DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.1.1
УДК 517.95
ББК 22.161

О ПРЕДЕЛЬНОМ ЗНАЧЕНИИ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Рипсиме Сергоевна Акопян
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
Волгоградский государственный аграрный университет
akrim111@yandex.ru
просп. Университетский, 26, 400002 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Исследованию решений уравнения минимальных поверхностей, заданных над неограниченными областями, посвящены многие работы (см., например, [1; 2; 4–6]), в которых изучались различные задачи асимптотического поведения минимальных поверхностей.

В настоящей работе объектом исследования является изучение предельного поведения гауссовой кривизны минимальной поверхности на бесконечности. Используется традиционный для решения подобного вида задач подход, заключающийся в построении вспомогательного конформного отображения, соответствующие свойства которого и изучаются.

Ключевые слова: уравнения минимальных поверхностей, гауссова кривизна, асимптотическое поведение, голоморфная функция, изотермические координаты, голоморфная в метрике поверхности функция.

Рассмотрим $z = f(x, y)-$ решение уравнения минимальных поверхностей

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'_x(x,y)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f'_y(x,y)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\right)=0, \qquad (1)$$

заданное над односвязной областью D, ограниченной двумя кривыми L_1 и L_2, выходящими из одной точки и уходящими в бесконечность. Будем считать, что $f(x, y) \in C^2(\overline{D})$.

Комплекснозначную функцию $h(x, y) = h_1(x, y) + ih_2(x, y)$ называют голоморфной в метрике поверхности, если она удовлетворяет системе уравнений Бельтрами в метрике этой поверхности (см.: [7, с. 10]). В случае графиков решений, удовлетворяющих (1), эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y)=\frac{f'_x(x,y)f'_y(x,y)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y)-\frac{1+{f'_x}^2(x,y)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y),$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y)=\frac{1+{f'_y}^2(x,y)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y)-\frac{f'_x(x,y)f'_y(x,y)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y).$$

Возьмем произвольно точку $(x_0,y_0)\in\overline{D}$ и введем в рассмотрение однозначные в $\overline{D}$ функции, существование которых показано в работе [5]:

$$v(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{f'_x(t,s)f'_y(t,s)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(t,s)|^2}}\,dt+\frac{1+{f'}^2_y(t,s)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(t,s)|^2}}\,ds,$$

$$g(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{1+{f'}^2_x(t,s)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(t,s)|^2}}\,dt+\frac{f'_x(t,s)f'_y(t,s)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(t,s)|^2}}\,ds.$$

Известно, что комплекснозначная функция $\zeta=\xi+i\eta$, где

$$\xi=x+g(x,y),\quad \eta=y+v(x,y), \tag{2}$$

является голоморфной в метрике минимальной поверхности и осуществляет введение на графике $z=f(x,y)$ изотермических координат (ξ,η) (см.: [5]).

Отображение (2) не уменьшает евклидово расстояние между точками. А именно, для любой пары точек (x_1,y_1) и (x_2,y_2) будет выполнено неравенство [5]:

$$(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2>(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

где (ξ_1,η_1), (ξ_2,η_2) — образы точек (x_1,y_1) и (x_2,y_2) соответственно. Из вышесказанного заключаем, что отображение $\zeta(x,y)$ — однолистно в $\overline{D}$, причем образом D в плоскости переменных (ξ,η) будет некоторая область D', ограниченная кривыми L'_1 и L'_2, выходящими из одной точки и уходящими в бесконечность. Здесь L'_1 и L'_2 — образы граничных кривых L_1 и L_2 соответственно.

Пользуясь теоремой Линделефа для функций, голоморфных в неограниченных областях (см.: [3, с. 322]), сформулируем вспомогательную теорему.

Теорема 1. *Пусть функция $h(\xi,\eta)$– голоморфна в области D', ограниченной кривыми L'_1 и L'_2, выходящими из одной точки и уходящими в бесконечность. Если функция $h(\xi,\eta)$ непрерывна на кривых L'_1 и L'_2 и*

$$h(\xi,\eta)\to 0\qquad ((\xi,\eta)\to\infty,(\xi,\eta)\in L'_n),\qquad n=1,2,$$

то $h(\xi,\eta)\to 0$ при (ξ,η), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D'.

Тогда, на основании теоремы 1, для функций, голоморфных в метрике поверхности $z = f(x, y)$, будет справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $h(x, y)$ — голоморфна в метрике поверхности $z = f(x, y)$ в области D, ограниченной кривыми L_1 и L_2, выходящими из одной точки и уходящими в бесконечность. Если функция $h(x, y)$ непрерывна на кривых L_1 и L_2 и*

$$h(x, y) \to 0, \qquad ((x, y) \to \infty, (x, y) \in L_n), \qquad n = 1, 2,$$

то $h(x, y) \to 0$ при (x, y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D.

Доказательство. Если функция $h(x, y)$ голоморфна в метрике поверхности $z = f(x, y)$, то сложная функция $h(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ будет голоморфной в области D' в традиционном понимании. Здесь $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ – отображение, обратное к отображению (2). Голоморфная в области D' функция $\check{h}(\xi, \eta) \equiv h(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ является непрерывной на кривых L'_1 и L'_2 и удовлетворяет условиям теоремы 1, следовательно, $\check{h}(\xi, \eta) \to 0$ при (ξ, η), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D'. А значит, функция $h(x, y) \to 0$ при (x, y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D.

Обозначим $K(x, y)$ гауссову кривизну минимальной поверхности $z = f(x, y)$. Отметим, что $K(x, y) \leq 0$. Так как $f(x, y)$ имеет непрерывные вторые производные вплоть до границы области D, то гауссова кривизна $K(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$. Используя полученные результаты, выводим, что при вышеуказанных предположениях на минимальную поверхность $z = f(x, y)$ будет справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если гауссова кривизна $K(x, y)$ минимальной поверхности (1) на кривых L_1 и L_2 удовлетворяет условиям*

$$K(x, y) \to 0 \qquad ((x, y) \to \infty, (x, y) \in L_n), \qquad n = 1, 2,$$

то $K(x, y) \to 0$ при (x, y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D.

Доказательство. Рассмотрим комплекснозначную функцию

$$\chi(x, y) = \frac{f'_x(x, y)}{1 + \sqrt{1 + |\bigtriangledown f(x, y)|^2}} - i\frac{f'_y(x, y)}{1 + \sqrt{1 + |\bigtriangledown f(x, y)|^2}}.$$

Известно [7, с. 113], что данная функция является голоморфной в метрике минимальной поверхности $z = f(x, y)$ и через производную функции $\chi(x, y)$ по параметру $\zeta = \xi + i\eta$ выражается гауссова кривизна поверхности $K(x, y)$. Причем

$$|\chi'_\zeta(x, y)|^2 = \frac{-K(x, y)(1 + |\bigtriangledown f(x, y)|^2)^2}{(1 + \sqrt{1 + |\bigtriangledown f(x, y)|^2})^4}. \tag{3}$$

Так как

$$0 < \frac{(1 + |\bigtriangledown f(x, y)|^2)^2}{(1 + \sqrt{1 + |\bigtriangledown f(x, y)|^2})^4} < 1, \tag{4}$$

то из равенства (3) и условий теоремы на гауссову кривизну следует, что на кривых L_1 и L_2 функция $|\chi'_\zeta(x,y)|$ непрерывна и представляется как произведение бесконечно малой и ограниченной функций. Следовательно, на кривых L_1 и L_2 получаем, что $|\chi'_\zeta(x,y)| \to 0, ((x,y) \to \infty)$. Тогда голоморфная в метрике поверхности функция $\chi'_\zeta(x,y)$ непрерывна на кривых L_1 и L_2 и

$$\chi'_\zeta(x,y) \to 0 \qquad ((x,y) \to \infty, (x,y) \in L_n), \qquad n = 1,2.$$

Используя теорему 2 для функции $\chi'_\zeta(x,y)$, выводим, что $\chi'_\zeta(x,y) \to 0$ при (x,y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D. Тогда, учитывая равенство (3) и неравенство (4), для гауссовой кривизны минимальной поверхности будет выполнено, что $K(x,y) \to 0$ при (x,y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян, Р. С. О допустимой скорости стремления к нулю гауссовой кривизны минимальной поверхности над полосообразной областью / Р. С. Акопян // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 2. — С. 4–8.

2. Акопян, Р. С. Теоремы типа Фрагмена — Линделефа для минимальной поверхности над полосообразной областью / Р. С. Акопян // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 2. — С. 6–12.

3. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. — М. : Наука, 1991. — 448 с.

4. Миклюков, В. М. Некоторые вопросы качественной теории уравнений типа минимальной поверхности / В. М. Миклюков // Граничные задачи математической физики. — Киев : Наукова Думка, 1983. — С. 137–146.

5. Осерман, Р. Минимальные поверхности / Р. Осерман // Успехи мат. наук. — 1967. — Т. XXII, № 4. — С. 55–136.

6. Пелих, В. И. Теоремы Фрагмена — Линделефа на минимальных поверхностях / В. И. Пелих // Геометрический анализ и его приложения : Научные школы ВолГУ. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 1999. — С. 352–368.

7. Nitsche, J. C. C. Vorlesungen über Minimalflächen / J. C. C. Nitsche. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1975. — 778 p.

REFERENCES

1. Akopyan R.S. O dopustimoy skorosti stremleniya k nulyu gaussovoy krivizny minimalnoy poverkhnosti nad polosoobraznoy oblastyu [About the Admissible Speed of Approaching to Zero of Gaussian Curvature of Minimal Surface over Strip Domain]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2012, no. 2, pp. 4-8.

2. Akopyan R.S. Teoremy tipa Fragmena — Lindelefa dlya minimalnoy poverkhnosti nad polosoobraznoy oblastyu [Theorems of Fragmen-Lindelef Type for the Minimal Surface over Strip Domain]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2013, no. 2, pp. 6-12.

3. Evgrafov M.A. *Analiticheskie funktsii* [Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 448 p.

4. Miklyukov V.M. Nekotorye voprosy kachestvennoy teorii uravneniy tipa minimalnoy poverkhnosti [On the Hyberbolicity Criterion for Noncompact Riemannian Manifolds of Special Type]. *Granichnye zadachi matematicheskoy fiziki*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1983, pp. 137-146.

5. Oserman R. Minimalnye poverkhnosti [Minimal Surfaces]. *Uspekhi mat. nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1967, vol. XXII, no. 4, pp. 55-136.

6. Pelikh V.I. Teoremy Fragmena — Lindelefa na minimalnykh poverkhnostyakh [Theorems of Fragmen–Lindelef on Minimal Surfaces]. *Geometricheskiy analiz i ego prilozheniya : Nauchnye shkoly VolGU*. Volgograd, Izd-vo VolGU Publ., 1999, pp. 352-368.

7. Nitsche J.C.C. *Vorlesungen über Minimalflächen*. Berlin ; Heidelberg ; New York, Springer–Verlag, 1975. 778 p.

ON LIMIT VALUE OF THE GAUSSIAN CURVATURE OF THE MINIMAL SURFACE AT INFINITY

Ripsime Sergoevna Akopyan

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Higher Mathematics,
Volgograd State Agrarian University
akrim111@yandex.ru
Prosp. Universitetsky, 26, 400002 Volgograd, Russian Federation

Abstract. A lot of works on researching of solutions of equation of the minimal surfaces, which are given over unbounded domains (see, for example, [1; 2; 4–6]) in which various tasks of asymptotic behavior of the minimal surfaces were studied. In the present paper the object of the research is a study of limit behavior of Gaussian curvature of the minimal surface given at infinity. We use a traditional approach for the solution of a similar kind of tasks which is a construction of auxiliary conformal mapping which appropriate properties are studied.

Let $z = f(x, y)$ is a solution of the equation of minimal surfaces (1) given over the domain D bounded by two curves L_1 and L_2, coming from the same point and going into infinity. We assume that $f(x, y) \in C^2(\overline{D})$.

For the Gaussian curvature of minimal surfaces $K(x, y)$ will be the following theorem.

Theorem. If the Gaussian curvature $K(x, y)$ of the minimal surface (1) on the curves L_1 and L_2 satisfies the conditions

$$K(x, y) \to 0, \qquad ((x, y) \to \infty, (x, y) \in L_n) \qquad n = 1, 2,$$

then $K(x, y) \to 0$ for (x, y) tending to infinity along any path lying in the domain D.

Key words: equations of the minimal surfaces, Gaussian curvature, asymptotic behavior, holomorphic function, isothermal coordinates, holomorphic function in the metric of the surface.