www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.5.1

УДК 514.752.44+514.772
ББК (В)22.161.5

УРАВНЕНИЕ БЕЛЬТРАМИ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА И КОНФОРМНЫЕ МУЛЬТИСКЛАДКИ

Александр Николаевич Кондрашов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Задача построения теории уравнения Бельтрами переменного типа ставилась Л.И. Волковыским [5]. В работе [8] установлено, что решения уравнения Бельтрами переменного типа определенного строения ((A, B)-мультискладки) являются композицией конформной мультискладки и подходящего гомеоморфизма. При этом линии смены типа не могут быть произвольными, а лишь преобразуемыми указанным гомеоморфизмом в аналитические дуги. Поэтому понимание устройства конформных мультискладок является ключевым для понимания строения (A, B)-мультискладок. Основные результаты настоящей работы:

1) теорема об устранимости разрезов для конформных мультискладок, то есть теорема о возможности продолжения по непрерывности на область D с области $D_{\Gamma_0} = D \setminus \bigcup_{\gamma\in\Gamma_0} |\gamma|$, отличающейся от D на набор дуг Γ_0 из множества смены типа;

2) описание процесса построения конформных мультискладок по аналитическому заданию кривых смены типа.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами переменного типа, конформная мультискладка, черно-белое разбиение области, мультиобласть, продолжение по непрерывности.

1. Некоторые сведения об уравнениях Бельтрами переменного типа

Пусть в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ задано дифференциальное уравнение

$$A(z)f_z(z) + B(z)f_{\overline{z}}(z) = 0, \quad (z = x_1 + ix_2 \in D), \tag{1}$$

где $A(z)$, $B(z)$ ($|A(z)| \neq |B(z)|$ п. в. в D) — конечные измеримые комплекснозначные функции. В случае $A = \mu, B = -1$ уравнением (1) является *уравнение Бельтрами*

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z). \tag{2}$$

Уравнение Бельтрами с $|\mu(z)| < 1$ п. в. в D является *классическим* и хорошо изученным. Известно (см.: [3, гл. 2]), что при условии

$$\operatorname{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1 \text{ во всякой подобласти } D' \Subset D, \tag{3}$$

оно имеет гомеоморфное решение $w = f(z)$, принадлежащее классу $W^{1,2}_{\text{loc}}$ вместе с обратным. Это решение единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением.

Напомним [1, с. 7], что коэффициент $\mu(z) = f_{\overline{z}}(z)/f_z(z)$ называется *комплексной дилатацией* отображения $f(z)$, а условие (3) эквивалентно его локальной квазиконформности.

Случаи $|\mu(z)| < 1$ п. в. в D и $|\mu(z)| > 1$ п. в. в D отличаются тем, что в первом гомеоморфные отображения не меняют ориентацию, а во втором меняют. Различие здесь лишь формальное. Интерес представляет ситуация, когда одновременно существуют подобласти D, в которых п. в. выполнено $|\mu(z)| < 1$ и подобласти D, в которых п. в. $|\mu(z)| > 1$. В этом случае говорится, что уравнение Бельтрами имеет *переменный* тип. Его решения описывают отображения со складками, сборками и т. п. Задача исследования таких уравнений была поставлена Л.И. Волковыским [5], а ряд успехов в этом направлении были сделаны в работах Якубова и Сребро [12–14]. Следует отметить, что уравнение (1) впервые рассматривалось в работе [12]. В той же работе [12] было изучено строение отображений со сменой ориентации в окрестности критических точек, лежащих на линии смены типа. В частности, в этой работе было дано описание некоторых важных случаев таких точек — точек, в которых отображение является складкой, зонтиком или (p, q)-сборкой. Некоторые новые результаты по этой тематике получены нами в [7–9].

Пусть существует замкнутое относительно D множество $E \subset D$ меры $\text{mes}_2 E = 0$. Если непрерывная в D функция $f(z)$ является решением уравнения (1) в $D \setminus E$ [1], то функцию $f(z)$ будем называть *решением с особенностью* E данного уравнения.

Наличие особенностей у решений характерно для уравнений (1), *вырождающихся* на некотором множестве E, то есть таком E, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_r(z) \bigcap D} \big| |A(z)| - |B(z)| \big| = 0$$

для всякого $r > 0$, где $B_r(z)$ — круг с центром $z \in E$. При этом в качестве E часто выступает *множество смены типа* уравнения (1), то есть множество раздела между $\{z : z \in D, |A(z)| < |B(z)|\}$ и $\{z : z \in D, |A(z)| > |B(z)|\}$.

Для всякого множества $Q \subset \mathbb{C}$ его замыкание будет обозначаться через $[Q]$. Черта везде далее будет обозначать комплексное сопряжение или симметричное отражение относительно вещественной оси. В частности, через $\overline{Q}$ везде обозначается множество, получаемое из множества Q преобразованием симметрии $z \to \overline{z}$.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область. Пусть задано конечное семейство жордановых дуг Γ, разбивающих D на конечный набор подобластей $T(\Gamma) = \{D_i\}_{i=1}^{N}$. Дуги, входящие в семейство Γ, могут быть открытыми, замкнутыми [2] или полуоткрытыми, то есть взаимно-однозначными образами интервала, отрезка или полуинтервала.

Определение 1. *Пусть имеется полуоткрытая дуга γ, заданная непрерывным взаимно-однозначным отображением $z = z(t) : [a, b) \to \overline{\mathbb{C}}$. У нее определен конец при $t = a$ — точка $z(a)$, но не определен конец при $t = b$. В этом случае под концом понимается точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, определяемая равенством*

$$z_0 = \lim_{t \to b-0} z(t),$$

если такая точка существует. Точку $z(a)$ будем при этом называть собственным концом дуги γ, а точку z_0 — несобственным.

Аналогично определяются понятия несобственного конца полуоткрытой дуги γ вида $z = z(t) : (a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$ при $t = a$, а также несобственных концов открытой дуги $z = z(t) : (a, b) \to \overline{\mathbb{C}}$ при $t = a$ и $t = b$, если они существуют. Замкнутая дуга $z = z(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ имеет два собственных конца $z(a)$ и $z(b)$.

В дальнейшем договоримся обозначать через $\langle a, b \rangle$ любой промежуток вида (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ или $[a, b]$.

Носитель дуги γ будем в дальнейшем обозначать через $|\gamma|$.

Относительно дуг семейства Γ предполагаем следующее.

1) Всякая дуга из семейства Γ имеет ровно два конца, собственных или несобственных.

2) Разные дуги могут иметь общими разве лишь концевые точки.

3) Все конечные несобственные концы лежат на границе области ∂D. Какая-либо точка области D может быть разве лишь собственным концом некоторого четного набора дуг, в количестве не менее четырех (или, что тоже самое, быть общей граничной точкой не менее 4 областей D_i).

4) Среди замкнутых дуг $\gamma \in \Gamma$ нет вырождающихся в точку.

5) Каждая дуга без концевых точек является частью границы двух и только двух областей $\{D_i\}$.

В дальнейшем, говоря о концах рассматриваемых дуг, слова «собственный» и «несобственный» мы будем опускать, считая ясным из контекста, о концах какого вида идет речь.

Определение 2. *Разбиение $T(\Gamma) = \{D_i\}_{i=1}^{N}$ называется* правильным, *если оно допускает черно-белую раскраску, то есть такую раскраску, что любые две области D_i и D_j, имеющие общую невырожденную граничную дугу $\gamma \in \Gamma$, имели разные цвета* (см. рис. 1).

Очевидно, что в случае правильности разбиения $T(\Gamma)$ раскраска однозначно определяется указанием цвета любой из областей и существует только две возможные раскраски. В частности, можно считать, что раскраска $T(\Gamma)$ определяется приписыванием области D_1 белого цвета.

В дальнейшем, чтобы не усложнять обозначений, примем следующие договоренности:

1) поскольку речь будет исключительно о черно-белых раскрасках, то слова «черно-белая» будут опускаться;

2) будем отождествлять Γ с множеством точек в D, образованным точками всевозможных носителей этих кривых, входящих в это семейство, то есть с множеством $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} |\gamma|$;

3) договоримся считать, что всякий гомеоморфизм $f : D \to f(D)$ индуцирует в $f(D)$ разбиение $T(f^*\Gamma) = \{f(D_i)\}$, при этом раскраска $T(f^*\Gamma)$ сохраняется, если f сохраняет ориентацию, и меняется на другую, если ориентация меняется.

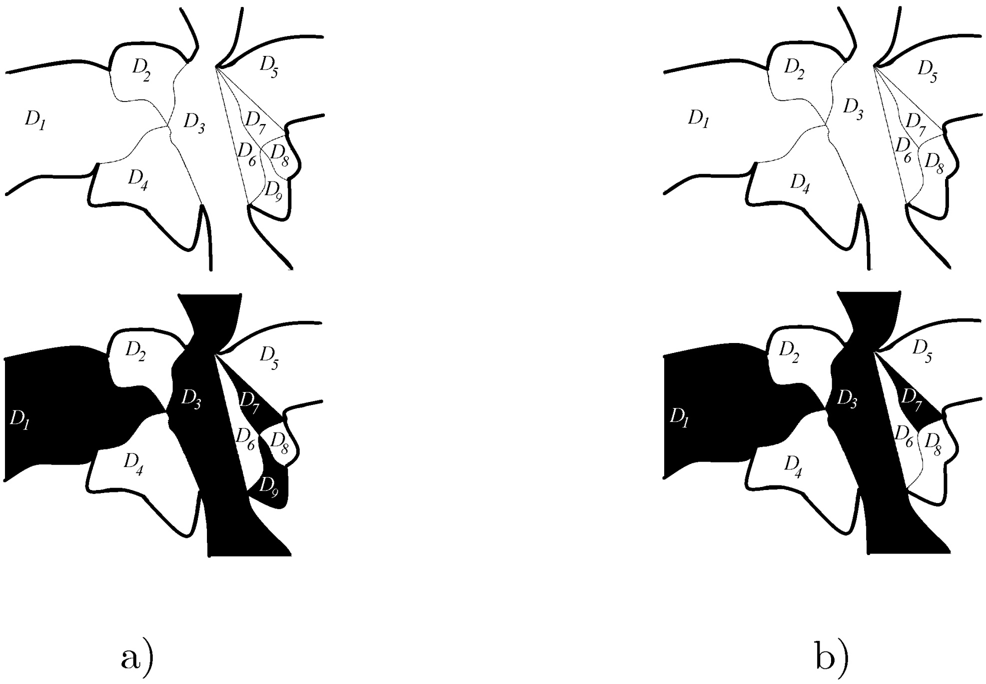

Рис. 1: a) — правильное разбиение; b) — неправильное разбиение

Напомним [10, гл. 2, § 3, п. 35], что дуга $\gamma \subset \mathbb{C}$, заданная в виде

$$z = f(t) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{C}, \quad f'(t) \neq 0,$$

где $f(t)$ — аналитическая по вещественному переменному t функция, называется *аналитической*.

Определение 3. *Пусть в области D с разбиением $T(\Gamma)$ с заданной раскраской определено уравнение (1), причем $|A(z)| \leq |B(z)|$ п.в. в белых областях D_i и $|A(z)| \geq |B(z)|$ п.в. в черных областях D_i. Предположим, что $f(z) : D \subset \mathbb{C} \to f(D) \subset \mathbb{C}$ решение с особенностью Γ этого уравнения и для него выполнены свойства:*

1) отображение f гомеоморфно в каждой из подобластей D_i и на каждой дуге $\gamma \in \Gamma$;

2) отображение f сохраняет ориентацию в каждой белой области и меняет в каждой черной области.

*Тогда будем называть отображение f (A, B)-*мультискладкой.

В случае когда отображение f является (A, B)-мультискладкой, критическими точками являются точки всех дуг, входящих в семейство Γ. В терминах степени отображения (см., например, [4]) (A, B)-мультискладки f можно охарактеризовать тем, что локальная степень отображения в этих точках равна $\deg(f, z) = 0$. В белых областях $\deg(f, z) = 1$, а в черных $\deg(f, z) = -1$.

Гомеоморфное отображение области $D \subset \mathbb{C}$, осуществляемое голоморфной функцией, будем называть, следуя [11, с. 92], *конформным отображением первого рода*, а осуществляемое антиголоморфной функцией, будем называть *конформным отображением* *второго рода*. Отметим, что голоморфность или антиголоморфность гомеоморфности не подразумевает.

Следуя [7], уравнению (1) поставим в соответствие классическое уравнение Бельтрами, называемое *уравнением, ассоциированным с уравнением* (1), с комплексной дилатацией

$$\mu^*(z) = \begin{cases} -A(z)/B(z) & \text{при } |A(z)| \leq |B(z)|, \\ -\overline{B(z)}/\overline{A(z)} & \text{при } |A(z)| > |B(z)|. \end{cases}$$

В [8] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что в области D с разбиением $T(\Gamma)$ и заданной черно-белой раскраской задана (A,B)-мультискладка $f(z) : D \to \mathbb{C}$. Предположим также, что существует $w = f_0(z) : D \to f_0(D)$ — гомеоморфное решение с особенностью Γ, уравнения ассоциированного с* (1). *Кроме того, предположим, что для всякого i выполнено $f_0^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f_0(D_i))$ и $f_i^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D_i))$, где f_i^{-1} ветвь многозначной функции f^{-1}, соответствующая D_i.*

Тогда:

1) *$f(f_0^{-1}(w))$ — конформное отображение первого рода всякой белой области $f_0(D_i)$ и конформное отображение второго рода всякой черной области $f_0(D_i)$;*

2) *дуги $f_0(\gamma)$ без концевых точек — аналитические.*

Данная теорема указывает на особую роль класса комплекснозначных функций, описываемых следующим определением.

Определение 4. *Отображение $w = f(z) : D \to \mathbb{C}$ называется конформной мультискладкой с правильным разбиением $T(\Gamma) = \{D_i\}$ области D и заданной черно-белой раскраской, если:*

1) дуги, входящие в семейство Γ — аналитичны, за исключением, быть может, концов;

2) на дугах $\gamma \subset \Gamma$ отображение $f : \gamma \to f(\gamma)$ — гомеоморфно;

3) в каждой белой области D_i отображение $w = f(z)$ является конформным первого рода, а в каждой черной области D_i отображение $w = f(z)$ является конформным второго рода.

Замечание 1. *Иначе говоря, конформные мультискладки — это мультискладки, являющиеся решениями уравнения Бельтрами*

$$\chi_B(z) f_z(z) + \chi_W(z) f_{\overline{z}}(z) = 0, \tag{4}$$

где $\chi_W(z)$ — характеристическая функция множества точек $z \in D$, окрашенных в белый цвет, а $\chi_B(z)$, соответственно, в черный.

Следствие теоремы 1. *При выполнении условий теоремы 1 (A,B)-мультискладка $f(z)$ представима в виде*

$$f(z) = \varphi(f_0(z)),$$

где φ — конформная мультискладка в $f_0(D)$ с разбиением $T(f_0^*\Gamma)$.

Из сказанного следует, что задача описания мультискладок сводится к задаче описания конформных мультискладок. Дальнейшая часть работы будет посвящена этому частному случаю.

2. Устранимость разрезов для конформных мультискладок

Отметим следующее свойство единственности, характеризующее всю совокупность конформных мультискладок с заданным разбиением с раскраской $T(\Gamma)$.

Теорема 2. *Пусть $w = f_1(z)$ и $\zeta = f_2(z)$ — конформные мультискладки области D с одним и тем же разбиением $T(\Gamma) = \{D_i\}$ с заданной раскраской. Тогда существует аналитическая функция $\varphi : f_1(D) \to f_2(D)$, такая, что*

$$f_2(z) = \varphi(f_1(z)).$$

Доказательство. См. [8, с. 32].

Заметим, что указанное в теореме φ является гомеоморфизмом между $f_1(D_i)$ и $f_2(D_i)$.

Предположим $\Gamma_0 \subset \Gamma$ — некоторое семейство дуг, для которого открытое множество

$$D_{\Gamma_0} = D \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} |\gamma|$$

есть область.

Разбиение $T(\Gamma)$ в D задает разбиение $T(\Gamma')$ в D_{Γ_0} на тот же набор областей $\{D_i\}$, но с другим семейством смежных дуг Γ'. Это разбиение является правильным, причем при проведении разрезов, очевидно, черно-белые раскраски разбиений $T(\Gamma)$ и $T(\Gamma')$ не меняются (то есть белые области остаются белыми, а черные — черными).

Семейство дуг Γ' получается из семейства Γ следующим образом. Из Γ удаляются дуги, входящие в Γ_0, а те дуги из Γ, которые не входят в Γ_0, но имеют общие собственные концы с некоторыми дугами, входящими в Γ_0, заменяются на соответствующие дуги без этих концов. Договоримся обозначать описанную операцию «разности» двух семейств Γ и Γ_0 через $\widetilde{\setminus}$, записывая, в частности, $\Gamma' = \Gamma \widetilde{\setminus} \Gamma_0$. Положим

$$\Sigma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} |\gamma|.$$

Предположим, что имеются две конформные мультискладки $w = f_1(z)$ в D с разбиением $T(\Gamma)$ и $\zeta = f_2(z)$ в D_{Γ_0} с разбиением $T(\Gamma')$ и одной и той же раскраской.

Из сказанного ясно, что так как $D_{\Gamma_0} \subset D$, то $f_1(z)$ также является мультискладкой в D_{Γ_0}.

В силу предыдущей теоремы можно записать равенство

$$f_2(z) = \varphi(f_1(z)), \; z \in D_{\Gamma_0}, \tag{5}$$

где $\zeta = \varphi(w)$, $w \in f_1(D_{\Gamma_0})$ — аналитическая функция. Если $z_0 \in \Sigma$, то определено значение $f_1(z_0)$, но, вообще говоря, не определено значение $f_2(z_0)$. Если бы $\varphi(w)$ была однозначным образом продолжима по непрерывности на $f_1(\Sigma)$, то и $f_2(z)$ была бы продолжима в z_0 по формуле

$$f_2(z_0) = \varphi(f_1(z_0)) \text{ при } z_0 \in \Sigma,$$

а функция $f_2(z)$ являлась бы мультискладкой в области D с разбиением $T(\Gamma)$.

При каких условиях можно утверждать, что $f_2(z)$ является мультискладкой в D?

Теорема 3 (Об устранимости разрезов). *Предположим, что выполняются следующие условия:*

(A1) *Функции* $f_k(z)$ $(k = 1, 2)$ *продолжаются аналитически* (*антианалитически*) *из каждой белой* (*черной*) *области* D_i *на область* $\Omega \supset [D]$ *и эти продолжения* $f_k^i(z)$ $(i = 1, \ldots, N)$ *являются гомеоморфизмами области* Ω.

(A2) $\bigcap_{i=1}^N f_1^i(\Omega) \supset [f_1(D)]$.

Тогда конформная мультискладка $f_2(z)$ *в* D_{Γ_0} *является также конформной мультискладкой в* D.

Доказательство. Введем обозначения $A^i = f_1^i(\Omega)$, $B^i = f_2^i(\Omega)$. Пусть G — компонента связности $\bigcap_{i=1}^N A^i = \bigcap_{i=1}^N f_1^i(\Omega)$, содержащая $[f_1(D)]$. В силу (A1) существуют конформные гомеоморфизмы

$$\varphi^1 : A^1 \to B^1, \ldots, \varphi^N : A^N \to B^N,$$

причем

$$f_2^i(z) = \varphi^i(f_1^i(z)),\ z \in \Omega.$$

Заметим, что каждый из гомеоморфизмов $\varphi^i(w)$ совпадает с некоторым другим гомеоморфизмом $\varphi^j(w)$ на некотором множестве $\Delta_{ij}^\gamma \subset f_1(D_i) \bigcap f_1(D_j)$, $(\gamma \subset \Gamma')$, описанном в доказательстве теоремы 2 (см.: [8, теорема 2, с. 32]). Поэтому в силу теоремы единственности для голоморфных функций $\varphi^i(w) \equiv \varphi^j(w)$ на компоненте связности $A^i \bigcap A^j$, содержащей $[f_1(D_i)]$. Отсюда следует, что все $\varphi^i(w)$ совпадают на G. Тем самым в G определена голоморфная функция $\Phi(w)$, такая что $\Phi(w) \equiv \varphi^i(w)$ при всех $i = 1, \ldots, N$. С другой стороны, так как $\varphi^i(w) \equiv \varphi(w)$ на $f_1(D_i)$ (φ из равенства (5)), то это означает, что $\Phi(w)$ является продолжением $\varphi(w)$ на некоторую окрестность G множества $[f_1(D)]$. При этом $\Phi(w)$ является гомеоморфным в G. Тогда (5) можно переписать в виде

$$f_2(z) = \Phi(f_1(z)),\ z \in D_{\Gamma_0}, \tag{6}$$

где $\zeta = \Phi(w)$, $w \in f_1(D_{\Gamma_0})$.

Если $z_0 \in \Sigma$, то при $z \to z_0$ имеем $f_1(z) \to f_1(z_0)$, а значит $f_2(z) = \Phi(f_1(z)) \to \to \Phi(f_1(z_0))$.

Это означает, что $f_2(z)$ продолжается из D_{Γ_0} на D однозначным образом и ее можно рассматривать как конформную мультискладку.

3. Граф разбиения

Пусть $T(\Gamma) = \{D_i\}$ — правильное разбиение области D с раскраской, производимое семейством аналитических дуг Γ. Структуру данного разбиения $T(\Gamma) = \{D_i\}$ можно представить с использованием понятия графа. Не вдаваясь в подробности, далее считаем известной терминологию теории графов (см. для ознакомления, например, [6]).

Данному разбиению поставим в соответствие граф $V(T(\Gamma), D)$ следующим образом. В каждой области D_i выберем по точке. Затем соединим отмеченные точки ребрами по количеству общих для каждой пары областей граничных дуг $\gamma \in \Gamma$.[3] Вершины получившегося графа будем также обозначать буквами D_i.

Определение 5. *Разбиение* $T(\Gamma)$ *будем называть древовидным, если его граф* $V(T(\Gamma), D)$ *есть дерево.*

В случае если граф $V(T(\Gamma), D)$ есть дерево, договоримся считать D_1 — корневой вершиной.

В общем случае разбиение может быть недревовидным, причем его граф может допускать наличие кратных ребер. Геометрически это означает наличие нескольких дуг, по которым области смежны.

Примеры древовидного и недревовидного разбиений с соответствующими графами показаны на рисунке 2.

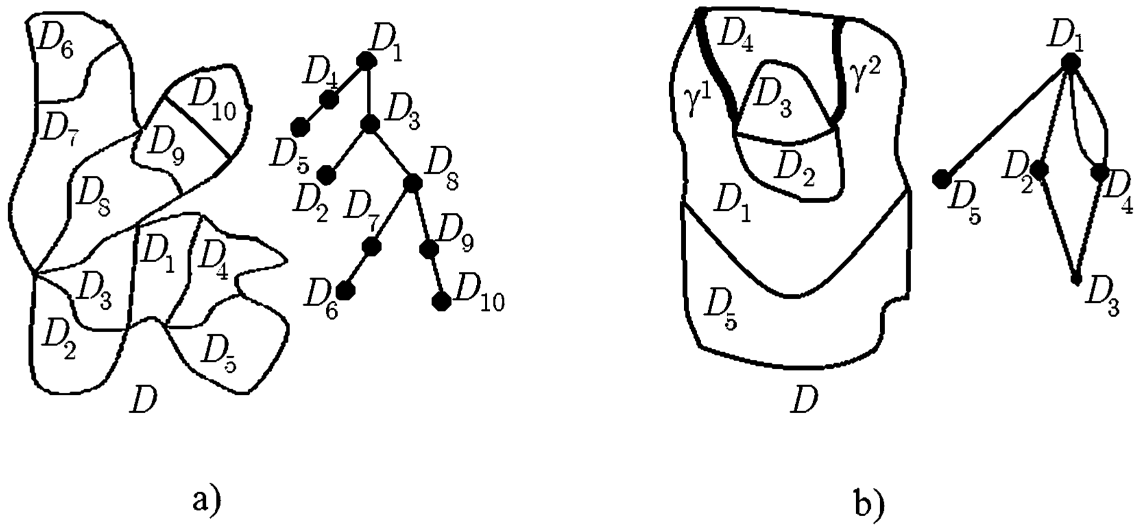

Рис. 2: a) – древовидное разбиение области D; b) – недревовидное разбиение области D, граф которого содержит кратные ребра, соответствующие дугам γ^1 и γ^2

Отметим, что в случае древовидного разбиения дуги, входящие в семейство Γ, могут иметь разве лишь несобственные концы.

4. Мультиобласти

4.1. Определение мультиобласти

Для дальнейших целей нам потребуется специальный случай *складчатых поверхностей* (см. [5]), который будем называть *мультиобластью*. Именно мультиобластью мы будем называть поверхность, полученную из конечного набора двумерных областей посредством *односторонней* склейки.

Дадим строгое описание этой конструкции.

Пусть имеется набор областей $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^{N}$ в $\mathbb{C}$, каждая область D_i имеет участки границы, являющиеся жордановыми дугами.

Определение 6. *Пусть области D_i допускают* одностороннюю *склейку по граничным жордановым дугам, образуя поверхность* (*новое* связное *топологическое пространство*), *в соответствии со следующими правилами.*

(K1) *Если области D_i и D_j склеены по наборам невырожденных жордановых дуг $\{\gamma_{ij}^s\}_{s=1}^{l_{ij}}$, $|\gamma_{ij}^s| \subset \partial D_i \bigcap \partial D_j$ $(i \neq j$, но $\gamma_{ij}^s = \gamma_{ji}^s$, $l_{ij} = l_{ji})$, то внутренние точки этих дуг не могут участвовать в склейке D_i с какой-либо областью, отличной* *от D_j, и области D_j с какой-либо областью, отличной от D_i*[4]*; области D_i и D_j локально лежат по одну сторону от любой из дуг γ_{ij}^s.*

(К2) *Любые пары областей D_i и D_j можно соединить цепочкой областей*

$$D_i, D_{s_1}, \ldots, D_{s_p}, D_j,$$

так что в указанной последовательности всякая пара последовательных областей является склеенной в смысле (К1).

(К3) *На областях D_i можно задать согласованную ориентацию: то есть, если две области D_i и D_j имеют общую граничную дугу γ_{ij}^s, то ориентации их различны.*

(К4) *Дуги γ_{ij}^s имеют два конца, собственных или несобственных. Вся совокупность дуг, имеющих общий собственный конец, может быть представлена последовательностью вида*

$$\gamma_{i_1 i_2}^{s_1}, \gamma_{i_2 i_3}^{s_2}, \ldots, \gamma_{i_k i_1}^{s_k},$$

где $k \geq 4$ — некоторое четное число, или являться совокупностью нескольких таких последовательностей. В последнем случае будет считаться, что имеется несколько экземпляров различных концов, относящихся к разным последовательностям этой совокупности.

Описанную склейку будем называть мультиобластью *и обозначать через* $\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma})$.

Замечание 2. Понятие склейки областей по граничным дугам, упомянутое в (К1), нуждается в пояснении. Из общей топологии ([2, с. 40—42]) известна конструкция склейки топологических пространств $\{X_\lambda\}_{\lambda \in L}$ по непрерывным отображениям $h_{\lambda\mu} : A_{\lambda\mu} \to A_{\mu\lambda}$, где $A_{\lambda\mu} \subset X_\lambda$, $A_{\mu\lambda} \subset X_\mu$. То есть должны быть заданы множества $A_{\lambda\mu} \subset X_\lambda$ и $A_{\mu\lambda} \subset X_\mu$, *по которым* осуществляется склейка каждой пары X_λ и X_μ и функция склейки $h_{\lambda\mu}$, позволяющая отождествлять точки $x \in A_{\lambda\mu} \subset X_\lambda$ и $h_{\lambda\mu}(x) \in A_{\mu\lambda} \subset X_\mu$. Значит говорить о склейке областей по граничным дугам (которые в области не входят!) не корректно. Договоримся понимать под склейкой областей $\{D_i\}_{i=1}^N$ по наборам дуг $\{\gamma_{ij}^s\}_{s=1}^{l_{ij}}$, $|\gamma_{ij}^s| \subset \partial D_i \bigcap \partial D_j$, $(i \neq j, i, j = 1, \ldots, N)$ топологическую склейку множеств

$$\tilde{D}_i = D_i \bigcup \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{s=1}^{l_{ij}} |\gamma_{ij}^s|,$$

наделенных топологией, индуцированной из $\mathbb{C}$, где склеивающими функциями являются

$$h_{ij}(z) = z : A_{ij} \to A_{ji}$$

с $A_{ij} = A_{ji} = \bigcup_{s=1}^{l_{ij}} |\gamma_{ij}^s|$, но при этом считается $A_{ij} \subset \tilde{D}_i$, $A_{ji} \subset \tilde{D}_j$.

Геометрически мультиобласть можно представлять как поверхность, склеенную из набора взаимно налегающих друг на друга кусков плоскости (и в плоскости расположенных!). Простейшей наглядной моделью мультиобласти может являться многократно перегнутый лист бумаги.

Обозначим через $\tilde{\Gamma} = \{\gamma_{ij}^s\}$ — набор всевозможных дуг, участвующих в описанном процессе склейки. (Здесь $i, j = 1, \ldots, N, (i \neq j)$, $s = 1, \ldots, l_{ij}$.) Пары областей D_i и D_j, описанные в (К1), называются в дальнейшем *непосредственно склеенными*, или *смежными* по дугам γ_{ij}^s.

В дальнейшем тривиальный случай одной области $\mathcal{D} = \{D\}$ и $\tilde{\Gamma} = \{\emptyset\}$ допускается. При этом считается $\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma}) = D$.

Множество

$$\operatorname{spt} \mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma}) = \bigcup_{i=1}^{N} D_i \bigcup \bigcup_{i,j,s} |\gamma_{ij}^s|$$

будем называть *носителем* мультиобласти $\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma})$.

Структуру мультиобласти $\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma})$, как и в случае разбиения области, можно охарактеризовать графом $G(\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma}))$, ставя каждой области D_i в соответствие вершину, обозначаемую той же буквой D_i и соединяя вершины, соответствующие непосредственно склеенным областям D_i и D_j, ребрами по числу дуг l_{ij}.

Мультиобласть называется *древовидной*, если ее граф — дерево. В этом случае все $l_{ij} = 1$.

4.2. Мультиобласти и мультискладки

Пусть имеется мультискладка $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$, согласованная с правильным разбиением $T(\Gamma)$ и фиксированной раскраской. Обозначим через $\Gamma = \{\gamma_{ij}^s\}$ набор жордановых дуг, осуществляющих данное разбиение, считая

$$\gamma_{ij}^s = \gamma_{ji}^s, \quad i, j = 1, \ldots, N, (i \neq j), \quad s = 1, \ldots, l_{ij},$$

где $l_{ij} = l_{ji}$ — число смежных участков областей D_i и D_j.

Данная мультискладка порождает мультиобласть $\mathcal{S}(\mathcal{D}', \tilde{\Gamma}')$, где $\mathcal{D}' = \{f(D_i)\}_{i=1}^N$, а

$$\tilde{\Gamma}' = \{f(\gamma_{ij}^s)\}, \quad i, j = 1, \ldots, N, (i \neq j), \quad s = 1, \ldots, l_{ij}.$$

При этом, очевидно, $\operatorname{spt} \mathcal{S}(\mathcal{D}', \tilde{\Gamma}') = f(D)$, а графы $V(T(\Gamma), D)$ и $G(\mathcal{S}(\mathcal{D}', \tilde{\Gamma}'))$ изоморфны (с соответствием вершин $D_i \longleftrightarrow f(D_i)$).

Введение понятия мультиобласти позволяет рассматривать мультискладку $f(z)$ как гомеоморфизм

$$f(z) : D \to \mathcal{S}(\mathcal{D}', \tilde{\Gamma}').$$

(Здесь известная аналогия с римановыми поверхностями, позволяющими рассматривать многозначные аналитические функции как однозначные.) При этом если в мультиобласти $\mathcal{S}(\mathcal{D}', \tilde{\Gamma}')$ задана ориентация, то будем называть мультискладку сохраняющей ориентацию, если белые области переходят в положительно ориентированные области $f(D_i)$, а черные — в отрицательно ориентированные области. В противном случае будем говорить, что ориентация не сохраняется.

5. Получение новых мультиобластей с помощью отображения

Пусть имеется древовидная мультиобласть $\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma})$ и вместе с ним:

1) жорданова дуга $\tilde{\gamma} \subset D_{i_0}$, делящая D_{i_0} на две подобласти $D_{i_0}^{(1)}$ и $D_{i_0}^{(2)}$, с несобственными концами, которые не являются внутренними точками какой-либо из дуг $\gamma_{i_0 j}^s$;
2) гомеоморфизм $\varphi : \operatorname{spt} \mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma}) \to \varphi(\operatorname{spt} \mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma})) \subset \mathbb{C}$, переводящий $\tilde{\gamma}$ в промежуток на оси абсцисс.

Обозначим набор дуг $\{\gamma^s_{i_0 j}\}$, $j = 1, \ldots, N, (j \neq i_0)$, $s = 1, \ldots, l_{i_0 j}$ через $\tilde{\Gamma}_{i_0}$, его поднабор дуг, которые являются граничными для $D^{(1)}_{i_0}$ и не являются граничными для $D^{(2)}_{i_0}$, обозначим через $\tilde{\Gamma}^{(1)}_{i_0}$, а через $\tilde{\Gamma}^{(2)}_{i_0} = \tilde{\Gamma}_{i_0} \setminus \tilde{\Gamma}^{(1)}_{i_0}$.

Рассмотрим два набора областей $\mathcal{D}^{(1)}_{i_0}$ и $\mathcal{D}^{(2)}_{i_0}$, построенных по следующим правилам.

К набору $\mathcal{D}^{(1)}_{i_0}$ отнесем $D^{(1)}_{i_0}$ и все области $\{D_j\}$ $(j \neq i_0)$, которые в $\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma})$ соединяются с D_{i_0} некоторой цепочкой последовательно непосредственно склеенных областей D_{i_0}, $D_{s_1}, \ldots, D_{s_p}$, D_j, причем склейка D_{i_0}, D_{s_1} осуществляется по некоторым дугам из $\tilde{\Gamma}^{(1)}_{i_0}$.

К набору $\mathcal{D}^{(2)}_{i_0}$ отнесем $D^{(2)}_{i_0}$ и все области $\{D_j\}$ $(j \neq i_0)$, которые в $\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma})$ соединяются с D_{i_0} некоторой цепочкой последовательно непосредственно склеенных областей D_{i_0}, $D_{s_1}, \ldots,$ D_{s_p}, D_j, причем склейка D_{i_0}, D_{s_1} осуществляется по некоторым дугам из $\tilde{\Gamma}^{(2)}_{i_0}$.

Другими словами, $\tilde{\gamma}$ делит $\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma})$ на две компоненты связности. К $\mathcal{D}^{(1)}_{i_0}$ отнесем $D^{(1)}_{i_0}$ и все $D_i \in \mathcal{D}$, которые лежат в той же компоненте связности, что и $D^{(1)}_{i_0}$. Аналогично можно определить и набор $\mathcal{D}^{(2)}_{i_0}$.

Пусть $\varphi(\mathcal{D}^{(1)}_{i_0})$ означает набор областей, включающий $\varphi(D^{(1)}_{i_0})$ и все области вида $\varphi(D_j)$, $j \neq i$, где $D_j \in \mathcal{D}^{(1)}_{i_0}$. Аналогичный смысл будут иметь обозначения $\varphi(\mathcal{D}^{(2)}_{i_0})$ и $\overline{\varphi(\mathcal{D}^{(2)}_{i_0})}$, а также $\varphi(\tilde{\Gamma}^{(1)}_{i_0})$, $\overline{\varphi(\tilde{\Gamma}^{(2)}_{i_0})}$.

Положим

$$\mathcal{D}' = \varphi(\mathcal{D}^{(1)}_{i_0}) \bigcup \overline{\varphi(\mathcal{D}^{(2)}_{i_0})}, \quad \tilde{\Gamma}' = \varphi(\tilde{\Gamma}^{(1)}_{i_0}) \bigcup \overline{\varphi(\tilde{\Gamma}^{(2)}_{i_0})} \bigcup \varphi(\tilde{\gamma}).$$

Склеим области $\varphi(D^{(1)}_{i_0})$ и $\overline{\varphi(D^{(2)}_{i_0})}$ по промежутку $\varphi(\tilde{\gamma}) \subset \{\operatorname{Im} w = 0\}$ в соответствии с «естественной» склейкой $D^{(1)}_{i_0}$ и $D^{(2)}_{i_0}$ по $\tilde{\gamma}$; области $\varphi(D_i)$ и $\varphi(D_j)$ $(i, j \neq i_0,$ $D_i, D_j \in \mathcal{D}^{(1)}_{i_0})$, а также области $\overline{\varphi(D_i)}$ и $\overline{\varphi(D_j)}$ $(i, j \neq i_0,\ D_i, D_j \in \mathcal{D}^{(2)}_{i_0})$ в соответствии со склейкой областей D_i и D_j в $\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma})$. Склеим $\varphi(D^{(1)}_{i_0})$ и $\varphi(D_j)$, $D_j \in \mathcal{D}^{(1)}_{i_0}$, а также $\overline{(\varphi(D^{(2)}_{i_0}))}$ и $\overline{(\varphi(D_j))}$, $D_j \in \mathcal{D}^{(2)}_{i_0}$, в соответствии со склейкой областей D_{i_0} и D_j в $\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma})$.

Тем самым будет получена новая мультиобласть $\mathcal{S}(\mathcal{D}', \tilde{\Gamma}')$. Об этой мультиобласти будем говорить, что она получена из мультиобласти $\mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma})$ в результате $(\varphi, \tilde{\gamma}, D^{(1)}_{i_0})$-перегибания. При этом также возникает гомеоморфное отображение

$$\Phi : \mathcal{S}(\mathcal{D}, \tilde{\Gamma}) \to \mathcal{S}(\mathcal{D}', \tilde{\Gamma}'),$$

действующее в D_i по формуле

$$\Phi(z) = \begin{cases} \varphi(z), & z \in D_i,\ D_i \in \mathcal{D}^{(1)}_{i_0} \ \text{ или } \ z \in D^{(1)}_{i_0} \\ \overline{\varphi(z)}, & z \in D_i,\ D_i \in \mathcal{D}^{(2)}_{i_0} \ \text{ или } \ z \in D^{(2)}_{i_0}. \end{cases} \tag{7}$$

Будем говорить, что Φ индуцировано $(\varphi, \tilde{\gamma}, D^{(1)}_{i_0})$-перегибанием.

Далее наряду с традиционным обозначением комплексного сопряжения в виде черты используем и не традиционное в виде $(\cdot)^{[\sigma]}$, полагая

$$(\cdot)^{[\sigma]} = \begin{cases} (\cdot) & \text{если } \sigma = 0, \\ \overline{(\cdot)} & \text{если } \sigma = 1. \end{cases}$$

При этом будет верно соотношение

$$((\cdot)^{[\sigma]})^{[\delta]} = (\cdot)^{[\sigma+\delta]},$$

если сумму в скобках понимать по модулю 2.

С учетом введенного обозначения (7) локально может быть записано

$$\Phi(z) = \varphi^{[\sigma]}(z), \quad (\text{считается } \varphi^{[\sigma]}(z) = (\varphi(z))^{[\sigma]}),$$

подразумевая, что σ выбирается в зависимости от того, к какому из наборов $D_{i_0}^{(1)}$, $D_{i_0}^{(2)}$ относится область, содержащая z.

6. Построение конформных мультискладок с заданной разметкой

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, $T(\Gamma) = \{D_i\}_{i=1}^N$ — ее правильное разбиение, осуществляемое семейством аналитических дуг $\Gamma = \{\gamma_{ij}^s\}$, $i, j = 1, \dots, N, (i \neq j)$, $s = 1, \dots, l_{ij}$. (Раскраска задана приписыванием белого цвета области D_1.) Число дуг, входящих в семейство Γ, обозначим через P.

Пусть дуги γ_{ij}^s заданы взаимно-однозначными отображениями

$$z = \psi_{ij}^s(t_{ij}^s) : \langle \alpha_{ij}^s, \beta_{ij}^s \rangle \to \mathbb{C}. \tag{8}$$

Всюду далее предполагаем, что отображения (8) имеют аналитическое продолжение

$$z = \psi_{ij}^s(w_{ij}^s) : \mathcal{O}_{ij}^s \to \psi_{ij}^s(\mathcal{O}_{ij}^s) \subset \mathbb{C} \quad (w_{ij}^s = t_{ij}^s + i\tau_{ij}^s), \tag{9}$$

с промежутка $\langle \alpha_{ij}^s, \beta_{ij}^s \rangle$ в некоторую достаточно большую окрестность $\mathcal{O}_{ij}^s$ его замыкания, в частности такую, что $\psi_{ij}^s(\mathcal{O}_{ij}^s) \supset \Omega \supset [D]$. Причем будем считать эту окрестность симметричной относительно вещественной оси, то есть $\mathcal{O}_{ij}^s = \overline{\mathcal{O}_{ij}^s}$. Кроме того, будем считать, что данное продолжение есть конформный гомеоморфизм $\mathcal{O}_{ij}^s$ на $\psi_{ij}^s(\mathcal{O}_{ij}^s)$.

Через φ_{ij}^s будем обозначать обратный к нему гомеоморфизм.

Функции ψ_{ij}^s и φ_{ij}^s будем называть основными.

Далее нам потребуется рассматривать различные суперпозиции, составленные из этих функций, и для корректности наших последующих рассмотрений будем накладывать дополнительное условие (A).

(A) Все суперпозиции вида

$$H(w_{i_kj_k}^{s_k}) = (\varphi_{i_1j_1}^{s_1})^{[\sigma_1]} \circ \psi_{i_2j_2}^{s_2} \circ (\varphi_{i_3j_3}^{s_3})^{[\sigma_2]} \circ \psi_{i_4j_4}^{s_4} \circ \dots \circ (\varphi_{i_{k-1}j_{k-1}}^{s_{k-1}})^{[\sigma_{\frac{k}{2}}]} \circ \psi_{i_kj_k}^{s_k}((w_{i_kj_k}^{s_k})^{[r]}),$$

длины $k \leq 2^P - 1$ определены на $\mathcal{O}_{i_kj_k}^{s_k}$ как конформные гомеоморфизмы первого рода или конформные гомеоморфизмы второго рода, причем

$$H(\mathcal{O}_{i_kj_k}^{s_k}) \supset \varphi_{i_1j_1}^{s_1}(\Omega) \bigcup \overline{\varphi_{i_1j_1}^{s_1}(\Omega)}, \quad H\left(\varphi_{i_kj_k}^{s_k}(\Omega) \bigcup \overline{\varphi_{i_kj_k}^{s_k}(\Omega)}\right) \subset \mathcal{O}_{i_1j_1}^{s_1}.$$

Замечание 3. Ниже мы объясним мотивировку ограничения $k \leq 2^P - 1$.

Замечание 4. Нетрудно видеть, что

1) $H(w^{s_k}_{i_kj_k})$ конформное отображение первого рода, если

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{\frac{k}{2}} + r \equiv 0 \mod 2$$

и второго рода, если

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{\frac{k}{2}} + r \equiv 1 \mod 2.$$

2) Функция $H(t^{s_k}_{i_kj_k})$ вещественно-аналитическая на промежутке $\langle \alpha^{s_k}_{i_kj_k}, \beta^{s_k}_{i_kj_k}\rangle$. Ее аналитическим продолжением в $\mathcal{O}^{s_k}_{i_kj_k}$ является $H(w^{s_k}_{i_kj_k})$, если это отображение является конформным первого рода и функция

$$H(\overline{w^{s_k}_{i_kj_k}}) = (\varphi^{s_1}_{i_1j_1})^{[\sigma_1]} \circ \psi^{s_2}_{i_2j_2} \circ (\varphi^{s_3}_{i_3j_3})^{[\sigma_2]} \circ \psi^{s_4}_{i_4j_4} \circ \dots \circ (\varphi^{s_{k-1}}_{i_{k-1}j_{k-1}})^{[\sigma_{\frac{k}{2}}]} \circ \psi^{s_k}_{i_kj_k}((w^{s_k}_{i_kj_k})^{[r+1]}),$$

если функция $H(w^{s_k}_{i_kj_k})$ является конформным отображением второго рода.

6.1. Древовидный случай

Так как $l_{ij} = 1$, то имеются только φ^1_{ij}. Перенумеруем их сплошным образом $\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \dots, \varphi_{(P)}$. В соответствии с этим порядком перенумеруем также все объекты, имеющие тройную нумерацию $(\cdot)^1_{ij}$. В частности, перенумеруем

— *обратные функции* ψ^1_{ij}, используя обозначения $\psi_{(1)}, \psi_{(2)}, \dots, \psi_{(P)}$;

— *дуги* γ^1_{ij}, используя обозначения $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_P$;

— *переменные* $w^1_{ij} = t^1_{ij} + i\tau^1_{ij}$, используя обозначения $w_{(1)} = t_{(1)} + i\tau_{(1)}, \dots, w_{(P)} = t_{(P)} + i\tau_{(P)}$;

— *области* $\mathcal{O}^1_{ij}$, используя обозначения $\mathcal{O}_{(1)}, \dots, \mathcal{O}_{(P)}$;

— *промежутки* $\langle \alpha^1_{ij}, \beta^1_{ij}\rangle$, используя обозначения $\langle \alpha_{(1)}, \beta_{(1)}\rangle, \dots, \langle \alpha_{(P)}, \beta_{(P)}\rangle$.

Обозначим через $\tilde{D}^+_1$ одну из двух подобластей, на которые разбивается область D кривой γ_1, которая содержит область D_1.

Применим $(\varphi_{(1)}, \gamma_1, \tilde{D}^+_1)$-перегибание к тривиальной мультиобласти $\mathcal{S}_0(\{D\}, \{\emptyset\})$, получая новую мультиобласть $\mathcal{S}_1(\mathcal{D}_1, \tilde{\Gamma}_1)$. Пусть $\Phi_1 : \mathcal{S}_0(\{D\}, \{\emptyset\}) \to \mathcal{S}_1(\mathcal{D}_1, \tilde{\Gamma}_1)$ — отображение, индуцированное этим перегибанием. Тогда заметим, что $\operatorname{spt} \mathcal{S}_1(\mathcal{D}_1, \tilde{\Gamma}_1) \subset \subset \mathcal{O}_{(1)}$.

Пусть $\gamma^{(1)}_2$ — образ дуги γ_2 при отображении Φ_1. Ясно, что эта дуга аналитическая. Она имеет представление

$$w_{(1)} = \Phi_1(\psi_{(2)}(t_{(2)}))$$

или в развернутом виде

$$w_{(1)} = \varphi^{[\sigma]}_{(1)} \circ \psi_{(2)}(t_{(2)}), \text{ где } \sigma = 0 \text{ или } \sigma = 1. \tag{10}$$

Обозначим через

$$\psi^1_{(2)}(w_{(2)}) = \varphi^{[\sigma]}_{(1)} \circ \psi_{(2)}(w^{[\sigma]}_{(2)})$$

аналитическое продолжение на $\mathcal{O}_{(2)}$ функции (10) и через

$$\varphi^1_{(2)}(w_{(1)}) = \varphi^{[\sigma]}_{(2)} \circ \psi_{(1)}(w^{[\sigma]}_{(1)})$$

— обратное к нему отображение.

Дуга $\gamma_2^{(1)}$ делит мультиобласть $\mathcal{S}_1(\mathcal{D}_1, \tilde{\Gamma}_1)$ на две компоненты связности. Пусть $\mathcal{S}_1^+$ — та из них, которая содержит $\Phi_1(D_1)$. Кроме того, она принадлежит некоторой области набора $\mathcal{D}_1$ и делито есть на две части; пусть $\tilde{D}_2^+$ — та из них, которая содержится в $\mathcal{S}_1^+$.

Теперь применим $(\varphi_{(2)}^1, \gamma_2^{(1)}, \tilde{D}_2^+)$-перегибание к мультиобласти $\mathcal{S}_1(\mathcal{D}_1, \tilde{\Gamma}_1)$. Получим новую мультиобласть $\mathcal{S}_2(\mathcal{D}_2, \tilde{\Gamma}_2)$, $(\operatorname{spt} \mathcal{S}_2(\mathcal{D}_2, \tilde{\Gamma}_2) \subset \mathcal{O}_{(2)})$ и гомеоморфизм

$$\Phi_2 : \mathcal{S}_1(\mathcal{D}_1, \tilde{\Gamma}_1) \to \mathcal{S}_2(\mathcal{D}_2, \tilde{\Gamma}_2),$$

индуцированный этим перегибанием. Заметим, что локально этот гомеоморфизм может быть записан в виде

$$\Phi_2(w_{(1)}) = (\varphi_{(2)}^1(w_{(1)}))^{[\delta_2]}.$$

Рассмотрим дугу $\gamma_3^{(2)}$ в $\mathcal{S}_2(\mathcal{D}_2, \tilde{\Gamma}_2)$, являющуюся образом дуги γ_3 при отображении $\Phi_2 \circ \Phi_1 : \mathcal{S}_0(\{D\}, \{\emptyset\}) \to \mathcal{S}_2(\mathcal{D}_2, \tilde{\Gamma}_2)$. Эта дуга, очевидно, задается представлением

$$w_{(2)} = \Phi_2 \circ \Phi_1(\psi_{(3)}(t_{(3)})),$$

имеющим развернутый вид (после переобозначений выражений, возникающих в квадратных скобках)

$$w_{(2)} = \varphi_{(2)}^{[\sigma_2]} \circ \psi_{(1)} \circ \varphi_{(1)}^{[\sigma_1]} \circ \psi_{(3)}(t_{(3)}).$$

Эта функция имеет аналитическое продолжение с промежутка $\langle \alpha_{(3)}, \beta_{(3)} \rangle$ на область $\mathcal{O}_{(3)}$, имеющее вид

$$w_{(2)} = \varphi_{(2)}^{[\sigma_2]} \circ \psi_{(1)} \circ \varphi_{(1)}^{[\sigma_1]} \circ \psi_{(3)}(w_{(3)}^{[r]}), \text{ где } \sigma_2 + \sigma_1 + r = 0 \mod 2.$$

Обозначим это продолжение $\psi_{(3)}^2$, а обратную к нему функцию $\varphi_{(3)}^2$. Обратная функция имеет вид

$$\varphi_{(3)}^2(w_{(2)}) = \varphi_{(3)}^{[r]} \circ \psi_{(1)} \circ \varphi_{(1)}^{[\sigma_1]} \circ \psi_{(2)}(w_{(2)}^{[\sigma_2]}).$$

Дуга $\gamma_3^{(2)}$ делит мультиобласть $\mathcal{S}_2(\mathcal{D}_2, \tilde{\Gamma}_2)$ на две компоненты связности. Обозначим через $\mathcal{S}_2^+$ ту из них, в которой лежит образ $\Phi_2 \circ \Phi_1(D_1)$. Эта же дуга целиком лежит в одной из областей набора $\mathcal{D}_2$ и делито есть на две подобласти. Обозначим через $\tilde{D}_3^+$ ту из подобластей, которая будет лежать в $\mathcal{S}_2^+$.

Применяя $(\varphi_{(3)}^2, \gamma_3^{(2)}, \tilde{D}_3^+)$-перегибание к мультиобласти $\mathcal{S}_2(\mathcal{D}_2, \tilde{\Gamma}_2)$, получим новую мультиобласть $\mathcal{S}_3(\mathcal{D}_3, \tilde{\Gamma}_3)$ и гомеоморфизм

$$\Phi_3 : \mathcal{S}_2(\mathcal{D}_2, \tilde{\Gamma}_2) \to \mathcal{S}_3(\mathcal{D}_3, \tilde{\Gamma}_3).$$

Локально этот гомеоморфизм может быть записан в виде

$$\Phi_3(w_{(2)}) = (\varphi_{(3)}^2(w_{(2)}))^{[\delta_3]}.$$

Применяя те же рассуждения к мультиобласти $\mathcal{S}_3(\mathcal{D}_3, \tilde{\Gamma}_3)$ и т. д., по индукции строим цепочку мультиобластей $\mathcal{S}_k(\mathcal{D}_k, \tilde{\Gamma}_k)$, $k = 1, 2, \ldots, P$ и последовательность гомеоморфизмов

$$\Phi_k : \mathcal{S}_{k-1}(\mathcal{D}_{k-1}, \tilde{\Gamma}_{k-1}) \to \mathcal{S}_k(\mathcal{D}_k, \tilde{\Gamma}_k) \; k = 1, 2, \ldots, P.$$

В общем случае, если n мультиобластей $\mathcal{S}_1(\mathcal{D}_1,\tilde{\Gamma}_1),\dots,\mathcal{S}_n(\mathcal{D}_n,\tilde{\Gamma}_n)$ и гомеоморфизмов

$$\mathcal{S}_0(\{D\},\{\emptyset\}) \xrightarrow{\Phi_1} \mathcal{S}_1(\mathcal{D}_1,\tilde{\Gamma}_1) \xrightarrow{\Phi_2} \mathcal{S}_2(\mathcal{D}_2,\tilde{\Gamma}_2) \xrightarrow{\Phi_3} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\Phi_{n-1}} \mathcal{S}_{n-1}(\mathcal{D}_{n-1},\tilde{\Gamma}_{n-1}) \xrightarrow{\Phi_n} \mathcal{S}_n(\mathcal{D}_n,\tilde{\Gamma}_n)$$

уже построено, то образуем новую мультиобласть $\mathcal{S}_{n+1}(\mathcal{D}_{n+1},\tilde{\Gamma}_{n+1})$ следующим образом.

Положим

$$\tilde{\Phi}_n = \Phi_n\circ\Phi_{n-1}\circ\cdots\circ\Phi_1 : \mathcal{S}_0(\{D\},\{\emptyset\}) \to \mathcal{S}_n(\mathcal{D}_n,\tilde{\Gamma}_n).$$

Тогда образ дуги γ_{n+1} в мультиобласти $\mathcal{S}_n(\mathcal{D}_n,\tilde{\Gamma}_n)$ дается представлением

$$w_{(n)} = \tilde{\Phi}_n(\psi_{(n+1)}(t_{(n+1)})). \tag{11}$$

Обозначим его через $\gamma^{(n)}_{n+1}$. Пусть $\psi^{(n)}_{n+1}(w_{(n+1)})$ — аналитическое продолжение отображения $\tilde{\Phi}_n\circ\psi_{(n+1)}(t_{(n+1)})$, а $\varphi^{(n)}_{n+1}(w_{(n)})$ — отображение, обратное к нему.

Дуга $\gamma^{(n)}_{n+1}$ принадлежит некоторой области из набора $\mathcal{D}_n$ и делито есть на две части Ω_1 и Ω_2. Эта же дуга делит всю мультиобласть $\mathcal{S}_n(\mathcal{D}_n,\tilde{\Gamma}_n)$ на две компоненты связности. Пусть $\mathcal{S}^+_n$ — та из них, которая содержит $\tilde{\Phi}_n(D_1)$. Обозначим через $\tilde{D}^+_n$ ту из областей Ω_1 или Ω_2, которая содержится в $\mathcal{S}^+_n$.

Применим $(\varphi^n_{(n+1)},\gamma^{(n)}_{n+1},\tilde{D}^+_n)$-перегибание к мультиобласти $\mathcal{S}_n(\mathcal{D}_n,\tilde{\Gamma}_n)$, получая новую мультиобласть $\mathcal{S}_{n+1}(\mathcal{D}_{n+1},\tilde{\Gamma}_{n+1})$ и гомеоморфизм

$$\Phi_{n+1} : \mathcal{S}_n(\mathcal{D}_n,\tilde{\Gamma}_n) \to \mathcal{S}_{n+1}(\mathcal{D}_{n+1},\tilde{\Gamma}_{n+1}),$$

индуцированный этим перегибанием.

Нетрудно видеть, что суперпозиции $\varphi_{(i)}$ и $\psi_{(j)}$, которые будут возникать в ходе описанных построений, будут иметь вид, описываемый условием (A), а само это условие будет гарантировать возможность взятия таких суперпозиций.

Отображение

$$\tilde{\Phi}_P(z) = \Phi_P\circ\Phi_{P-1}\circ\cdots\circ\Phi_1 : \mathcal{S}_0(\{D\},\{\emptyset\}) \to \mathcal{S}_P(\mathcal{D}_P,\tilde{\Gamma}_P)$$

есть конформная мультискладка с заданными разбиением $T(\Gamma)$ и раскраской, в которой D_1 окрашена в белый цвет.

Последний факт требует пояснения.

Введем обозначения:

$$D^n_i = \tilde{\Phi}_n(D_i),\quad D^0_i = D_i,\quad \gamma^n_k = \tilde{\Phi}_n(\gamma_k),$$

$i = 1,\dots,N$, $k = 1,\dots,P$.

Каждое отображение Φ_n представляет собой суперпозицию сохраняющего ориентацию конформного гомеоморфизма $\varphi^{n-1}_{(n)}$, примененного к мультиобласти $\mathcal{S}_{n-1}(\mathcal{D}_{n-1},\tilde{\Gamma}_{n-1})$, и последующей симметрией относительно вещественной оси, примененной к части образа этой мультиобласти, после чего и будет получена новая мультиобласть $\mathcal{S}_n(\mathcal{D}_n,\tilde{\Gamma}_n)$. Ясно, что на части мультиобласти $\mathcal{S}_{n-1}(\mathcal{D}_{n-1},\tilde{\Gamma}_{n-1})$, не затронутой симметрическим отражением при отображении Φ_n, ориентация сохраняется, а на затронутой меняется.

Пометим белые области разбиения $T(\Gamma)$ знаком «+», а черные знаком «−». Далее при каждом перегибании будем помечать области D_i^n следующим образом. Если D_i^{n-1} не затрагивается симметрическим отражением при отображении Φ_n, то D_i^n помечается тем же знаком, что и D_i^{n-1}. В противном случае знак меняется.

В результате каждого такого шага области $D_{i_1}^{n-1}$ и $D_{i_2}^{n-1}$, которые были смежными в мультиобласти $\mathcal{S}_{n-1}(\mathcal{D}_{n-1}, \tilde{\Gamma}_{n-1})$ по дуге γ_n^n и помеченные разными знаками, перейдут в области $D_{i_1}^n$ и $D_{i_2}^n$, которые будут смежными по дуге γ_n^{n+1} в мультиобласти $\mathcal{S}_n(\mathcal{D}_n, \tilde{\Gamma}_n)$ и помеченные одинаковыми знаками.

Одинаковость знаков двух смежных областей в мультиобласти $\mathcal{S}_n(\mathcal{D}_n, \tilde{\Gamma}_n)$ означает, что отображение $\tilde{\Phi}_n$ в одной из этих областей сохраняет ориентацию, а в другой меняет. При последующих перегибаниях это свойство будет сохраняться, поскольку они будут происходить по дугам, отличным от «потомков» дуги γ_n, а значит перегибания либо будут одновременно менять знаки, либо одновременно сохранять. После P шагов все области D_i^P будут помечены одинаковыми знаками. Но D_1^n на каждом шаге остается помеченным знаком «+». Поэтому все области D_i^P будут помечены тем же знаком, что и D_1^P, то есть знаком «+».

Последнее и означает, что отображение $\tilde{\Phi}_P(z)$ сохраняет ориентацию в белых областях разбиения $T(\Gamma)$ и меняет в черных.

6.2. Мотивировка ограничения $k \leq 2^{P+1} - 1$

Самая длинная суперпозиция $\varphi_{(i)}$ и $\psi_{(j)}$, которая возникла в наших выкладках, возникает в функции $\tilde{\Phi}_P(z)$.[5] Найдем длину этой суперпозиции.

Пусть h_n означает длину суперпозиции $\tilde{\Phi}_n(z)$. Для $n = 1$ видим $h_1 = 1$, поскольку $\tilde{\Phi}_1(z) = \Phi_1(z) = \varphi_{(1)}^{[\sigma]}$. Как изменяется h_n при переходе от n к $n+1$?

Имеем $\tilde{\Phi}_{n+1}(z) = \Phi_{n+1} \circ \tilde{\Phi}_n(z)$. Но Φ_{n+1} образуется с помощью $\varphi_{n+1}^{(n)}(w_{(n)})$, число элементов $\varphi_{(i)}$ и $\psi_{(j)}$ в котором на 1 больше, чем в $\tilde{\Phi}_n(z)$. Отсюда получаем $h_{n+1} = 2h_n + 1$. Имеем цепочку равенств

$$h_{n+1} = 2h_n + 1 = 2(2h_{n-1} + 1) + 1 = 2^2 h_{n-1} + 1 + 2 =$$
$$= 2^2(2h_{n-2} + 1) + 1 + 2 = 2^3 h_{n-2} + 1 + 2 + 2^2 = \ldots = 2^{k+1} h_{n-k} + 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k =$$
$$= 2^n h_1 + 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Отсюда $k \leq 2^{P+1} - 1$.

6.3. Недревовидный случай

Пусть, как и в предыдущем случае, $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, $T(\Gamma) = \{D_i\}_{i=1}^N$ — его правильное разбиение, осуществляемое семейством аналитических дуг

$$\Gamma = \{\gamma_{ij}^s\}, \quad i, j = 1, \ldots, N (i \neq j), \; s = 1, \ldots, l_{ij}.$$

(Раскраска задана приписыванием белого цвета области D_1.)

Граф $V(T(\Gamma), D)$ связен, но не предполагается деревом.

Заметим следующее. Если заменить область D областью D_{Γ_0}, полученной из нее добавлением разрезов, осуществляемых семейством дуг (возможно с добавлением концевых точек) $\Gamma_0 \subset \Gamma$, то исходное разбиение $T(\Gamma)$ порождает в D_{Γ_0} разбиение $T(\Gamma')$,

$\Gamma' = \Gamma \tilde{\setminus} \Gamma_0$. При этом ему отвечает граф $V(T(\Gamma'), D_{\Gamma_0})$, полученный из $V(T(\Gamma), D_\Gamma)$ удалением ребер, отвечающих дугам из Γ_0.

Ясно, что из любого связного графа всегда можно удалить ребра так, чтобы получилось дерево, связывающее все первоначальные вершины. Тем самым Γ_0 всегда можно выбрать так, чтобы разбиение $T(\Gamma')$ было древовидным.

Применим к D_{Γ_0} процедуру построения конформной мультискладки, описанной в п. 6.1, получая отображение $\Phi_{\Gamma_0}(z)$.

Теорема 4. *Предположим, что*

1) в области D существует конформная мультискладка $f(z)$ с разбиением $T(\Gamma)$, продолжаемая аналитически (антианалитически) из каждой белой (черной) области D_i на область $\Omega \supset [D]$, причем $\bigcap_{i=1}^{N} f^i(\Omega) \supset [f(D)]$, где f^i — данные продолжения;

2) представления (8) дуг, входящих в семейство $\Gamma = \{\gamma_{ij}^s\}$, удовлетворяют условию (A) с той же областью Ω.

Тогда $\Phi_{\Gamma_0}(z)$ также является конформной мультискладкой над D с разбиением $T(\Gamma)$, а всякая другая мультискладка $F(z)$ с тем же разбиением с раскраской $T(\Gamma)$ может быть задана в виде

$$F(z) = \varphi(\Phi_{\Gamma_0}(z)), \tag{12}$$

где φ — аналитическая функция, заданная в $\Phi_{\Gamma_0}(D)$.

Доказательство. Условия теоремы означают, что выполняются условия теоремы 3 с $f_1 = f(z)$ и $f_2 = \Phi_{\Gamma_0}(z)$. Представление (12) вытекает из теоремы 2.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] При этом не известна принадлежность $f \in W^{1,2}_{\text{loc}}(D)$.

[2] Напомним, что это не то же самое, что жорданова *кривая*. Жордановой кривой (замкнутой дугой) называется непрерывный взаимно-однозначный образ окружности S^1, или, другими словами, замкнутая дуга, у которой начало и конец совпадают.

[3] В графе допускаются кратные ребра.

[4] При этом возможно, что $|\gamma_{ij}^s| \bigcap |\gamma_{kl}^t| \neq \emptyset$ при $\{i,j\} \neq \{k,l\}$.

[5] Заметим, что сама эта функция не имеет вид суперпозиции H из условия (A), так как в ней последней всегда является $\varphi_{(1)}^{[\sigma]}(z)$. В остальном порядок входящих элементов соответствует требованиям, и для оценки максимальной длины суперпозиции ее можно использовать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белинский, П. П. Общие свойства квазиконформных отображений / П. П. Белинский. — Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1974. — 100 с.

2. Бурбаки, Н. Элементы математики. Общая топология. Основные структуры / Н. Бурбаки. — М. : Наука, 1968. — 272 с.

3. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 512 с.

4. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко. — М. : ГИФМЛ, 1963. — 245 с.

5. Волковыский, Л. И. Некоторые вопросы теории квазиконформных отображений / Л. И. Волковыский // Некоторые проблемы математики и механики (к семидесятилетию М.А. Лаврентьева). — Л. : Наука, 1970. — С. 128–134.

6. Дистель, Р. Теория графов / Р. Дистель. — Новосибирск : Изд-во ИМ СО РАН, 2002. — 241 с.

7. Кондрашов, А. Н. К теории вырождающихся уравнений Бельтрами переменного типа / А. Н. Кондрашов // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 6. — С. 1321–1337.

8. Кондрашов, А. Н. К теории уравнения Бельтрами переменного типа со многими складками / А. Н. Кондрашов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 2 (19). — С. 26–35.

9. Кондрашов, А. Н. Уравнения Бельтрами, вырождающиеся на дуге / А. Н. Кондрашов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — № 5 (24). — С. 24–39.

10. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : ГИФМЛ, 1958. — 678 с.

11. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. — М. : Наука, 1967. — Т. 1. — 488 с.

12. Srebro, U. Branched folded maps and alternating Beltrami equations / U. Srebro, E. Yakubov // Journal d'analyse mathematique. — 1996. — № 70. — P. 65–90.

13. Srebro, U. Uniformization of maps with folds / U. Srebro, E. Yakubov // Israel mathematical conference proceedings. — 1997. — № 11. — P. 229–232.

14. Srebro, U. μ-Homeomorphisms / U. Srebro, E. Yakubov // Contemporary Mathematics AMS. — 1997. — № 211. — P. 473–479.

REFERENCES

1. Belinskiy P.P. *Obshchie svoystva kvazikonformnykh otobrazheniy* [General Properties of Quasiconformal Mappings]. Novosibirsk, Nauka, Sib. otd-nie Publ., 1974. 100 p.

2. Burbaki N. *Elementy matematiki. Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury* [Elements of Mathematics. General Topology. Core Structures]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 272 p.

3. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.

4. Krasnoselskiy M.A., Perov A.I., Povolotskiy A.I., Zabreyko P.P. *Vektornye polya na ploskosti* [Plane Vector Fields]. Moscow, GIFML Publ., 1963. 245 p.

5. Volkovyskiĭ L.I. Nekotorye voprosy teorii kvazikonformnykh otobrazheniy [Some Problems of the Theory of Quasiconformal Mappings]. *Nekotorye problemy matematiki i mekhaniki (k semidesyatiletiyu M.A. Lavrentyeva)* [Some Problems of Mathematics and Mechanics (to the seventieth birthday of M. A. Lavrentyev)]. Leningrad, Nauka Publ., 1970, pp. 128-134.

6. Distel R. *Teoriya grafov* [Graph Theory]. Novosibirsk, Izd-vo IM SO RAN Publ., 2002. 241 p.

7. Kondrashov A.N. K teorii vyrozhdayushchikhsya uravneniy Beltrami peremennogo tipa [On the Theory of Degenerate Alternating Beltrami Equations]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2012, vol. 53, no. 6, pp. 1061-1074.

8. Kondrashov A.N. K teorii uravneniya Beltrami peremennogo tipa so mnogimi skladkami [On the Theory of Alternating Beltrami Equation with Many Folds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2013, no. 2 (19), pp. 26-35.

9. Kondrashov A.N. Uravneniya Beltrami, vyrozhdayushchiesya na duge [Beltrami Equations with Degenerate on Arcs]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 5 (24), pp. 24-39.

10. Lavrentyev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable]. Moscow, GIFML Publ., 1958. 678 p.

11. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskikh funktsiy* [Theory of Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1967, vol. 1. 488 p.

12. Srebro U., Yakubov E. Branched Folded Maps and Alternating Beltrami Equations. *Journal d'analyse mathematique*, 1996, no. 70, pp. 65-90.

13. Srebro U., Yakubov E. Uniformization of Maps with Folds. *Israel mathematical conference proceedings*, 1997, no. 11, pp. 229-232.

14. Srebro U., Yakubov E. μ-Homeomorphisms. *Contemporary Mathematics AMS*, 1997, no. 211, pp. 473-479.

ALTERNATING BELTRAMI EQUATION AND CONFORMAL MULTIFOLDS

Alexander Nikolaevich Kondrashov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The problem of the study of alternating Beltrami equation was posed by L.I. Volkovyskiĭ [5]. In [8] we proved that solutions of the alternating Beltrami equation of a certain structure ((A, B)-multifolds) are composition of conformal multifold and suitable homeomorphism. Thus, lines of change of orientation cannot be arbitrary, and only mapped by the specified homeomorphism in analytical arcs. Therefore, understanding of the structure of conformal multifolds is the key to understanding the structure of (A, B)-multifolds.

The main results of this work.

I. The theorem on removability of conformal multifolds cuts. This theorem is about the possibility of extending by continuity from the domain $D_{\Gamma_0} = D \setminus \setminus \bigcup_{\gamma\in\Gamma_0} |\gamma|$ to the whole domain D. Here Γ_0 is family of arcs which belong to the set change of type.

Theorem 3. *Suppose that conditions are hold.*

(A1) *Functions $f_k(z)$ $(k = 1, 2)$ are analytical (antianalytical) extended from each white (black) domain D_i to a domain $\Omega \supset [D]$ and these extensions $f_k^i(z)$ $(i = 1, \dots, N)$, are homeomorphisms of Ω.*

(A2) $\bigcap_{i=1}^{N} f_1^i(\Omega) \supset [f_1(D)]$.

Then the conformal multifold $f_2(z)$ in D_{Γ_0} is also conformal multifold in D.

II. Description of a process of constructing conformal multifolds on analytical arcs of change type.

Key words: alternating Beltrami equation, conformal multifold, black-white cut of domain, multidomain, continuous extending.