



DOI: <http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.2.4>

УДК 539.375

ББК 22.251

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЧАСТИЧНО ТЕПЛОПРОНИЦАЕМЫХ ТРЕЩИН В ДВУХКОМПОНЕНТНОМ МАТЕРИАЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА

Микаел Гарегинович Ордян

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики,
Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
omg84@mail.ru
ул. 20-летия Октября, 84, 394018 г. Воронеж, Российская Федерация

Вера Евгеньевна Петрова

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и прикладного анализа,
Воронежский государственный университет
veraep@gmail.com
Университетская пл., 1, 394018 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В данной работе приведено численное решение задачи теплопроводности о взаимодействии межфазной трещины с внутренними трещинами в биматериале. Предполагалось, что трещины частично теплопроницаемы, а биматериал находится под воздействием теплового потока. Сингулярные интегральные уравнения задачи решены численно методом механических квадратур. Исследовано влияние угла наклона внутренних трещин и их расположения на коэффициенты интенсивности теплового потока в вершинах межфазной трещины для разных коэффициентов теплопроводности материалов.

Ключевые слова: биматериал, граница раздела, коэффициент теплопроводности, коэффициент интенсивности теплового потока, сингулярное интегральное уравнение.

Введение

Слоистые композитные материалы, в частности биматериалы (двухкомпонентные материалы), используются при производстве изделий и конструкций, которые подвергаются механическим и тепловым нагрузкам. Наличие трещин, особенно межфазных, может влиять на эксплуатационные свойства этих материалов. Для исследования разрушения материалов и их соединений важным направлением является моделирование взаимодействия внутренних трещин с межфазной. Многочисленные исследования посвящены задачам взаимодействия трещин в однородном материале, обзор исследований можно найти в работе [6]. Системы термоизолированных трещин в биматериале под воздействием теплового источника и теплового потока были рассмотрены в работах [7; 8]. В работе [1] получены аналитические решения задач теплопроводности с помощью метода малого параметра для случая, когда длина межфазной трещины намного больше, чем длина внутренних трещин, а малый параметр – это отношение

характерной длины внутренней трещины к межфазной. В работе [2] получены численные решения сингулярных интегральных уравнений задач теплопроводности под действием тепловых нагрузок для частного случая взаимодействия двух трещин и проведено сравнение с аналитическим решением.

В данной работе рассматривается задача о взаимодействии частично теплопроницаемых трещин, когда биматериал находится под действием теплового потока. При численном решении данной задачи сделан параметрический анализ влияния близко расположенных внутренних трещин на коэффициенты интенсивности теплового потока (КИТП) [4] в вершинах межфазной трещины. Рассматриваются разные сочетания материалов.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим двухкомпонентный материал (биматериал) с разными коэффициентами теплопроводности k_1 и k_2 , находящийся под действием теплового потока интенсивностью q . На границе раздела материалов выполняются условия идеального контакта, за исключением участка, где расположена межфазная трещина длиной $2a_0$. Один из материалов D_1 ($y > 0$) содержит внутренние трещины длиной $2a_k$ (рис. 1).

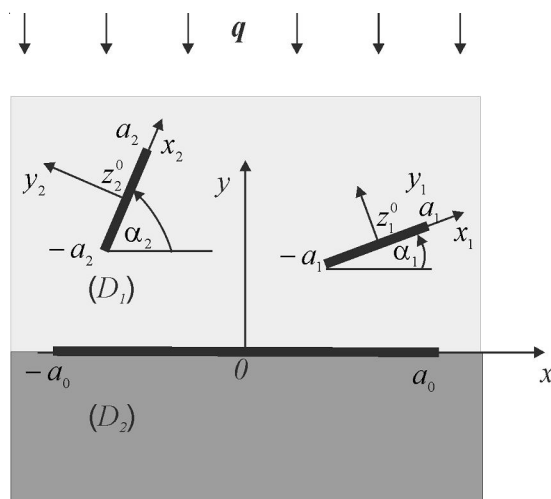


Рис. 1. Межфазная и внутренние трещины под действием теплового потока

Рассматриваем модель частично теплопроницаемых трещин [5]. Коэффициент теплопроницаемости поверхностей трещин является функцией, изменяющейся от 0 до 1 ($0 \leq \eta(x) \leq 1$); $\eta(x) = 0$ соответствует случаю теплоизолированных трещин; $\eta(x) = 1$ – случаю полностью теплопроницаемых трещин. В данной работе рассматриваем случай $\eta(x) = \text{const}$.

В рассматриваемой задаче неизвестными будут $\gamma'_k(t)$ – производные скачков температуры на линиях трещин, где $2\gamma_k = T_k^+ - T_k^-$. Здесь и далее знаками «+» и «-» обозначены граничные значения, принимаемые функциями соответственно на верхнем и нижнем краях трещин. Система сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных $\gamma'_k(t)$ на линиях теплопроницаемых трещин получена в работе [1]. Для одной межфазной и двух внутренних трещин система уравнений задачи будет иметь следующий вид:

$$\int_{-a_0}^{a_0} \frac{\gamma'_0(t)}{t-x} dt + (1-\eta_0(x)) \int_{-a_1}^{a_1} P_{01}(t,x)\gamma'_1(t) dt + (1-\eta_0(x)) \int_{-a_2}^{a_2} P_{02}(t,x)\gamma'_2(t) dt = \frac{1}{2} \frac{\pi}{k_1} q_0(x)(1-\eta_0(x))(1+k_1/k_2), \quad |x| < a_0, \quad (1)$$

$$(1 - \eta(x)) \frac{2}{1 + k_1/k_2} \int_{-a_0}^{a_0} P_{10}(t, x) \gamma'_0(t) dt + \int_{-a_1}^{a_1} \frac{\gamma'_1(t)}{t - x} dt + \int_{-a_2}^{a_2} P_{12}(t, x) \gamma'_2(t) dt = \frac{\pi}{k_1} q_1(x) (1 - \eta(x)), \quad |x| < a_1, \quad (2)$$

$$(1 - \eta(x)) \frac{2}{1 + k_1/k_2} \int_{-a_0}^{a_0} P_{20}(t, x) \gamma'_0(t) dt + \int_{-a_1}^{a_1} P_{11}(t, x) \gamma'_1(t) dt + \int_{-a_2}^{a_2} \frac{\gamma'_2(t)}{t - x} dt = \frac{\pi}{k_1} q_2(x) (1 - \eta(x)), \quad |x| < a_2, \quad (3)$$

где P_{nk} – регулярные ядра, содержащие геометрию задачи,

$$P_{nk}(t, x) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_n}}{te^{i\alpha_k} + z_k^0 - xe^{i\alpha_n} - z_n^0} \right]. \quad (4)$$

Система уравнений дополняется условиями

$$\int_{-a_k}^{a_k} \gamma'_k(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \quad (5)$$

обеспечивающими однозначность функции γ'_k при обходе контура трещин.

В уравнениях (1)–(3) $q_0(x)$ и $q_n(x)$ ($n = 1, 2$) определяли по формулам:

$$q_0(x) = -k_j \frac{\partial T_j^0}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad q_n(x_n) = -k_j \frac{\partial T_j^0}{\partial y_n} \Big|_{y_n=0}, \quad (6)$$

где $T_j^0(x, y)$ – температурное поле в бездефектном материале, и в случае воздействия теплового потока интенсивности q функция T_j^0 имеет вид $T_j^0(x, y) = qy/k_j$ ($j = 1, 2$).

2. Численное решение задачи

Решение системы сингулярных интегральных уравнений (1)–(3) получено численным методом механических квадратур [3]. Уравнения (1)–(5) приводим к безразмерному виду (подробности см. в [1]). Неизвестные функции в уравнениях (1)–(3) представим в виде

$$\gamma'_n(\xi) = \frac{u_n(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (7)$$

где $u_n(\xi)$ – новая неизвестная регулярная функция на отрезке $[-1, 1]$, $1/\sqrt{1 - \xi^2}$ – весовая функция, которая учитывает корневую особенность решения задачи о трещинах.

Используя квадратурные формулы для интегралов [3], уравнения (1)–(3) сводятся к системе $3 \times M$ (3 – количество трещин; M – число узлов) алгебраических уравнений для определения $3 \times M$ неизвестных $u_n(t_m)$ (более общее численное решение получено в работе [2]):

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^2 [u_k(t_m) P_{nk}(t_m, x_r)] = \pi q_n(x_r), \quad (8)$$

$$\sum_{m=1}^M u_n(t_m) = 0, \quad n = 0, 1, 2; \quad r = 1, 2, \dots, M-1, \quad (9)$$

где
$$t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M); \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1). \quad (10)$$

Здесь P_{nk} – дискретный аналог регулярных ядер (4) вместе с сингулярной частью, которая получается из (4) при $n = k$.

Таким образом, для системы сингулярных интегральных уравнений (1)–(3) построена соответствующая система алгебраических уравнений (8)–(9). После решения системы (8)–(10) определяем нормированные коэффициенты интенсивности тепловых потоков в вершинах (КИТП) трещин

$$\frac{K_{Tn}^{\pm}}{\sqrt{a_n q/k_1}} = \mu u_n(\pm 1) \quad (n = 0, 1, 2). \quad (11)$$

Здесь верхний знак относится к КИТП тепловых потоков в правой вершине трещины (K_{Tn}^+), а нижний – к левой (K_{Tn}^-). Величины $u_n(\pm 1)$ определяются выражениями [3]

$$u_n(1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} u_n(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{M} \pi; \quad u_n(-1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} u_n(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Численное решение справедливо для близкого расположения трещин и для сопоставимых размеров трещин. Для трех трещин имеем систему $3 \times M$ алгебраических уравнений, где M – число интерполяционных узлов; для хорошей точности решения брали $M = 70$.

КИТП (11) вводятся по аналогии с коэффициентами интенсивности напряжений в упругих задачах о трещинах [1; 4] и являются локальными характеристиками распределения тепла в окрестностях вершин трещин.

3. Параметрический анализ результатов

На рисунках 2–4 показаны графики зависимости нормированных КИТП в вершинах межфазной трещины от координаты центров внутренних трещин (рис. 2) и от угла наклона трещин (рис. 3 и 4). Графики получены при условии, что коэффициент теплопроводности межфазной трещины равен $\eta_0 = 0,5$, а коэффициенты теплопроводности внутренних трещин – $\eta_1 = \{0; 0,4; 0,8\}$. Межфазная трещина с центром в точке $z_0^0 = 0$ имеет длину $2a_0 = 2$. Следует отметить, что все величины представлены в безразмерном виде, z_k^0/a_0 и a_k/a_0 ($k = 0, 1, 2$), однако обозначения для них оставили прежние.

На рисунке 2 внутренние трещины с длинами $2a_1 = 2a_2 = 0,6$ расположены параллельно к межфазной трещине и находятся на расстояниях от нее $y_1^0 = 0,5$, $y_2^0 = 1,2$ в материале (D_1). Рисунки 2 и 3 соответствуют случаю, когда материал (D_1) имеет свойства материала *SiC*, а материал (D_2) – свойства *TiC*, тогда $k_1/k_2 = 3$ (см. таблицу).

Из рисунка 2 следует, что максимальное влияние происходит, когда внутренние трещины имеют координату $x^0 = 0,9$. Поэтому для более подробного анализа взаимодействия трещин на рисунках 3 и 4 рассматриваем случаи, когда внутренние трещины расположены в точках $z_1^0 = 0,9 + 0,5i$, $z_2^0 = 0,9 + 1,2i$ материала (D_1).

Из рисунка 3 следует, что при разных коэффициентах теплопроводности поверхности внутренних трещин (η_1) значительно изменяется КИТП в правой вершине межфазной трещины. Максимальное изменение наблюдается в случае, когда внутренние трещины параллельны межфазной ($\alpha_1 = 0^0$), и это изменение отсутствует при $\alpha_1 = 76^0$.

На рисунке 4 рассматривается влияние двух внутренних трещин на межфазную трещину, когда материал (D_1) имеет свойства материала *TiC*, а материал (D_2) – свойства *SiC*, тогда $k_1/k_2 = 0,33$ (см. таблицу).

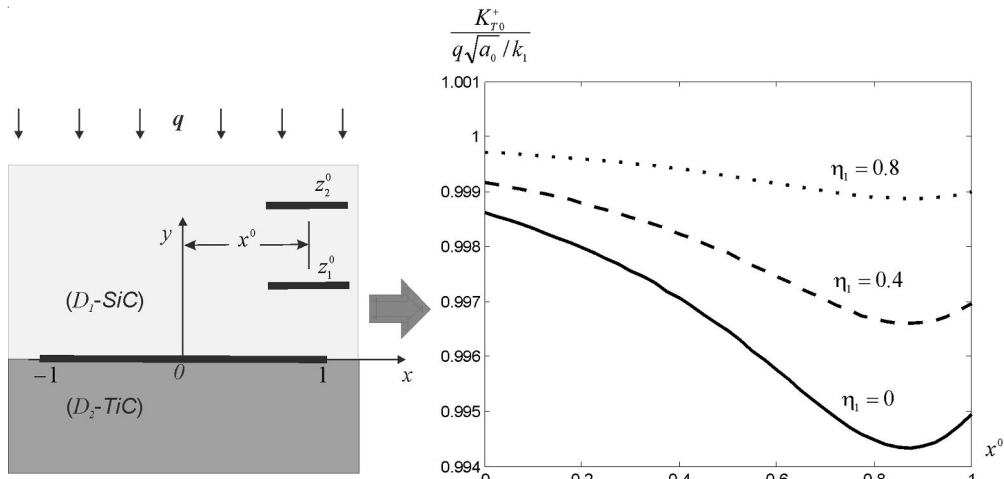


Рис. 2. Графики зависимости нормированного КИТП в правой вершине межфазной трещины от координаты x^0 горизонтального перемещения центра внутренних трещин при $\eta_0 = 0,5$. $z_1^0 = x^0 + 0,5i$, $z_2^0 = x^0 + 1,2i$

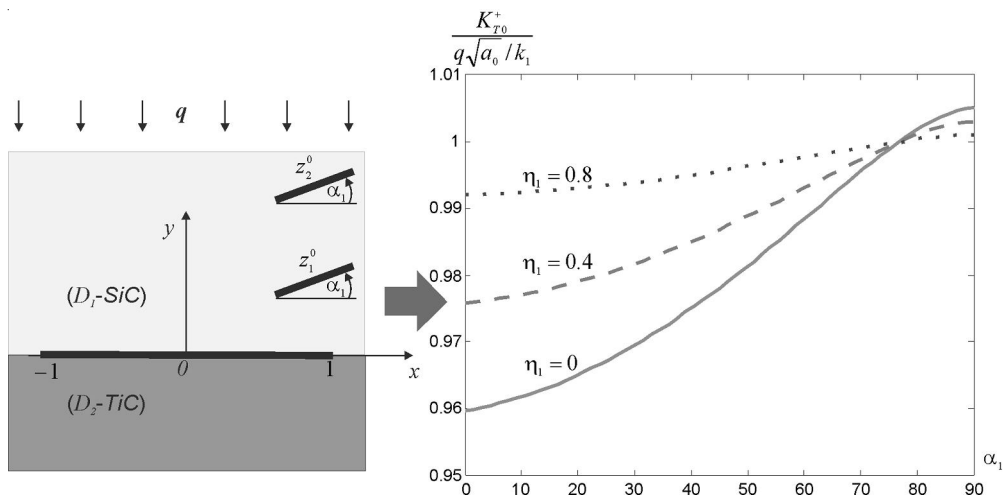


Рис. 3. Графики зависимости нормированного КИТП в правой вершине межфазной трещины от угла наклона внутренних трещин α_1 при $\eta_0 = 0,5$. $z_1^0 = 0,9 + 0,5i$, $z_2^0 = 0,9 + 1,2i$, $k_2/k_1 = 3$

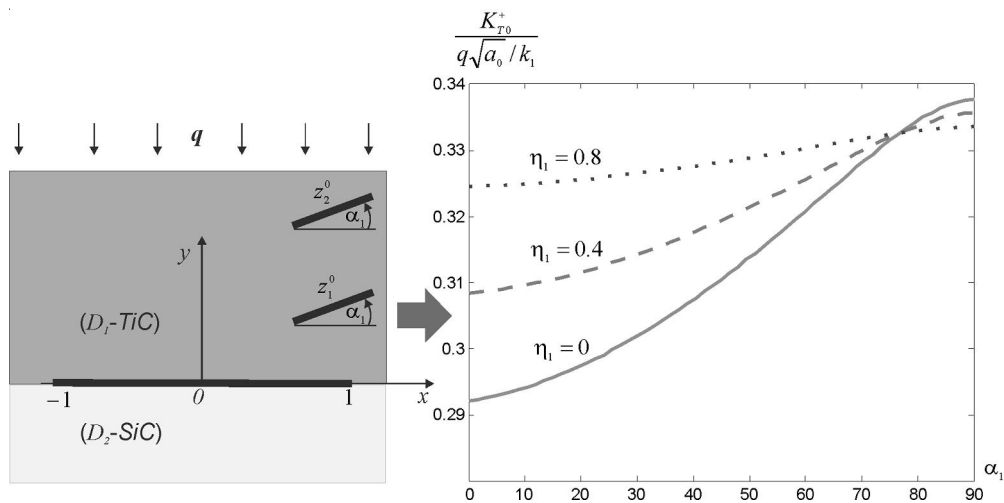


Рис. 4. Графики зависимости нормированного КИТП в правой вершине межфазной трещины от угла наклона внутренних трещин α_1 при $\eta_0 = 0,5$. $z_1^0 = 0,9 + 0,5i$, $z_2^0 = 0,9 + 1,2i$, $k_1/k_2 = 0,33$

Из рисунка 4 видно, что КИТП численно уменьшается при уменьшении k_1 / k_2 , но его характер изменения остается таким же.

В таблице приведен анализ численного значения нормированного КИТП в правой и левой вершинах межфазной трещины при наличии внутренних трещин, при разных сочетаниях материалов. Геометрическое расположение и параметры трещин такие же, как на рисунках 3 и 4. Рассматривается случай коллинеарных трещин, то есть $\alpha_1 = 0^0$. Коэффициент теплопроницаемости межфазной трещины равен 0,5, а коэффициент теплопроницаемости внутренних трещин – 0,4.

D_1 / D_2 – сочетание материалов	k_1 / k_2	$\frac{K_{T_0}^+}{q\sqrt{a_0} / k_1}$	$\frac{K_{T_0}^-}{q\sqrt{a_0} / k_1}$	$\frac{K_{T_0}^{\prime\pm}}{q\sqrt{a_0} / k_1}$	$\Delta K^+, \%$	$\Delta K^-, \%$
<i>SiC / TiC</i>	60 / 20	0,9753	1,0016	1	-2,47	+0,16
<i>TiC / SiC</i>	20 / 60	0,3077	0,3342	0,3325	-7,46	+0,51
<i>Al₂O₃ / SiC</i>	18 / 60	0,3002	0,3267	0,325	-7,63	+0,52
<i>TiC / ZrO₂</i>	20 / 2	2,7254	2,7516	2,75	-0,89	+0,06
<i>TiC / Al₂O₃</i>	20 / 18	0,5028	0,5292	0,5275	-4,68	+0,32
<i>SiC / ZrO₂</i>	60 / 2	7,7254	7,7516	7,75	-0,32	+0,02

Таким образом, k_j – коэффициент теплопроводности материалов (Вт/(м*К)). $\frac{K_{T_0}^+}{q\sqrt{a_0} / k_1}$ – нормированный КИТП в правой вершине межфазной трещины. $\frac{K_{T_0}^-}{q\sqrt{a_0} / k_1}$ – нормированный КИТП в левой вершине межфазной трещины. $\frac{K_{T_0}^{\prime\pm}}{q\sqrt{a_0} / k_1}$ – нормированный КИТП в левой и правой вершинах межфазной трещины при отсутствии внутренних трещин [1]:

$$\frac{K_{T_0}^{\prime\pm}}{q\sqrt{a_0} / k_1} = (1 - \eta_0) \frac{1}{2} (m + 1), \text{ где } \eta_0 = 0,5, m = k_1 / k_2.$$

ΔK^\pm – уменьшение или увеличение (отличие в %) нормированного КИТП в вершинах межфазной трещины при наличии внутренних трещин вычисляли по формуле:

$$\Delta K^\pm = \frac{\frac{K_{T_0}^\pm}{q\sqrt{a_0} / k_1} - \frac{K_{T_0}^{\prime\pm}}{q\sqrt{a_0} / k_1}}{\frac{K_{T_0}^{\prime\pm}}{q\sqrt{a_0} / k_1}} \times 100\%, \tag{12}$$

Из таблицы следует, что наличие внутренних трещин может как увеличивать, так и уменьшать КИТП по сравнению с коэффициентами для одной межфазной трещины.

Заключение

В работе исследовано влияние взаимодействия трещин на тепловые потоки в биматериале. Показано значительное влияние тепловых характеристик биматериала, а именно, коэффициентов теплопроницаемости трещин и тепловых свойств материалов, и геометрических углов наклона внутренних трещин и их расположения на коэффициенты интенсивности тепловых потоков в вершинах межфазной трещины. Изменение коэффициента интенсивности теплового потока в вершинах межфазной трещины приводит к существенной неоднородности тепловых полей в этих областях, что, в свою очередь, приводит к нарастанию деформаций и соответствующих напряжений на границе соединения материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ордян, М. Г. Задача теплопроводности о взаимодействии частично теплопроницаемых трещин в двухкомпонентном материале под действием теплового потока / М. Г. Ордян, В. Е. Петрова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2009. – № 1. – С. 141–149.
2. Ордян, М. Г. Сравнение аналитического и численного решений задач теплопроводности для биматериала под действием тепловых нагрузок / М. Г. Ордян, В. Е. Петрова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 127–138.
3. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наук. Думка, 1976. – 445 с.
4. Chao, C. K. Thermal problem of curvilinear cracks in bonded dissimilar materials with a point heat source / C. K. Chao, L. Y. Kuo // *Int. Journal Heat Mass Transfer*. – 1993. – Vol. 36, № 17. – P. 4085–4093.
5. Lee, K. Y. Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow / K. Y. Lee, S. J. Park // *Eng. Fract. Mech.* – 1995. – Vol. 50, № 4. – P. 475–482.
6. Petrova, V. A survey of macro-microcrack interaction problems / V. Petrova, V. Tamuzs, N. Romalis // *Appl. Mech. Rev.* – 2000. – Vol. 53, № 5. – P. 117–146.
7. Petrova, V. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack and internal defects / V. Petrova, K. Herrmann // *International Journal of Fracture*. – 2004. – Vol. 128. – P. 49–63.
8. Petrova, V. Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with a system of cracks / V. Petrova, S. Schmauder // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2011. – Vol. 55. – P. 148–157.

REFERENCES

1. Ordyan M.G., Petrova V.E. Zadacha teploprovodnosti o vzaimodeystvii chastichno teploproniцаemykh treshchin v dvukhkomponentnom materiale pod deystviem teplovogo potoka [Problem of Thermal Conduction of Partially Insulated Cracks in a Bimaterial Subjected to a Heat Flux]. *Vestnik Voronezhskovo gosudarstvenno universiteta. Seria: Fizika. Matematika*, 2009, no. 1, pp. 141-149.
2. Ordyan M.G., Petrova V.E. Sravnenie analiticheskogo i chislennogo resheniy zadach teploprovodnosti dlya bimateriala pod deystviem teplovykh nagruzok [Comparison of Analytical and Numerical Solutions of Heat Conduction Problems for a Bimaterial Subjected to Thermal Loads]. *Vestnik Voronezhskovo gosudarstvenno universiteta. Seria: Fizika. Matematika*, 2014, no. 1, pp. 127-138.
3. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. *Raspredelenie napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Stress Distribution Around Cracks in Plates and Shells]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1976. 445 p.
4. Chao C.K., Kuo L.Y. Thermal Problem of Curvilinear Cracks in Bonded Dissimilar Materials With a Point Heat Source. *Int. Journal Heat Mass Transfer*, 1993, vol. 36, no. 17, pp. 4085-4093.
5. Lee K.Y., Park S.J. Thermal Stress Intensity Factors for Partially Insulated Interface Crack Under Uniform Heat Flow. *Eng. Fract. Mech.*, 1995, vol. 50, no. 4, pp. 475-482.
6. Petrova V., Tamuzs V., Romalis N. A Survey of Macro-Microcrack Interaction Problems. *Appl. Mech. Rev.*, 2000, vol. 53, no. 5, pp. 117-146.
7. Petrova V. Herrmann K. Thermal Crack Problems for a Bimaterial With an Interface Crack and Internal Defects. *International Journal of Fracture*, 2004, vol. 128, pp. 49-63.
8. Petrova V., Schmauder S. Thermal Fracture of a Functionally Graded/Homogeneous Bimaterial With a System of Cracks. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2011, vol. 55, pp. 148-157.

NUMERICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF THE INTERACTION
OF PARTIALLY INSULATED CRACKS
IN A TWO-COMPONENT MATERIAL SUBJECTED TO A HEAT FLUX

Mikael Gareginovich Ordyan

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Theoretical and Applied Mechanics,
Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering
omg84@mail.ru
20-letiya Oktyabrya St., 84, 394018 Voronezh, Russian Federation

Vera Evgenyevna Petrova

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor, Department of Mathematics and Applied Analysis,
Voronezh State University
veraep@gmail.com
Universitetskaya Sq., 1, 394018 Voronezh, Russian Federation

Abstract. The paper is devoted to a heat conduction problem for two-component materials (bimaterials) with a system of cracks, i.e. an interface crack and internal cracks in one of the materials. It is supposed that the cracks are partially thermal insulated, and the bimaterial is subjected to a heat flux applied at infinity and normal to the interface. Previously obtained system of singular integral equations is used, where the unknowns are the derivatives of the temperature jumps on the crack lines. The regular kernels of the equations contain the geometry of the problem, i.e. the coordinates of the crack centers, inclination angles of the cracks to the interface and crack lengths. The singular integral equations were solved numerically using the quadrature formulas based on the Chebyshev polynomials. Then, the local characteristics of the heat distribution near the crack tips, namely, the thermal intensity factors, were obtained. The thermal intensity factors are an analogue of the stress intensity factors in the fracture mechanics. The influence of the inclination angles of internal cracks and their location on the thermal intensity factors in the tips of the interface crack was analysed for different thermal conductivity coefficients of the constituent materials and for different parameters of thermal permeability of the crack surfaces. The following combinations of materials were used: TiC/SiC, Al₂O₃/SiC, TiC/Al₂O₃, TiC/ZrO₂. It was shown that internal cracks can either decrease or increase the thermal intensity factors at the interface crack tips in comparison to the results for a single interface crack. The variation of the thermal intensity factors in the vicinity of the interface crack causes essential non-homogeneity of the heat fluxes in these domains which could lead to high residual stresses at the interface.

Key words: bimaterial, interface, coefficient of thermal conductivity, heat flux intensity factor, singular integral equation.