdot R_2^4 \cdot (2 \cdot A_{1,2} - A_{2,2}) + \\
 &\quad + A_{1,2} \cdot R_1^6 - A_{2,2} \cdot R_2^6) / (R_1^2 - R_2^2)^3, \\
 b_{1,2} &= \frac{3 \cdot (-6 \cdot A_{2,3} \cdot R_1^3 \cdot R_2^3 + A_{1,3} \cdot (5 \cdot R_1^6 + R_2^6))}{4 \cdot (5 \cdot R_1^7 - 9 \cdot R_1^3 \cdot R_2^4 + 4 \cdot R_1 \cdot R_2^6)}, \\
 b_{2,1} &= \frac{(A_{1,0} - A_{2,0}) \cdot R_1^2 \cdot R_2^2}{2 \cdot (R_2^2 - R_1^2)}, \\
 b_{2,2} &= 0, \\
 b_{2,3} &= \frac{R_1^4 \cdot R_2^4 \cdot (A_{2,2} \cdot (R_1^2 + 3 \cdot R_2^2) - A_{1,2} \cdot (3 \cdot R_1^2 + R_2^2))}{3 \cdot (R_1^2 - R_2^2)^3}, \\
 b_{2,4} &= 0.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Зададим распределение самоуравновешивающихся положительно определенных давлений на внешней и внутренней границах кольца с помощью отрезка ряда Фурье гипотрохи [1]:

$$p_1(\theta) = p_2(\theta) = P \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos((1+n) \cdot \theta)}, \tag{35}$$

где P – произвольный нормирующий множитель; n – целое число.

Коэффициенты $A_{1,j} = A_{2,j}$ ($j = \overline{0,3}$) вычисляются численно при подстановке конкретных значений P и n в (35), а затем полученного выражения в (12) (см. рис. 2).

Подставляя далее (34) в (14), с помощью (1), (2) и (5) можно получить распределение напряжений в кольце, а с помощью (3) – распределение перемещений в декартовой системе координат (см. рис. 3).

Выводы

Впервые поставлена и решена задача для упругого изотропного кольца под действием самоуравновешивающихся неоднородных нагрузок, действующих на его границах и представленных в виде отрезка ряда Фурье.

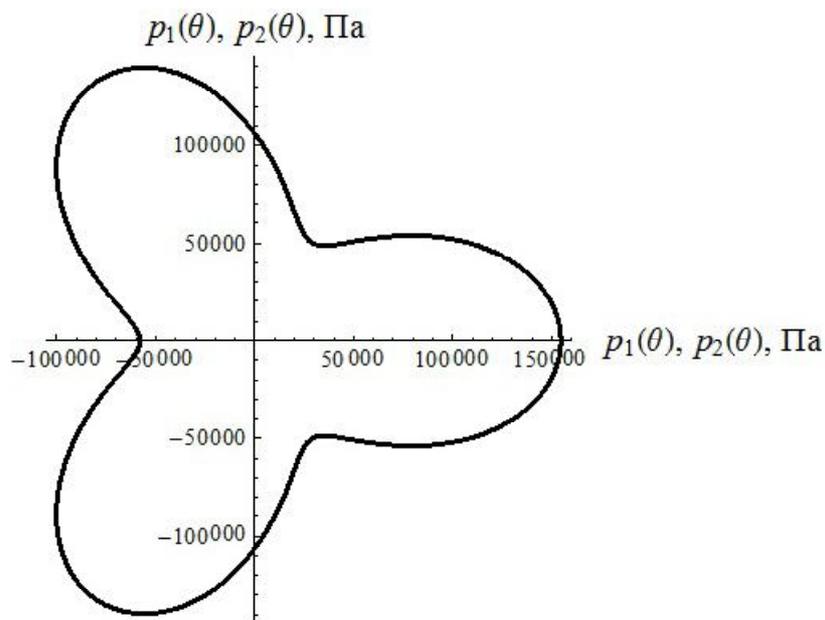


Рис. 2. Распределение приложенных к внутренней и внешней границе отверстия давлений приближенного в смысле отрезка ряда (11) для $j = \overline{0,3}$ с конкретными коэффициентами $A_{1,j} = A_{2,j}$, вычисленными с помощью (12) ($P = 10^5$ Па, $n = 2$)

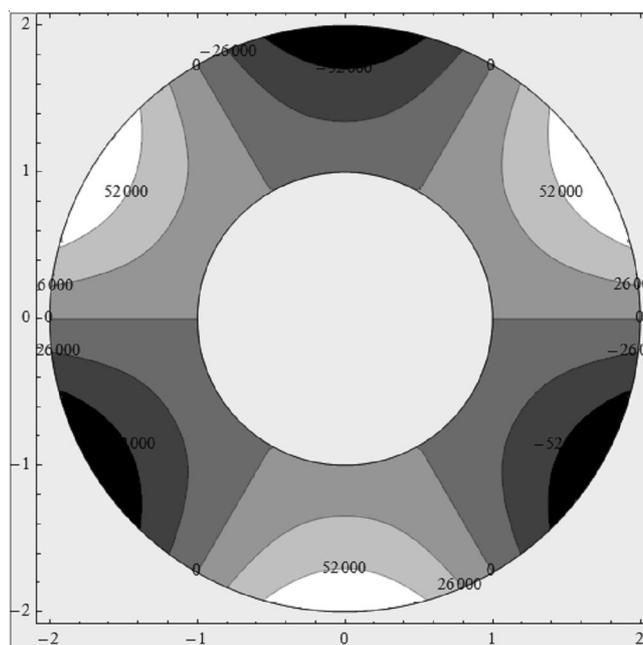


Рис. 3. Распределение касательных напряжений σ_{θ} в кольце ($R_1 = 1$, $R_2 = 2$, при заданных давлениях $p_1(\theta) = p_2(\theta)$ при $P = 10^5$ Па и $n = 2$ в (35) на внутренней и внешней границах)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амензаде, Ю. А. Теория упругости / Ю. А. Амензаде. – М. : Высш. шк., 1976. – 272 с.
2. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.

REFERENCES

1. Amenzade Y.A. *Teoriya uprugosti* [The Theory of Elasticity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1976. 272 p.
2. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 708 p.

**STRESS STATE OF ELASTIC THICK-WALLED RING
WITH SELF-BALANCED PRESSURES DISTRIBUTED
ON ITS INTERNAL AND EXTERNAL BORDERS**

Aleksandr Stepanovich Kravchuk

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Professor of Department of Bio- and Nanomechanics,
Belarusian State University
ask_Belarus@inbox.ru
Prosp. Nezavisimosti, 4, 220030 Minsk, Republic of Belarus

Anzhelika Ivanovna Kravchuk

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Web-technologies and Computer Modeling,
Belarusian State University
anzhelika.kravchuk@gmail.com
Prosp. Nezavisimosti, 4, 220030 Minsk, Republic of Belarus

Abstract. For the first time with the help of the theory of analytic functions and Kolosov-Muskhelishvili formulas the problem of the two-dimensional theory of elasticity for a thick-walled ring with the uneven pressures, acting on its borders, was solved. The pressure on the inner and outer boundaries is represented by Fourier series. The authors represent the two complex functions which solve boundary problem in the form of Laurent series. The logarithmic terms in these series are absent because the boundary problem has the self-balancing loads on each boundary of ring. The coefficients in the Laurent series are calculated by the boundary conditions. Firstly, the equations were obtained in the general form. But the hypothesis about even distributions of pressures at borders of ring was used for constructing an example. It leads to the fact that all coefficients of analytic functions represented in Laurent series have to be only real. As a solving example, the representation of pressures in equivalent hypotrochoids was used. The application of the computer algebra system Mathematica greatly simplifies the calculation of the distribution of stresses and displacements in ring. It does not require manual formal separation of real and imaginary parts in terms of Kolosov-Muskhelishvili to display the distribution of the physical parameters. It separates them only for calculated numbers with the help of built-in functions.

Key words: analytic functions, Kolosov-Muskhelishvili formulas, complex numbers, elastic thick-walled ring, uneven pressure.