DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.5.2
УДК 517.95
ББК 22.161.6

АППРОКСИМАТИВНЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ [1]

Елена Алексеевна Мазепа

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
lmazepa@rambler.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Данная работа посвящена развитию аппроксимативного подхода к построению решения краевых задач для полулинейных уравнений эллиптического типа на произвольных некомпактных римановых многообразиях. Методика исследования, с одной стороны, существенным образом опирается на подход, основанный на введении классов эквивалентных на римановом многообразии функций и представленный, например, в ранних работах [5] и [6]. С другой стороны, она обобщает методику построения обобщенного решения задачи Дирихле для линейных эллиптических уравнений Лапласа — Бельтрами и Шредингера в ограниченных областях R^n и на произвольных некомпактных римановых многообразиях (см.: [2; 3, с. 237–240]).

Ключевые слова: полулинейные эллиптические уравнения, краевая задача, аппроксимативный подход, обобщенные решения, некомпактные римановы многообразия, задача Дирихле.

Введение

К настоящему времени существует несколько подходов к введению понятия обобщенного решения краевых задач. Один из них основан на методе гильбертова пространства и позволяет определить действие эллиптического оператора на значительно более широком классе функций, нежели класс C^2 (см., например, [10]).

Другой подход к построению обобщенного решения эллиптических уравнений берет свое начало в работах А. Пуанкаре конца XIX века. Созданный им метод разметания позволил рассматривать решения задачи Дирихле без каких-либо ограничений на области, в которых она решается, но оставаясь в классических предположениях относительно непрерывности граничных данных. Этот метод оказал сильное влияние на дальнейшее развитие теории решений краевых задач для эллиптических уравнений, его идеи нашли свое воплощение в работах О. Перрона, Ш.Ж. Валле Пуссена, М.В. Келдыша, А.А. Григорьяна и др.

Введем следующие обозначения. Пусть M — произвольное полное гладкое связное некомпактное риманово многообразие, $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — произвольные непрерывные ограниченные на M функции.

Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M и обозначать $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено

$$\lim_{k\to\infty} ||f_1(x) - f_2(x)||_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $||f(x)||_{C^0(G)} = \sup_G |f(x)|$.

Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$. Введенное отношение не зависит от выбора исчерпания многообразия M и характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$ (см., например, [5; 6; 9]).

Доказательство основных результатов опирается на принцип максимума, теоремы сравнения и единственности для решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений на предкомпактных подмножествах многообразия M. Их справедливость доказывается также как и для ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [1, с. 39–40]). Кроме того, в работе применяются аналогичные утверждения для решений квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений вида

$$Lu = g(x, u), \tag{1}$$

где L — линейный эллиптический оператор второго порядка, а функция $g(x, \xi)$ удовлетворяет следующим структурным требованиям:

1) $g(x, \xi) \in C^{\gamma}(\Omega \times \mathbb{R})$ для любого подмножества $\Omega \subset\subset M$, $0 < \gamma < 1$;
2) $g(x, 0) \equiv 0$;
3) $g(x, \xi_1) \geq g(x, \xi_2)$ для всех $\xi_1 > \xi_2$.

Подробные доказательства приведенных ниже утверждений можно найти в [8].

Предложение 1. (Принцип сравнения 1). *Пусть $\Omega \subset M$ — предкомпактное подмножество и u, $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ удовлетворяют в Ω неравенствам*

$$\Delta u \geq g(x, u), \qquad \Delta v \leq g(x, v)$$

и $u|_{\partial\Omega} \leq v|_{\partial\Omega}$. Тогда $u \leq v$ в Ω.

Предложение 2. (Принцип максимума). *Пусть $\Omega \subset M$ — предкомпактное подмножество и $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ удовлетворяет в Ω неравенству $\Delta u \geq g(x, u)$ ($\Delta u \leq g(x, u)$). Тогда*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

Если же $\Delta u = g(x, u)$ в Ω, то

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Предложение 3. (Принцип сравнения 2). *Пусть* $\Delta v \leq g(x,v)$, $\Delta u \geq g(x,u)$ *на* $M \setminus B$, $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $v \sim u$. *Тогда* $v \geq u$ *на* $M \setminus B$.

Пусть $\Delta v \leq g(x,v)$, $\Delta u \geq g(x,u)$ *на* M *и* $v \sim u$. *Тогда* $v \geq u$ *на* M.

Предложение 4. (Теорема единственности). *Пусть* $\Delta v = g(x,v)$ *и* $\Delta u = g(x,u)$ *на* $M \setminus B$ *и* $v|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $v \sim u$. *Тогда* $w = u$ *на* $M \setminus B$.

Пусть $\Delta v = g(x,v)$, $\Delta u = g(x,u)$ *на* M *и* $v \sim u$. *Тогда* $v = u$ *на* M.

Одним из частных случаев уравнения (1) является полулинейное уравнение вида

$$\Delta u = \phi(|u|)u, \tag{2}$$

где $\phi(\xi)$ — неотрицательная, монотонно неубывающая непрерывно дифференцируемая функция при $\xi \geq 0$.

Поведение ограниченных решений этого уравнения, вопросы взаимосвязи разрешимости краевых и внешних краевых задач, выполнение лиувиллева свойства, а также их устойчивость при вариациях правой части достаточно подробно изучены в работах [4; 6; 7].

В данной работе предполагается развить аппроксимативный подход к построению обобщенного решения краевых задач для полулинейного уравнения (2) на некомпактных римановых многообразиях, основанный на методе разметания. Кроме того, в работе достаточно активно будет использоваться подход к постановке краевых задач, основанный на понятии классов эквивалентных функций.

1. Обобщенное решение краевой задачи

Введем основные определения.

Будем говорить, что на M *разрешима краевая задача для уравнения* (2) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (2) такое, что $u \in [f]$.

Класс $[f]$ в этом случае будем называть *допустимым* для уравнения (2).

Будем называть функцию f *асимптотически неотрицательной*, если на M существует непрерывная ограниченная функция $w \geq 0$ такая, что $w \sim f$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия с гладкими границами ∂B_k, а функция f является асимптотически неотрицательной на M.

Введем понятие обобщенного решения краевой задачи с граничными условиями из класса $[f]$ для уравнения (2) на многообразии M. Для этого рассмотрим последовательность решений краевых задач в B_k

$$\begin{cases} \Delta u_{k,f} = u_{k,f}\phi(|u_{k,f}|) & \text{в} \quad B_k, \\ u_{k,f}|_{\partial B_k} = f|_{\partial B_k}. \end{cases} \tag{3}$$

По принципу максимума легко проверить, что последовательность $u_{k,f}$ равномерно ограничена на M.

Используя внутренние оценки градиентов в комбинации с внутренними оценками в пространстве Гёльдера $C^{\gamma}(\Omega)$ производных для произвольного компактного подмножества $\Omega \subset M$ (см., например, [1, с. 294, 346]), получаем, что семейство функций $g_k(x) = g_k(x, u_{k,f}(x))$ имеет равномерно ограниченные нормы в $C^{\gamma}(\Omega)$. Тогда с учетом внутренних оценок Шаудера [1, с. 91, 94–95] получаем компактность семейства функций $\{u_{k,f}\}$ в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M$. Последнее влечет за собой существование подпоследовательности, сходящейся в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ к предельной функции u, которая является решением уравнения (2) на Ω таким, что $|u| \le \sup\limits_M |f|$.

Далее будем в качестве множества Ω брать последовательно множества B_k для $k = 1, 2, \ldots$ Тогда на множестве B_1 существует предельная функция

$$u_f^1 = \lim_{k\to\infty} u_{k,f}^1 \text{ —}$$

решение уравнения (2), где $\{u_{k,f}^1\}$ — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{u_{k,f}\}$. Кроме того, $|u_f^1| \le \sup\limits_M |f|$.

На следующем шаге рассмотрим подпоследовательность $\{u_{k,f}^1\}$ как последовательность решений уравнения (2) на множестве B_2. Тогда на этом множестве существует предельная функция

$$u_f^2 = \lim_{k\to\infty} u_{k,f}^2 \text{ —}$$

решение уравнения (2) такое, что $|u_f^2| \le \sup\limits_M |f|$. Здесь $\{u_{k,f}^2\}$ — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{u_{k,f}^1\}$. Причем, в силу единственности существования предела сходящейся подпоследовательности, функция u_f^2 является продолжением функции u_f^1, то есть $u_f^2\,|_{B_1} = u_f^1$.

Продолжая процесс для любого n, имеем следующее. На множестве B_n существует предельная функция

$$u_f^n = \lim_{k\to\infty} u_{k,f}^n \text{ —}$$

решение уравнения (2) такое, что $|u_f^n| \le \sup\limits_M |f|$, где функция u_f^n является продолжением функции u_f^{n-1}, то есть $u_f^n\,|_{B_{n-1}} = u_f^{n-1}$. Кроме того, для всех n выполнено $|u_f^n| \le \sup\limits_M |f|$.

Рассмотрим функцию

$$u_f = \begin{cases} u_f^1 & \text{на} \quad B_1, \\ u_f^2 & \text{на} \quad B_2 \setminus B_1, \\ \ldots & \\ u_f^n & \text{на} \quad B_n \setminus B_{n-1}, \\ \ldots & \end{cases}$$

Выберем теперь диагональную последовательность $u_{1,f}^1,\ u_{2,f}^2,\ \ldots,\ u_{k,f}^k,\ \ldots$ Ясно, что $|u_{k,f}^k| \le \sup\limits_M |f|$, то есть диагональная последовательность равномерно ограничена на M и сходится к функции u_f в каждой точке $x \in M$. Как и выше доказывается компактность семейства функций $\{u_{k,f}^k\}$ в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M$. Последнее влечет за собой существование предельной функции у этой последовательности, которая является решением уравнения (2) на Ω. В силу единственности существования предельной функции, она совпадает с функцией u_f. Таким образом, функция u_f является решением уравнения (2) на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M$. Причем $|u_f| \le \sup\limits_M |f|$.

В случае, когда на многообразии M не существует решений уравнения (2) с граничными условиями из класса $[f]$, функцию u_f, полученную описанным выше процессом, назовем *обобщенным решением уравнения* (2) с граничными условиями из класса $[f]$.

Замечание. Подобный аппроксимативный подход к определению обобщенного решения краевой задачи (в частности задачи Дирихле) для гармонических функций в областях $\mathbb{R}^n$ восходит к трудам Винера и Келдыша (см., например, [3, с. 237–296]), а аналогичные исследования для линейных эллиптических уравнений на многообразиях были проведены ранее в работе [2].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть f — асимптотически неотрицательная непрерывная ограниченная на M функция, тогда*

1) последовательность функций $u_{1,f}, \ldots, u_{k,f}, \ldots$, являющихся решениями задачи (3), сходится равномерно на M к предельной функции u_f;

2) функция u_f не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M и представителя f из класса эквивалентности;

3) если класс $[f]$ является допустимым для уравнения (2), то функция u_f является единственным решением уравнения (2) на M таким, что $u_f \in [f]$, то есть $u_f \equiv u$.

2. Доказательство теоремы

1) Пусть сначала $f \geq 0$. Для доказательства первого утверждения теоремы в этом случае достаточно показать монотонность функциональной последовательности $\{u_{k,f}\}_{k=1}^{\infty}$ решений задач (3).

Рассмотрим функции $u_{k,f}$ и $u_{k+1,f}$, которые на множестве B_k удовлетворяют следующим неравенствам

$$0 \leq u_{k+1,f} \leq f, \qquad u_{k,f}\,|_{\partial B_k} = f|_{\partial B_k} \geq u_{k+1}\,|_{\partial B_k}.$$

Используя принцип сравнения в B_k для всех k, получаем $f \geq u_{k,f} \geq u_{k+1,f} \geq 0$.

Таким образом, на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M$ последовательность решений $\{u_{k,f}\}_{k=1}^{\infty}$ задач (3) монотонна и равномерно ограничена, а значит, равномерно сходится. Кроме того, выше было доказано, что данная последовательность имеет подпоследовательность, которая равномерно сходится на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M$ к функции u_f, которая является решением уравнения (2). В силу единственности предела, последовательность решений $\{u_{k,f}\}_{k=1}^{\infty}$ задач (3) также равномерно сходится на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M$ к функции u_f.

Пусть теперь f — асимптотически неотрицательная функция. Тогда найдется непрерывная ограниченная функция $w \sim f$ и $w \geq 0$.

Выбираем произвольное $\varepsilon > 0$. Для достаточно больших $n, m \in N$, $n > m$ на произвольном компактном подмножестве $\Omega \subset M$ получаем

$$\sup_{\Omega} |u_{n,f}(x) - u_{m,f}(x)| \leq \sup_{B_m} |u_{n,f}(x) - u_{m,f}(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{B_m} |u_{n,f}(x) - u_{m,w}(x)| + \sup_{B_m} |u_{m,w}(x) - u_{m,f}(x)| + \sup_{B_m} |u_{n,w}(x) - u_{m,w}(x)|.$$

Используя принцип максимума, оценим каждое слагаемое. Для последнего слагаемого выполнено условие $\sup\limits_{B_m}|u_{n,w}(x)-u_{m,w}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ по доказанному выше для неотрицательной функции w. Заметим, что разность решений уравнения (2) $u_{m,w}(x)-u_{m,f}(x)$ является решением стационарного уравнения Шредингера

$$\Delta u=c(x)u,\ \text{где } c(x)=\frac{\phi(|u_{m,w}(x)|)-\phi(|u_{m,f}(x)|)}{u_{m,w}(x)-u_{m,f}(x)}\geq 0.$$

Следовательно, к данной разности можем применить принцип максимума для решений уравнения Шредингера. Тогда для второго слагаемого имеем

$$\sup_{B_m}|u_{m,w}(x)-u_{m,f}(x)|\leq\sup_{\partial B_m}|u_{m,w}(x)-u_{m,f}(x)|\leq$$

$$\leq\sup_{\partial B_m}|w(x)-f(x)|\leq\sup_{M\setminus B_m}|w(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогично, с учетом того, что $n>m$, оцениваем первое слагаемое

$$\sup_{B_m}|u_{n,w}(x)-u_{n,f}(x)|\leq\sup_{\partial B_n}|u_{n,w}(x)-u_{n,f}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, последовательность решений $\{u_{k,f}\}_{k=1}^{\infty}$ задач (3), где f — асимптотически неотрицательная функция, также равномерно сходится на произвольном компактном подмножестве $\Omega\subset M$ к функции u_f в силу единственности предела.

2) Покажем теперь, что предельная функция u_f не зависит от выбора исчерпания многообразия M. Предположим противное. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{B_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ — два произвольных исчерпания многообразия M, $\{u_{k,f}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{u_{k,f}^*\}_{k=1}^{\infty}$ — соответствующие им последовательности решений задач (3), сходящиеся к различным предельным функциям u_f и u_f^*. Построим новое исчерпание $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M. Пусть $C_1=B_1$. В качестве множества C_2 возьмем множество B_k^*, где k — наименьший номер, начиная с которого множество $\overline{B}_1\subset B_k^*$. Множество C_3 будем искать в $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы $\overline{C}_2\subset B_k$, где k — наименьший номер. Аналогично найдем все остальные множества C_k, $k=4,5,\ldots$, где $\overline{C_k}\subset C_{k+1}$ для любого k. Ясно, что $M=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}C_k$. Тогда соответствующая последовательность решений задач (3) для нового исчерпания $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$: $u_{k_1,f},u_{k_2,f}^*,\ldots$ является расходящейся, что противоречит доказанному выше утверждению. Следовательно, предельная функция u_f не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M.

Покажем, что построенное обобщенное решение u_f краевой задачи для уравнения (2) не зависит от выбора представителя из класса $[f]$.

Предположим противное, возьмем $f_1\in[f]$, $f_2\in[f]$, $f_1\neq f_2$, тогда для них соответствующие задачи (3) во множестве B_k перепишутся в виде

$$\begin{cases}\Delta u_{k,f_1}=u_{k,f_1}\phi(|u_{k,f_1}|) & \text{в}\quad B_k,\\ u_{k,f_1}|_{\partial B_k}=f_1|_{\partial B_k}.\end{cases}\qquad\begin{cases}\Delta u_{k,f_2}=u_{k,f_2}\phi(|u_{k,f_2}|) & \text{в}\quad B_k,\\ u_{k,f_2}|_{\partial B_k}=f_2|_{\partial B_k}.\end{cases}$$

Согласно доказанному выше, на M существуют обобщенные решения u_{f_1} и u_{f_2}.

Тогда для любых $\varepsilon>0$, $x\in M$ имеем

$$0\leq|u_{f_1}(x)-u_{f_2}(x)|\leq|u_{f_1}(x)-u_{k,f_1}(x)|+|u_{f_2}(x)-u_{k,f_2}(x)|+|u_{k,f_1}(x)-u_{k,f_2}(x)|<\varepsilon,$$

для достаточно больших k.

Первые две оценки: $|u_{f_1}(x) - u_{k,f_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|u_{f_2}(x) - u_{k,f_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ имеют место в силу равномерной сходимости последовательностей функций $\{u_{k,f_1}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{u_{k,f_2}\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно к функциям u_{f_1} и u_{f_2}, доказанной выше.

Покажем, что $|u_{k,f_1}(x) - u_{k,f_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Функция $u_{k,f_1}(x) - u_{k,f_2}(x)$ является решением стационарного уравнения Шредингера

$$\Delta u = c(x)u, \text{ где } c(x) = \frac{\phi(|u_{m,f_1}(x)|) - \phi(|u_{m,f_2}(x)|)}{u_{m,f_1}(x) - u_{m,f_2}(x)} \geq 0.$$

Следовательно, к данной разности можем применить принцип максимума для решений уравнения Шредингера, то есть для любого $x \in B_k$ выполнено

$$|u_{k,f_1}(x) - u_{k,f_2}(x)| \leq \sup_{\partial B_k} |u_{k,f_1}(x) - u_{k,f_2}(x)| = \sup_{\partial B_k} |f_1 - f_2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для достаточно больших k (так как $f_1 \in [f]$, $f_2 \in [f]$). В силу произвольности $\varepsilon >$ > 0 следует $u_{f_1} \equiv u_{f_2}$. Таким образом, предельная функция u_f не зависит от выбора представителя из класса $[f]$.

3) Докажем последнее утверждение теоремы. Так как класс $[f]$ является допустимым для уравнения (2), то на M существует решение u краевой задачи для этого уравнения с граничными условиями из класса $[f]$. Покажем, что данное решение u совпадает с функцией u_f.

Действительно, так как $u \in [f]$ и обобщенное решение уравнения (2) не зависит от выбора представителя класса $[f]$, то в качестве граничного значения f для задач (3) в B_k выберем функцию u, то есть

$$\begin{cases} \Delta u_{k,f} = u_{k,f}\phi(|u_{k,f}|) \quad \text{в} \quad B_k, \\ u_{k,f}|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k}. \end{cases}$$

С другой стороны, u является решением уравнения (2) на M, и следовательно, является решением этого уравнения в каждом множестве B_k для любого k. В силу теоремы единственности для решений уравнения (2) получаем $u_{k,f} = u$ в B_k для любого k. По доказанному выше $u_f = \lim\limits_{k\to\infty} u_{k,f} = \lim\limits_{k\to\infty} u$, следовательно, $u_f \equiv u$ на M.

Теорема полностью доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 15-41-02479 р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, 2007. — 464 с.

2. Гульманова, Е. А. Обобщенные решения задачи Дирихле для уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Гульманова, А. А. Клячин, Е. А. Мазепа // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2010. — № 1 (13). — С. 36–40.

3. Келдыш, М. В. Избранные труды. Математика / М. В. Келдыш. — М. : Наука, 1985. — 448 с.

4. Мазепа, Е. А. К вопросу о разрешимости краевых задач для полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — № 4 (23). — С. 36–44.

5. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 591–599.

6. Мазепа, Е. А. Краевые задачи и лиувиллевы теоремы для полулинейных эллиптических уравнений на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 2005. — Т. 514, № 3(514). — С. 59–66.

7. Мазепа, Е. А. О существовании целых решений одного полулинейного эллиптического уравнения на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 1. — С. 153–156.

8. Мазепа, Е. А. Об асимптотическом поведении решений некоторых полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 1 (14). — С. 41–59.

9. Корольков, С. А. О разрешимости краевых задач для стационарного уравнения Шредингера в неограниченных областях римановых многообразий / С. А. Корольков // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 6. — С. 726–732.

10. Korolkov, S. A. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends / S. A. Korolkov, A. G. Losev // Mathematiche Zeitschrift. — 2012. — Vol. 272, № 1–2. — P. 459–472.

REFERENCES

1. Gilbarg D., Trudinger M. *Ellipticheskie differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order]. Moscow, Nauka Publ., 2007. 464 p.

2. Gulmanova E.A., Klyachin A.A., Mazepa E.A. Obobshchennye resheniya zadachi Dirikhle dlya uravneniya Shredingera na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Generalized Solutions of the Dirichlet Problem for the Stationary Schrodinger Equation on Riemannian Manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2010, no. 1 (13), pp. 36-40.

3. Keldysh M.V. *Izbrannye trudy. Matematika* [Selectas. Mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 448 p.

4. Mazepa E.A. K voprosu o razreshimosti kraevykh zadach dlya polulineynykh ellipticheskikh uravneniy na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Solvability of Boundary Value Problems for Semilinear Elliptic Equations on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 4 (23), pp. 36-44.

5. Mazepa E.A. Kraevye zadachi dlya statsionarnogo uravneniya Shredingera na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary Value Problems for the Stationary Schrödinger Equation on Riemannian Manifolds]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2002, vol. 43, no. 3, pp. 591-599.

6. Mazepa E.A. Kraevye zadachi i liuvillevy teoremy dlya polulineynykh ellipticheskikh uravneniy na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary Value Problems and Liouville Theorems for Semilinear Elliptic Equations on Riemannian Manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2005, vol. 514, no. 3(514), pp. 59-66.

7. Mazepa E.A. O sushchestvovanii tselykh resheniy odnogo polulineynogo ellipticheskogo uravneniya na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Existence of Entire

Solutions of a Semilinear Elliptic Equation on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2007, vol. 81, no. 1, pp. 153-156.

8. Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh polulineynykh ellipticheskikh uravneniy na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Asymptotic Behavior of Solutions of Some Semilinear Elliptic Equations on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2011, no. 1 (14), pp. 41-59.

9. Korolkov S.A. O razreshimosti kraevykh zadach dlya statsionarnogo uravneniya Shredingera v neogranichennykh oblastyakh rimanovykh mnogoobraziy [On the Solvability of Boundary Value Problems for the Stationary Schrodinger Equation in Unbounded Domains of Riemannian Manifolds]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 2015, vol. 51, no. 6, pp. 726-732.

10. Korolkov S.A., Losev A.G. Generalized Harmonic Functions of Riemannian Manifolds with Ends. *Mathematiche Zeitschrift*, 2012, vol. 272, no. 1-2, pp. 459-472.

THE APPROXIMATION APPROACH TO CONSTRUCTION OF SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON NON-COMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

Elena Alekseevna Mazepa

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
lmazepa@rambler.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. This paper is devoted to the development of approximation approach to the construction of solutions of boundary value problems for semilinear elliptic equations on arbitrary non-compact Riemannian manifolds. Methods of studies are essentially based on approach based on the introduction of equivalence classes of functions on Riemannian manifold [5; 6; 9]. Also it summarizes the methodology for constructing a generalized solution of the Dirichlet problem for linear elliptic equations in bounded domains of R^n and arbitrary noncompact Riemannian manifolds (see: [2; 3, p. 237–240]).

To date, there are several approaches to the introduction of the generalized solution of boundary value problems. One of them is based on Hilbert space methods and allows you to define the action elliptic operator on a much wider class functions, rather than class C^2.

Another approach to the construction of generalized solutions of elliptic equations originates in papers of Poincare late 19th century. He created a method allowing to consider solutions Dirichlet problem without any restrictions on the domains in which it can be solved, but remaining in the classical assumptions with respect to continuity of boundary data. Ideas of this method were embodied in papers of Perron, Vallee Poussin, M.V. Keldysh, A.A. Grigoryan.

In this paper we study bounded solutions of the semilinear equation (2)

$$\Delta u = \phi(|u|)u,$$

where $\phi(\xi)$ — nonnegative nondecreasing continuously differentiable function in the $\xi \geq 0$.

We introduce the following notation. Let M be an arbitrary smooth connected noncompact Riemannian manifold without boundary and let $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an exhaustion of M, i.e., a sequence of precompact open subsets of M such that $\overline{B_k} \subset$ $\subset B_{k+1}$ and $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Throughout the sequel, we assume that boundaries ∂B_k are C^1-smooth submanifolds.

Let f_1 and f_2 be arbitrary continuous functions on M. Say that f_1 and f_2 are *equivalent on* M and write $f_1 \sim f_2$ if for some exhaustion $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ of M we have

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{M\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0.$$

It is easy to verify that the relation " $\sim$ " is an equivalence which does not depend on the choice of the exhaustion of the manifold and so partitions the set of all continuous functions on M into equivalence classes. Denote the equivalence class of a function f by $[f]$.

A function f is called asymptotically nonnegative whenever there exists a continuous function $w \geq 0$ on M with $w \sim f$.

Say that a boundary value problem for (2) is solvable on M with boundary conditions of class $[f]$ whenever there exists a solution $u(x)$ to (2) on M with $u \in [f]$.

We introduce the concept of a generalized solution of the boundary value problem with the boundary the conditions of the class $[f]$ for the equation (2) on manifold M. To do this, we consider the sequence of decisions boundary value problems (3) in B_k

$$\begin{cases} \Delta u_{k,f} = u_{k,f}\Phi(|u_{k,f}|) \quad in \quad B_k, \\ u_{k,f}|_{\partial B_k} = f|_{\partial B_k}. \end{cases}$$

It is shown that the above sequence $u_{k,f}$ of decisions has a convergent subsequence with limit function u_f, which is a solution of equation (2).

In the case when there are no solutions of equation (2) with the boundary conditions of the class $[f]$ on the manifold M, the function u_f, described above, call *a generalized solution of equation* (2) with the boundary conditions of the class $[f]$.

Remark. This approximate approach to the definition of a generalized solution of the boundary value problem (in particular, the Dirichlet problem) for harmonic functions in bounded domains of $\mathbb{R}^n$ goes back to the works of Wiener and Keldysh (see [3, p. 237-296]), and similar studies for linear elliptic equations on manifolds were held earlier in [2].

Proof of the main results is based on the principle of maximum, theorem of uniqueness for solutions of linear elliptic differential equations and similar results for solutions of quasilinear elliptic differential equations on precompact subset of M (see [5; 6]).

The following theorem is the main result.

Theorem 1. *Let f — asymptotically non-negative continuous bounded on M function, then*
1) the sequence of functions $u_{1,f}, \ldots, u_{k,f}, \ldots$ is a solution of (3) converges

uniformly on M to the limit function u_f;
2) the function u_f does not depend on the exhaustion $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ manifold M and f representative of the equivalence class;
3) if a class $[f]$ is valid for the equation (2), then the function u_f is the only solution of the equation (2) on M such that $u_f \in [f]$, those $u_f \equiv u$.

Key words: semilinear elliptic equation, boundary value problem, approximation approach, generalized solutions, noncompact Riemannian manifolds, the Dirichlet problem.