DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.1.2

УДК 517. 968
ББК 22.161

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Турсун Камалдинович Юлдашев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
Институт информатики и телекоммуникации,
Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
tursun.k.yuldashev@gmail.com
просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31, 660014 г. Красноярск, Российская Федерация

Аннотация. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости нелокальной смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа третьего порядка. Использован метод ряда Фурье разделения переменных и получена счетная система нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ). Для доказательства теоремы об однозначной разрешимости ССНИУ использован метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Далее показана сходимость ряда Фурье к искомой функции нелокальной смешанной задачи. Также обоснована гладкость решения поставленной задачи. Данная работа является дальнейшим развитием теории интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение, уравнение псевдопараболического типа, нелокальное интегральное условие, однозначная разрешимость.

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению смешанных задач для уравнений математической физики. Теория начальных и краевых задач в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений (см., например, [3; 9; 10]). Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1; 6; 18]. Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы. Часто изучение задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах сводится к рассмотрению дифференциальных уравнений третьего порядка [11]. К дифференциальным уравнениям в частных производных третьего порядка также сводятся задачи изучения распространения волн в слабодиспергирующих средах, в холодной плазме и магнитной гидродинамике и т. д. Изучению прямых и обратных задач для уравнений в частных производных третьего и выше порядков посвящено большое количество работ (см., например, [2; 4; 7; 8; 12–17]).

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме [5]. В настоящей работе предлагается методика изучения нелокальной смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа.

Итак, в области Ω рассматривается уравнение

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial^3 U(t,x)}{\partial t\,\partial x^2}-\mu(t)\,\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2}=$$
$$=\eta(t)\int_0^T U(\theta,x)\,d\theta+f\left(x,\int_0^T\int_0^l H(\theta,y)U(\theta,y)\,dy\,d\theta\right) \tag{1}$$

с нелокальным интегральным условием

$$U(0,x)+\int_0^T \Theta(t)U(t,x)\,dt=\varphi(x),\ x\in\Omega_l \tag{2}$$

и граничными условиями Бенара

$$U(t,0)=U(t,l)=0,\ t\in\Omega_T, \tag{3}$$

где $\mu(t)\in C(\Omega_T)$, $\eta(t)\in C(\Omega_T)$, $f(x,\gamma)\in C(\Omega_l\times R)$, $\Theta(t)\in C^1(\Omega_T)$, $\int_0^T\int_0^l |H(t,x)|\,dx\,dt<\infty$, $\varphi(x)\in C^2(\Omega_l)$, $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\Omega\equiv\Omega_T\times\Omega_l$, $\Omega_T\equiv[0,T]$, $\Omega_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$.

Под решением нелокальной задачи (1)–(3) понимаем функцию $U(t,x)\in C^{1,2}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2), (3).

2. Сведение смешанной задачи к счетной системе нелинейных интегральных уравнений

Решение данной задачи (1)–(3) ищем в виде ряда Фурье:

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\cdot\vartheta_n(x), \tag{4}$$

где $\vartheta_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\dots$.

По предположению

$$f(x,\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\gamma)\cdot\vartheta_n(x), \tag{5}$$

где $f_n(\gamma)=\int_0^l f(y,\gamma)\vartheta_n(y)\,dy$, $\gamma=\int_0^T\int_0^l H(s,y)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(s)\cdot\vartheta_k(y)\,dy\,ds$.

Кроме того, учтем, что

$$\vartheta_n''(x) = -\lambda_n^2\,\vartheta_n(x)\,. \tag{6}$$

Подставляя ряды (4) и (5) в уравнение (1), с учетом (6) получаем следующую счетную систему интегро-дифференциальных уравнений первого порядка:

$$u_n'(t) = -\tau_n\,\mu(t)\cdot u_n(t) + \frac{1}{1+\lambda_n^2}\eta(t)\int_0^T u_n(\theta)\,d\theta + \frac{1}{1+\lambda_n^2} f_n(\gamma)\,, \tag{7}$$

где $\tau_n = \dfrac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}$, $u_n(t) = \int_0^l U(t,y)\,\vartheta_n(y)\,dy$.

Нелокальное условие (2) для уравнения (7) запишем в следующем виде

$$u_n(0) + \int_0^T \Theta(t)u_n(t)\,dt = \varphi_n\,, \tag{8}$$

где $\varphi_n = \int_0^l \varphi(y)\,\vartheta_n(y)\,dy$.

Правую часть (7) обозначим через $F_n(t)$. Тогда путем интегрирования по t из (7) получаем

$$u_n(t) = C_n + \int_0^t F_n(s)\,ds, \tag{9}$$

где C_n – пока неизвестное постоянное, для определения которого из интегрального условия (8) получаем

$$C_n + \int_0^T \Theta(t)\left[C_n + \int_0^t F_n(s)\,ds\right]dt = \varphi_n\,,$$

откуда

$$C_n = \frac{\varphi_n}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_0^T \Theta(t)\int_0^t F_n(s)\,ds\,dt,$$

где $\alpha = 1 + \int_0^T \Theta(t)\,dt \neq 0.$

Подставляя последнее в (9), получаем

$$u_n(t) = \frac{\varphi_n}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_0^T \Theta(t)\int_0^t F_n(s)\,ds\,dt + \int_0^t F_n(s)\,ds$$

или

$$\begin{gathered} u_n(t) = \frac{\varphi_n}{\alpha} - \\ -\frac{1}{\alpha}\int_0^T \Theta(t)\int_0^t \left[\frac{1}{1+\lambda_n^2}\eta(s)\int_0^T u_n(\theta)\,d\theta - \tau_n\,\mu(s)\cdot u_n(s) + \frac{1}{1+\lambda_n^2} f_n(\gamma)\right]ds\,dt + \\ + \int_0^t \left[\frac{1}{1+\lambda_n^2}\eta(s)\int_0^T u_n(\theta)\,d\theta - \tau_n\,\mu(s)\cdot u_n(s) + \frac{1}{1+\lambda_n^2} f_n(\gamma)\right]ds. \end{gathered} \tag{10}$$

Используем формулу Дирихле

$$\int_0^T \Theta(t)\int_0^t \mu(s)\cdot u_n(s)\,d\,s\,d\,t=\int_0^T u_n(s)\cdot\mu(s)\int_s^T \Theta(t)\,d\,t\,d\,s.$$

Тогда (10) запишем в виде счетной системы нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ)

$$u_n(t)=\Im_1(t;u_n)\equiv Q_n+\int_0^T R_n(s)\cdot u_n(s)\,d\,s+G_n(t)\int_0^T u_n(\theta)\,d\,\theta+$$

$$+\Phi_n(t)\int_0^l f\left(y,\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\theta)\cdot\vartheta_k(z)\,d\,z\,d\,\theta\right)\cdot\vartheta_n(y)\,d\,y, \tag{11}$$

где $Q_n=\dfrac{\varphi_n}{\alpha}$, $R_n(s)=\begin{cases}\dfrac{\tau_n}{\alpha}\omega(s)-\tau_n\mu(s),\ 0\le s<t,\\ \dfrac{\tau_n}{\alpha}\omega(s),\ t<s\le T,\end{cases}$ $\omega(s)=\mu(s)\displaystyle\int_s^T\Theta(t)\,d\,t,$

$$G_n(t)=-\frac{1}{\alpha(1+\lambda_n^2)}\int_0^T\Theta(t)\int_0^t\eta(s)\,d\,s\,d\,t+\frac{1}{1+\lambda_n^2}\int_0^t\eta(s)\,d\,s,$$

$$\Phi_n(t)=-\frac{1}{\alpha(1+\lambda_n^2)}\int_0^T t\cdot\Theta(t)\,d\,t+\frac{t}{1+\lambda_n^2}.$$

3. Однозначная разрешимость ССНИУ

В множестве

$$\left\{u(t)=(u_n(t))\,\middle|\,u_n(t)\in C(\Omega_T)\ ,\ n=1,2,3,...\right\}$$

определяются операции сложения двух элементов и умножение элемента на скаляр покоординатно. С введением нормы

$$\|u(t)\|_{B_2(T)}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|u_n(t)\right|^2}$$

оно становится банаховым пространством и обозначается через $B_2(T)$.

Для функции $h(x)\in L_2(\Omega_l)$ рассматривается следующая норма

$$\|h(x)\|_{L_2(\Omega_l)}=\sqrt{\int_0^l|h(y)|^2d\,y}.$$

Для последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\in\lambda_2$ используется норма

$$\|\varphi\|_{\lambda_2}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) $\beta_1=\|Q\|_{\lambda_2}<\infty$; $\beta_2=\|\Re(t)\|_{B_2(T)}+\|G(t)\|_{B_2(T)}<\infty$;

2) $\beta_3 = \| \Phi(t) \|_{B_2(T)} < \infty$; $M = \| f(x,\gamma) \|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$;

3) $f(x,\gamma) \in Lip\left\{ L(x)_{|\gamma} \right\}$, $\delta_1 = \| L(x) \|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$;

4) $\delta_2 = \int\limits_0^T \int\limits_0^l |H(t,x)| \, dx \, dt < \infty$; $\rho = \beta_2 T + \beta_3 \delta_1 \delta_2 \delta_3 < 1$,

где $\delta_3 = \max\limits_{x \in \Omega_l} \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\vartheta_n(x)|^2} < \infty$.

Тогда ССНИУ (11) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений:

$$\begin{cases} u_n^0(t) = Q_n, \\ u_n^{j+1}(t) = \Im_1\left(t; u_n^j\right), \; j = 0,1,2,3,\ldots, \; t \in \Omega_T. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Метод последовательных приближений сочетаем с методом сжимающих отображений. Рассмотрим шар $S(u_n^0; r_1)$ с радиусом $r_1 = \beta_1 + \dfrac{\beta_3 M}{1 - \beta_2 T}$. Для нулевого приближения, в силу первого условия теоремы, из (12) имеем

$$\| u^0(t) \|_{B_2(T)} \le \beta_1. \tag{13}$$

Для первой разности, в силу условий теоремы, из (12) с использованием неравенств Гельдера и Минковского и с учетом (13) получим оценку

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n^1(t) - u_n^0(t) \right|^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^T \Re_n(s) \cdot u_n(s) \, ds \right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| G_n(t) \right|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^T u_n^0(t) \, dt \right|^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| \Phi_n(t) \right| \cdot \int_0^l \left| f\left(y, \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(\theta) \cdot \vartheta_k(z) \, dz \, d\theta \right) \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2}$$

или с использованием неравенства Бесселя имеем

$$\| u^1(t) - u^0(t) \|_{B_2(T)} \le \beta_1 \beta_2 T +$$

$$+ \beta_3 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| f\left(y, \int_0^T \int_0^l H(t,z) \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \cdot \vartheta_k(z) \, dz \, dt \right) \right| \cdot \left| \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \le \tag{14}$$

$$\le \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 \| f(x,\gamma) \|_{L_2(\Omega_l)} = \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M.$$

Для разности $u^2(t) - u^0(t)$, в силу условий теоремы, из (12) с учетом (14) аналогично получим оценку

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n^2(t) - u_n^0(t) \right|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T \left| \Re_n(s) \right| \cdot \left| u_n^1(s) - u_n^0(s) \right| ds \right]^2} +$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|G_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^T\left|u_n^1(t)-u_n^0(t)\right|dt\right]^2}+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Phi_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l\left|f\left(y,\gamma^1\right)\cdot\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}$$

или

$$\left\|u^2(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)}\leq\left(\beta_1\beta_2T+\beta_3M\right)\beta_2T+$$

$$+\beta_3\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l\left|f\left(y,\gamma^1\right)\right|\cdot\left|\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}\leq \tag{15}$$

$$\leq\left(\beta_1\beta_2T+\beta_3M\right)\beta_2T+\beta_3M=\beta_1(\beta_2T)^2+(\beta_2T+1)\cdot\beta_3M,$$

где $\gamma^1=\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k^1(\theta)-u_k^0(\theta)\right|\cdot\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta$.

Далее из (12) с учетом (15) имеем

$$\left\|u^3(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)}\leq\left(\beta_1\beta_2T+\beta_3M\right)(\beta_2T)^2+(\beta_2T+1)\cdot\beta_3M=$$

$$=\beta_1(\beta_2T)^3+\left((\beta_2T)^2+\beta_2T+1\right)\cdot\beta_3M. \tag{16}$$

Продолжая этот процесс, аналогично (16) получаем

$$\left\|u^j(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)}\leq\beta_1(\beta_2T)^j+$$

$$+\left((\beta_2T)^{j-1}+(\beta_2T)^{j-2}+\ldots+(\beta_2T)^2+\beta_2T+1\right)\cdot\beta_3M. \tag{17}$$

Из последнего условия теоремы следует, что $\beta_2T<1$. Поэтому из (17), переходя к пределу при $j\to\infty$

$$\lim_{j\to\infty}\left\|u^j(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)}\leq\lim_{j\to\infty}\Big[\beta_1(\beta_2T)^j+$$

$$+\left((\beta_2T)^{j-1}+(\beta_2T)^{j-2}+\ldots+(\beta_2T)^2+\beta_2T+1\right)\cdot\beta_3M\Big],$$

имеем

$$\left\|u^{\infty}(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)}<\beta_1+\frac{1}{1-\beta_2T}\beta_3M=r_1<\infty. \tag{18}$$

Из (18) следует, что оператор в правой части (11) отображает шар $S(u_n^0;r_1)$ в себя. Теперь для произвольной разности $u_n^{j+1}(t)-u_n^j(t)$ получим следующую оценку

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n^{j+1}(t)-u_n^j(t)\right|^2}\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\Re_n(s)\right|\cdot\left|u_n^j(s)-u_n^{j-1}(s)\right|ds\right]^2}+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|G_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^T\left|u_k^j(t)-u_k^{j-1}(t)\right|dt\right|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Phi_n(t)\right|^2}\times$$

$$\times\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l L(y)\int_0^T\int_0^l\left|H(\theta,z)\right|\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k^j(\theta)-u_k^{j-1}(\theta)\right|\cdot\left|\vartheta_k(z)\right|dz\,d\theta\cdot\left|\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}$$

или

$$\left\|u^{j+1}(t)-u^j(t)\right\|_{B_2(T)}\le$$

$$\le\left[\beta_2 T+\beta_3\delta_2\delta_3\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l L(y)\cdot\left|\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}\right]\left\|u^j(t)-u^{j-1}(t)\right\|_{B_2(T)}\le \tag{19}$$

$$\le\rho\left\|u^j(t)-u^{j-1}(t)\right\|_{B_2(T)}.$$

В силу последнего условия теоремы, из оценки (19) следует, что оператор в правой части (11) является сжимающим. Из оценок (18) и (19) заключаем, что для оператора (11) существует единственная неподвижная точка. Следовательно, в пространстве $B_2(T)$ ССНИУ (11) имеет единственное решение $u(t)\in B_2(T)$. Кроме того, здесь справедлива оценка скорости сходимости

$$\left\|u^{j+1}(t)-u(t)\right\|_{B_2(T)}\le\frac{\rho^{j+1}}{1-\rho}\cdot(\beta_1\beta_2 T+\beta_3 M).$$

Теорема доказана.

Дифференцируя ССНИУ (11) по t, получаем

$$u'_n(t)=\Im_2\left(t;u_n\right)\equiv G'_n(t)\int_0^T u_n(\theta)\,d\theta+$$

$$+\Phi'_n(t)\int_0^l f\left(y,\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\theta)\cdot\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\,dy, \tag{20}$$

где $G'_n(t)\in C(\Omega_T)$, $\Phi'_n(t)\in C(\Omega_T)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и

$$N_1=\left\|G'(t)\right\|_{B_2(T)}<\infty;\ N_2=\left\|\Phi'(t)\right\|_{B_2(T)}<\infty.$$

Тогда $u'(t)\in B_2(T)$.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. Для оператора (20) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases}u'^{\,0}_n(t)=0,\\ u'^{\,j+1}_n(t)=\Im_2\left(t;u^j_n\right),\ j=0,1,2,3,\dots,\ t\in\Omega_T.\end{cases} \tag{21}$$

Рассмотрим шар $S(u'^{\,0}_n;r_2)$ с радиусом $r_2=N_1T\cdot\left(\beta_1+\dfrac{1}{1-\beta_2 T}\right)+N_2M$. Для первой разности, в силу условий теоремы и оценки (13), из (21) получаем оценку

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|u'^{1}_n(t)-u'^{0}_n(t)\right|^2}\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|G'_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^T u^0_n(t)\,dt\right|^2}+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|\Phi'_n(t)\right|\cdot\int_0^l\left|f\left(y,\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k^0(\theta)\cdot\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}$$

или

$$\left\|u'^1(t)-u'^0(t)\right\|_{B_2(T)}\le N_1\beta_1 T+N_2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l\left|f(y,\gamma)\right|\cdot\left|\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}\le$$

$$\le N_1\beta_1 T+N_2\left\|f(x,\gamma)\right\|_{L_2(\Omega_l)}=N_1\beta_1 T+N_2 M.$$

Для разности $u'^2(t)-u'^0(t)$, в силу условий теоремы и оценки (14), из (21) получим оценку

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|u'^2_n(t)-u'^0_n(t)\right|^2}\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|G'_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^T\left|u_n^1(t)-u_n^0(t)\right|dt\right]^2}+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Phi'_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l\left|f\left(y,\gamma^1\right)\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}$$

или

$$\left\|u'^2(t)-u'^0(t)\right\|_{B_2(T)}\le$$

$$\le N_1\left(\beta_1\beta_2 T+\beta_3 M\right)T+N_2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l\left|f\left(y,\gamma^1\right)\right|\cdot\left|\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}\le$$

$$\le\left(\beta_1\beta_2 T+\beta_3 M\right)\cdot N_1 T+N_2 M.$$

Далее из (21) с учетом (15) имеем

$$\left\|u'^3(t)-u'^0(t)\right\|_{B_2(T)}\le$$

$$\le N_1 T\cdot\left(\beta_1(\beta_2 T)^2+(\beta_2 T+1)\cdot\beta_3 M\right)+N_2 M. \tag{22}$$

Продолжая этот процесс, аналогично (22) получаем

$$\left\|u'^j(t)-u'^0(t)\right\|_{B_2(T)}\le N_1 T\cdot\left[\beta_1(\beta_2 T)^j+\right.$$

$$\left.+\left((\beta_2 T)^{j-1}+(\beta_2 T)^{j-2}+\ldots+(\beta_2 T)^2+\beta_2 T+1\right)\cdot\beta_3 M\right]+N_2 M. \tag{23}$$

Из последнего условия теоремы 1 следует, что $\beta_2 T<1$. Поэтому из (23), переходя к пределу при $j\to\infty$

$$\lim_{j\to\infty}\left\|u'^j(t)-u'^0(t)\right\|_{B_2(T)}\le\lim_{j\to\infty}N_1 T\cdot\left[\beta_1(\beta_2 T)^j+\right.$$

$$\left.+\left((\beta_2 T)^{j-1}+(\beta_2 T)^{j-2}+\ldots+(\beta_2 T)^2+\beta_2 T+1\right)\cdot\beta_3 M\right]+N_2 M,$$

имеем

$$\left\|u'^{\infty}(t)-u'^0(t)\right\|_{B_2(T)}<N_1 T\cdot\left(\beta_1+\frac{1}{1-\beta_2 T}\right)+N_2 M=r_2<\infty. \tag{24}$$

Из (24) заключаем, что оператор в правой части (20) отображает шар $S(u'^{\,0}_n;r_2)$ в себя. Следовательно, имеет место $u'(t)\in B_2(T)$.

4. Разрешимость смешанной задачи (1)–(3)

Подставляя (11) в ряд Фурье (4), получаем формальное решение смешанной задачи (1)–(3):

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\cdot\vartheta_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Im_1\left(t;u_n\right)\cdot\vartheta_n(x)\equiv$$

$$\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\cdot\left\{Q_n(t)+\int_0^T\Re_n(s)\cdot u_n(s)\,ds+G_n(t)\int_0^T u_n(\theta)\,d\theta+\right. \tag{25}$$

$$\left.+\Phi_n(t)\cdot\int_0^l f\left(y,\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\theta)\cdot\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\,dy\right\}.$$

Также подставляем (12) в ряд (4):

$$U^{j+1}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{j+1}(t)\cdot\vartheta_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Im_1\left(t;u_n^j\right)\cdot\vartheta_n(x)\equiv$$

$$\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\cdot\left\{Q_n(t)+\int_0^T\Re_n(s)\cdot u_n^j(s)\,ds+G_n(t)\int_0^T u_n^j(\theta)\,d\theta+\right. \tag{26}$$

$$\left.+\Phi_n(t)\cdot\int_0^l f\left(y,\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k^j(\theta)\cdot\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\,dy\right\}.$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Если $u(t)\in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (11), то последовательность функций (26) сходится к функции (25) при $j\to\infty$.

Доказательство. Так как $u(t)\in B_2(T)$ является единственным решением ССНИУ (11) и

$$\left\|u^j(t)-u(t)\right\|_{B_2(T)}\le\frac{\varepsilon}{\delta_3},$$

где $0<\varepsilon$ – малое число, то для разности функций (26) и (25) получаем

$$\left|U^j(t,x)-U(t,x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n^j(t)-u_n(t)\right|\cdot\left|\vartheta_n(x)\right|\le$$

$$\le\delta_3\cdot\left\|u^j(t)-u(t)\right\|_{B_2(T)}\le\delta_3\cdot\frac{\varepsilon}{\delta_3}=\varepsilon.$$

Так как для оператора (20) справедливо $u'(t)\in B_2(T)$, то с применением неравенства Гельдера имеем оценку

$$\left|\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|u'_n(t)\right|\cdot\left|\vartheta_n(x)\right|\le\delta_3\left\|u'(t)\right\|_{B_2(T)}<\infty.$$

Дифференцируя (25) два раза по x, с учетом (7) получаем

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \vartheta''_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \cdot u_n(t) \cdot \vartheta_n(x). \tag{27}$$

Покажем, что ряд (27) сходится абсолютно и равномерно. Два раза интегрируя по частям следующий интеграл

$$u_n(t) = \int_0^l U(t,y)\, \vartheta_n(y)\, dy,$$

имеем

$$u_n(t) = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \frac{\partial^2 U(t,y)}{\partial y^2} \vartheta_n(y)\, dy. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27) и используя неравенства Гельдера и неравенства Бесселя, имеем оценку

$$\left| -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \cdot u_n(t) \cdot \vartheta_n(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \frac{\partial^2 U(t,y)}{\partial y^2} \vartheta_n(y)\, dy \cdot \vartheta_n(x) \right| \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \vartheta_n(x) \right|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| \frac{\partial^2 U(t,y)}{\partial y^2} \right| \cdot \left| \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \le$$

$$\le \delta_3 \cdot \left\| \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин, С. Д. Флаттер пластин и оболочек / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко. – М. : Наука, 2006. – 248 с.
2. Андреев, А. А. Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками / А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2013. – Т. 30, № 1. – С. 31–36.
3. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 50–55.
4. Бештоков, М. Х. Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа / М. Х. Бештоков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 9. – С. 1497–1514.
5. Гордезиани, Д. Г. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д. Г. Гордезиани, Г. А. Авалишвили // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 1. – С. 94–103.
6. Замышляева, А. А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / А. А. Замышляева // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 5–28.
7. Зикиров, О. С. О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка / О. С. Зикиров // Известия вузов. Математика. – 2014. – № 7. – С. 63–71.
8. Сопуев, А. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка / А. Сопуев, Н. К. Аркабаев // Вестник Томского государственного университета. Математика. Механика. – 2013. – Т. 21, № 1. – С. 16–23.

9. Турбин, М. В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли / М. В. Турбин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 246–257.

10. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 232–250.

11. Шхануков, М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах / М. Х. Шхануков // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 4. – С. 689–699.

12. Юлдашев, Т. К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка / Т. К. Юлдашев // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 9. – С. 74–79.

13. Юлдашев, Т. К. Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 153–163.

14. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2014. – Т. 34, № 1. – С. 56–65.

15. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени / Т. К. Юлдашев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 69–75.

16. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного университета. Серия естественнонаучная. – 2013. – № 1. – С. 58–66.

17. Юлдашев, Т. К. Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени / Т. К. Юлдашев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 237– 255.

18. Benney, D. J. Interactions of permanent waves of finite amplitude / D. J. Benney, J. C. Luke // Journ. Math. Phys. – 1964. – Vol. 43. – P. 309–313.

REFERENCES

1. Algazin S.D., Kiyko I.A. *Flatter plastin i obolochek* [Flutter of Plates and Shells]. Moscow, Nauka Publ., 2006. 248 p.

2. Andreev A.A., Yakovleva Yu.O. Kharakteristicheskaya zadacha dlya sistemy gyperbolicheskikh differentsialnykh uravneniy tretyego poryadka obshchego vida s nekratnymi kharakteristikami [The Characteristic Problem for a System of Hyperbolic Differential Equations of the Third Order of General Form With Nonmultiple Characteristics]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta. Seriya "Fiziko-matematicheskie nauki"*, 2013, vol. 30, no. 1, pp. 31-36.

3. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon. O edinstvennosti resheniya matematicheskoy modeli vynuzhdennykh kolebaniy struny s osobennostyami [Uniqueness of the Solution of Mathematical Model of Forced String Oscillation With Singularities]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2014, no. 1, pp. 50-55.

4. Beshtokov M.Kh. Chislenniy metod resheniya odnoy nelokalnoy kraevoy zadachi dlya uravneniya tretyego poryadka giperbolicheskogo tipa [A Numerical Method for Solving One Nonlocal Boundary Value Problem for a Third-Order Hyperbolic Equation]. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki,* 2014, vol. 54, no. 9, pp. 1441-1458.

5. Gordeziani D.G., Avilishvili G.A. Resheniya nelokalnykh zadach dlya odnomernykh kolebaniy sredy [Solving the Nonlocal Problems for One-Dimensional Medium Oscillation]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94-103.

6. Zamyshlyaeva A.A. Matematicheskie modeli sobolevskogo tipa vysokogo poryadka [Sobolev-Type Mathematical Models of Higher Order]. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 5-28.

7. Zikirov O.S. O zadache Dirikhle dlya giperbolicheskikh uravneniy tretyego poryadka [Dirichlet Problem for Third-Order Hyperbolic Equations]. *Izvestiya vuziv. Matematika,* 2014, vol. 58, no. 7, pp. 63-71.

8. Sopuev A., Arkabaev N.K. Zadachi sopryazheniya dlya lineynykh psevdoparabolicheskikh uravneniy tretyego poryadka [Conjugation Problems for Linear Pseudoparabolic Equations of Third Order]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Mekhanika*, 2013, vol. 21, no. 1, pp. 16-23.

9. Turbin M.V. Issledovaniya nachalno-kraevoy zadachi dlya modeli dvizheniya zhidkosti Gershel-Balkli [Investigation of Initial-Boundary Value Problem for the Herschel-Bulkley Mathematical Fluid Model]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2013, no. 2, pp. 246-257.

10. Shabrov S.A. Ob odnoy matematicheskoy modeli malykh deformatsiy sterzhnevoy sistemy s vnutrennimi osobennostyami [On a Mathematical Model of Small Deformations of a Bar System With Internal Features]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2013, no. 1, pp. 232-250.

11. Shkhanukov M.Kh. O nekotorykh kraevykh zadachakh dlya uravneniya tretyego poryadka, voznikayushchikh pri modelirovanii filtratsii zhidkosti v poristykh sredakh [On Some Boundary Value Problems for a Third-Order Equation Arising in the Simulation of Fluid Flow in Porous Media]. *Differentsialnye uravneniya*, 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689-699.

12. Yuldashev T.K. Ob odnom integro-differentsialnom uravnenii Fredgolma v chastnykh proizvodnykh tretyego poryadka [On One Integro-Differential Equation of Fredholm in Partial Derivatives of Third Order]. *Izvestiya vuziv. Matematika*, 2015, no. 9, pp. 74-79.

13. Yuldashev T.K. Ob obratnoy zadache dlya nelineynykh integro-differentsialnykh uravneniy vysshego porjadka [On the Inverse Problem for Nonlinear Integro-Differential Equations of Higher Order]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2014, no. 1, pp. 153-163.

14. Yuldashev T.K. Obratnaya zadacha dlya odnogo integro-differentsialnogo uravneniya Fredgolma v chastnykh proizvodnykh tretyego poryadka [The Inverse Problem for a Fredholm Integro-Differential Equation in Partial Derivatives of Third Order]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta. Seriya "Fiziko-matematicheskie nauki"*, 2014, vol. 34, no. 1, pp. 56-65.

15. Yuldashev T.K. Obratnaya zadacha dlya nelineynogo integro-differentsialnogo uravneniya s giperbolicheskim operatorom vysokoy stepeni [The Inverse Problem for a Nonlinear Integro-Differential Equation With Hyperbolic Operator of the Higher Degree]. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 69-75.

16. Yuldashev T.K. Obratnaya zadacha dlya odnogo nelineynogo integro-differentsialnogo uravneniya tretyego poryadka [The Inverse Problem for a Nonlinear Integro-Differential Equation of the Third Order]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Estestvennye nauki,* 2013, no. 1, pp. 58-66.

17. Yuldashev T.K. Smeshannaya zadacha dlya nelineynogo uravneniya s psevdoparabolicheskim operatorom vysokoy stepeni [Mixed Value Problem for a Nonlinear Equation With Pseudoparabolic Operator of Higher Degree]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2013, no. 2, pp. 237-255.

18. Benney D.J., Luke J.C Interactions of Permanent Waves of Finite Amplitude. *Journ. of Math. Phys*., 1964, vol. 43, pp. 309-313.

NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF PSEUDOPARABOLIC TYPE WITH NONLOCAL INTEGRAL CONDITION

Tursun Kamaldinovich Yuldashev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Higher Mathematics,
Institute of Informatics and Telecommunication,
Siberian State Aerospace University named after Academician M.F. Reshetnev
tursun.k.yuldashev@gmail.com
Prosp. im. gazety "Krasnoyarskiy rabochiy", 31, 660014 Krasnoyarsk, Russian Federation

Abstract. The mathematical modeling of many processes occurring in the real world leads to the study of direct and inverse problems for equations of mathematical physics. Direct problems for partial differential and integro-differential equations by virtue of their importance in the application are one of the most important parts of the theory of differential equations. In the case, when the boundary of the flow of physical process is not applicable for measurements, as an additional information can be used on nonlocal conditions in the integral form.

We propose a method of studying the one-value solvability of the nonlocal problem for a nonlinear third-order integro-differential equation. Such type of differential equations models many natural phenomena and appears in many fields of sciences. For this reason, a great importance was given to this type of equations in the works of many researchers.

We use the Fourier method of separation of variables. The application of this method of separation of variables can improve the quality of formulation of the given problem and facilitate the processing procedure.

So in this article the author studies the questions of one-value solvability of nonlocal mixed-value problem for nonlinear pseudoparabolic type of integro-differential equation. By applying the Fourier method of separation of variables, the author obtained the countable system of nonlinear integral equations (CSNIE). The theorem of one-value solvability of CSNIE is proved using the method of successive approximations in combination with the method of compressing mapping. Further the author showed the convergence of Fourier series to unknown function - to the solution of the nonlocal mixed-value problem. It is also checked that the solution of the given is smooth. Every estimate was obtained with the help of the Holder inequality, Minkovski inequality and Bessel-type inequality. This paper advances the theory of nonlinear partial integro-differential equations.

Key words: mixed-value problem, integro-differential equation, pseudoparabolic-type equation, nonlocal integral condition, one-value solvability.