DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.3.3

УДК 51-74
ББК 22.161.6

# КОНВЕКТИВНЫЙ АТМОСФЕРНЫЙ ПЕРЕНОС ЗАГРЯЗНЯЮЩЕЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ СУБСТАНЦИИ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ НАБОРЕ ТОЧЕК

**Евангелина Евгеньевна Черемухина**

Магистрант кафедры природоохранного и гидротехнического строительства,
Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
evangelinas@list.ru
ул. Молодогвардейская, 194, 443001 г. Самара, Российская Федерация

**Владимир Геннадьевич Мосин**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
Самарский государственный архитектурно-строительный университет
yanbacha@yandex.ru
ул. Молодогвардейская, 194, 443001 г. Самара, Российская Федерация

**Аннотация.** В статье предложен алгоритм построения функции плотности загрязняющей аэрозольной субстанции на выпуклой оболочке произвольного набора точек при заданной плотности на границе этой области и известных значениях воздушного потока в каждой из точек данного набора. Он позволяет, исходя из конечного набора метеорологических данных в вершинах триангуляции, получить квазирешение задачи конвективного переноса в виде кусочно-постоянной функции координат.

**Ключевые слова:** линейная интерполяция, конвекция, массоперенос, математическое моделирование, метод конечных элементов.

## Введение

С математической точки зрения мониторинг экологической ситуации состоит в описании процессов эмиссии, распространения и нейтрализации загрязняющей аэрозольной субстанции в атмосферном воздухе, и есть целый ряд моделей, описывающих эти процессы. Все они в той или иной форме опираются на закон сохранения массы и для решения соответствующего уравнения используют сеточные методы (см.: [3; 4; 6; 7]). Многие модели реализованы в виде компьютерных систем для расчета распространения в атмосфере загрязняющих веществ и вполне эффективны [2]. Вместе с тем сеточные методы требуют значительных вычислительных ресурсов, поэтому весьма интересно найти решение не на сетках, а на конечных элементах.

Если на местности в ограниченной области расположены несколько станций метеонаблюдения, которые фиксируют направление и скорость ветра, то, применяя к станциям алгоритм какой-либо триангуляции, получим разбиение области на конечные элементы: треугольники этой триангуляции. Значения векторов воздушного потока, зафиксированные в вершинах триангуляции, позволяют интерполировать их линейно на каждом из треугольников и получить на каждом из них описание поля воздушного потока как функции пространственных координат. Тем самым задача конвективного переноса загрязняющей аэрозольной субстанции в интересующей нас области сводится к серии таких задач на конечном наборе треугольников.

В настоящей работе мы даем алгоритм, который позволяет, исходя из конечного набора метеорологических данных в вершинах триангуляции, получить квазирешение задачи конвективного переноса в виде кусочно-постоянной функции координат.

## 1. Перенос на треугольнике

Пусть $S$ – единичный двумерный симплекс с вершинами $M_1(0,0)$, $M_2(1,0)$ и $M_3(0,1)$, пусть в вершинах $M_i$ заданы векторы $v_i$, означающие скорость воздушного потока, и пусть $v(x, y)$ – векторное поле, которое получается линейной интерполяцией векторов $v_1$, $v_2$, $v_3$. Рассмотрим прямую призму $P$ высоты $h$, построенную на симплексе $S$. Если в вершинах симплекса $S$ известны значения векторов

$$v(M_1)=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix},\quad v(M_2)=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix},\quad v(M_3)=\begin{pmatrix}a_3\\b_3\end{pmatrix}, \tag{1}$$

а двумерное векторное поле $v(x, y)$ на $S$ получается из этих значений путем линейной интерполяции как в [10]:

$$v(x,y)=\begin{pmatrix}(a_2-a_1)x+(a_3-a_1)y+a_1\\(b_2-b_1)x+(b_3-b_1)y+b_1\end{pmatrix}, \tag{2}$$

то трехмерное векторное поле $w(x, y, z)$ вида

$$v(x,y)=\begin{pmatrix}(a_2-a_1)x+(a_3-a_1)y+a_1\\(b_2-b_1)x+(b_3-b_1)y+b_1\\((a_1-a_2)+(b_1-b_3))z\end{pmatrix} \tag{3}$$

является трехмерным расширением поля $v(x,y)$ на $P$ и удовлетворяет условию соленоидальности:

$$\iint_{\sigma} w d\sigma = 0\,, \tag{4}$$

где σ означает полную поверхность призмы $P$ [9].

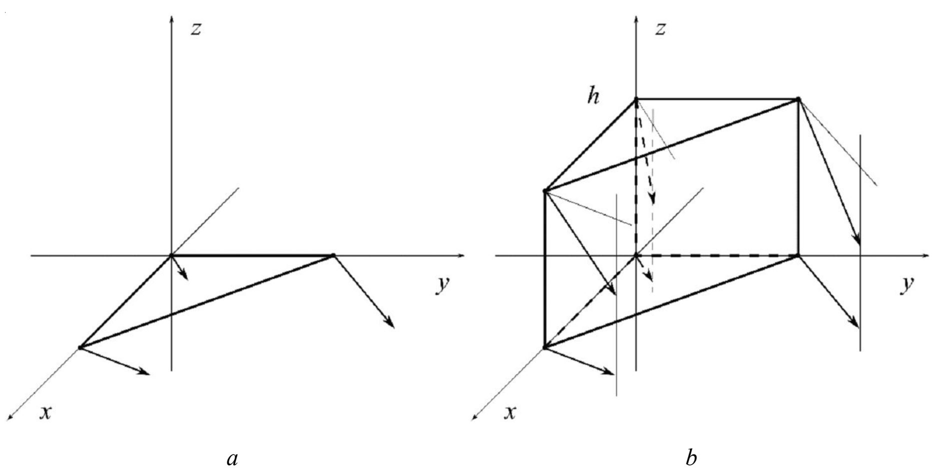



Рис. 1. Трехмерное расширение векторного поля:

*a* – двумерные векторы потока $v(x, y)$ в вершинах симплекса;
*b* – трехмерные векторы потока $w(x, y, z)$ в вершинах призмы

Обозначим $l_i$ стороны симплекса, пронумеровав их от нуля против часовой стрелки:

$$l_1 = M_1M_2, \quad l_2 = M_2M_3, \quad l_3 = M_3M_1 .$$

Пусть $\sigma_i$ – боковые грани призмы $P$, построенные на сторонах $l_i$ симплекса $S$, пусть $\sigma_0$ – нижняя, а $\sigma_4$ – верхняя грань призмы $P$, и пусть $\Omega_i$ означает объем воздуха, проходящий за единицу времени через грань $\sigma_i$. С учетом того что объем потока, проходящий через поверхность за единицу времени, вычисляется как поверхностный интеграл, имеем

$$\Omega_i = \iint_{\sigma_i} w d\sigma. \tag{6}$$

В [9] мы показали, что объемы $\Omega_i$ воздушных потоков, проходящих через грани $\sigma_i$ призмы $P$ за единицу времени, равны:

$$\Omega_1 = \frac{b_1 + b_2}{2} h , \tag{7}$$

$$\Omega_2 = -\left(\frac{a_2 + a_3}{2} + \frac{b_2 + b_3}{2}\right) h , \tag{8}$$

$$\Omega_3 = \frac{a_3 + a_1}{2} h , \tag{9}$$

$$\Omega_4 = -\left(\frac{a_1 - a_2}{2} + \frac{b_1 - b_3}{2}\right) h , \tag{10}$$

при этом $\Omega_0 = 0$, положительное значение $\Omega_i$ означает объем входящего потока, а отрицательное – объем исходящего.

Пусть на гранях призмы $P$ известна объемная плотность $\rho(x, y, z)$ загрязняющей аэрозольной субстанции, причем:

$$\rho(x, y, z) = \rho_i \quad \forall \ (x, y, z) \in \sigma_i , \quad i \neq 4 , \tag{11}$$

$$\rho(x, y, z) = 0 \quad \forall \ (x, y, z) \in \sigma_4 . \tag{12}$$

**Определение 1.** Пусть векторы $v_i$ и скаляры $\rho_i$ не зависят от времени, и пусть загрязняющая аэрозольная субстанция не диффундирует, не вступает в химические реакции нейтрализации с веществами окружающей среды и не выпадает в осадок. Решением стационарной задачи конвективного переноса на двумерном единичном симплексе $S$ будем называть среднюю объемную плотность $\rho_s$ загрязняющей аэрозольной субстанции внутри призмы $P$.

Для решения этой задачи введем понятие противоречия между сторонами симплекса и направлениями воздушного потока. Если

$$l_1 = \begin{cases} x = \tau, \\ y = 0, \end{cases} \quad l_2 = \begin{cases} x = 1 - \tau, \\ y = \tau, \end{cases} \quad l_1 = \begin{cases} x = 0, \\ y = 1 - \tau, \end{cases} \quad \tau \in [0,1] , \tag{13}$$

то векторное поле $v(x, y)$, зависящее на симплексе $S$ от двух переменных $x$ и $y$, на его границах зависит от одной переменной $\tau$. Обозначим $v_i(\tau)$ сужение векторного поля $v(x, y)$ на $i$-ю сторону симплекса.

**Определение 2.** Пусть $n_i$ – вектор единичной нормали к стороне $l_i$, направленный внутрь симплекса. Функцией противоречия стороны $l_i$ будем называть скалярное произведение:

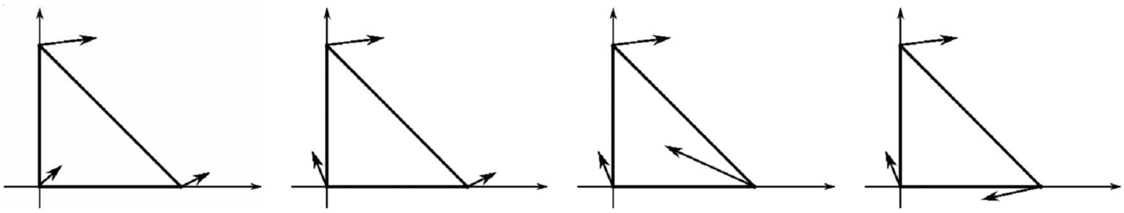
$$\delta_i(\tau) = (v_i(\tau); n_i) , \quad \tau \in [0,1] . \tag{14}$$

**Определение 3.** Сторону $l_i$ симплекса $S$ будем называть непротиворечивой, если ее функция противоречия не меняет свой знак на отрезке [0; 1]:

$$\delta_i(\tau_1)\delta_i(\tau_2) \geq 0 \quad \forall \;\; \tau_1, \tau_2 \in [0,1]. \tag{15}$$

В противном случае будем называть сторону противоречивой.

**Определение 4.** Симплекс $S$ будем называть непротиворечивым, если все его стороны непротиворечивы. Если хотя бы одна из сторон симплекса противоречива, будем говорить, что симплекс противоречив.



*a* *b* *c* *d*

Рис. 2. Противоречия на симплексе:

*a* – противоречия отсутствуют; *b* – противоречия на одной стороне;
*c* – противоречия на двух сторонах; *d* – противоречивы все стороны

Пусть симплекс $S$ непротиворечив, пусть на нем линейно интерполировано векторное поле $v(x, y)$, которое расширено до поля $w(x, y, z)$ на призме $P$, и пусть объемная плотность загрязняющей атмосферной субстанции постоянна на каждой грани призмы: $\rho(x, y, z) = \rho_i$ для грани $\sigma_i$, причем $\rho_4 = 0$. Обозначим

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta_i(\tau) \geq 0 \;\forall\; \tau \in [0,1], \\ 0, & \text{если } \exists\, \tau \in [0,1] \text{ такое, что } \delta_i(\tau) < 0, \end{cases} \tag{16}$$

где $\delta_i(\tau)$ – функции противоречия сторон симплекса [1]. С учетом того что поток поля $w(x, y, z)$ не зависит от времени, а также того, что $\rho(x, y, z) = 0 \;\; \forall \;\; z \geq h$, можно показать [11], что средняя объемная плотность субстанции в призме $P$ вычисляется по формуле:

$$\rho_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} \delta_i \rho_i \Omega_i}{\sum_{i=1}^{4} \delta_i \Omega_i}, \tag{17}$$

где $\Omega_i$ – объемы, вычисляемые по формулам (7)–(10).

Пусть $T$ – невырожденный треугольник с вершинами $M_i(x_i, y_i)$, и пусть в его вершинах заданы векторы $v_i$. Линейно интерполируя значения векторов, получим векторное поле $v(x, y)$, определенное на произвольном невырожденном треугольнике $T$, подобно тому, как это делалось выше на единичном двумерном симплексе $S$. Рассмотрим прямую призму $P$ высоты $h$, построенную на треугольнике $T$. Для того чтобы поле $v(x, y)$ подчинялось условию соленоидальности, необходимо расширить его до трехмерного поля $w(x, y, z)$, причем, как и выше, это можно сделать следующим образом:

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix}, \qquad w(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \\ \alpha z \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где коэффициент $\alpha$ определяется исходя из закона сохранения массы в интегральной форме:

$$\sum_{i=0}^{4}\iint_{\sigma_i} w d\varpi = 0, \tag{19}$$

здесь $\sigma_{0,4}$ означают соответственно нижнюю и верхнюю грани призмы $P$, а $\sigma_{1,2,3}$ – боковые грани.

Пусть на гранях призмы $P$ известна объемная плотность $\rho(x, y, z)$ загрязняющей аэрозольной субстанции, причем:

$$\rho(x,y,z) = \rho_i \quad \forall\ (x,y,z) \in \sigma_i,\ \ i \neq 4, \tag{20}$$

$$\rho(x,y,z) = 0 \quad \forall\ (x,y,z) \in \sigma_4. \tag{21}$$

**Определение 5.** Пусть векторы $v_i$ и скаляры $\rho_i$ не зависят от времени, и пусть загрязняющая аэрозольная субстанция не диффундирует, не вступает в химические реакции нейтрализации с веществами окружающей среды и не выпадает в осадок. Решением стационарной задачи конвективного переноса на треугольнике $T$ будем называть среднюю объемную плотность $\rho_T$ загрязняющей аэрозольной субстанции внутри призмы $P$.

Если треугольник $T$ непротиворечив в смысле определений 2–4, то, подобно (17), средняя объемная плотность $\rho_T$ загрязняющей субстанции внутри призмы $P$ вычисляется как отношение объемов:

$$\rho_{\mathrm{T}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \delta_i \rho_i \Omega_i}{\sum_{i=1}^{4} \delta_i \Omega_i}, \tag{22}$$

где $\Omega_{1,2,3}$ – объемы воздушных потоков, проходящих за единицу времени через боковые грани призмы $P$; $\Omega_4$ – объем, проходящий через ее верхнюю грань, а коэффициенты $\delta_i$ равны 1 для входящих потоков, и 0 для исходящих.

Аффинно преобразуя плоскость, задачу конвективного переноса на треугольнике $T$ можно свести к задаче на симплексе $S$.

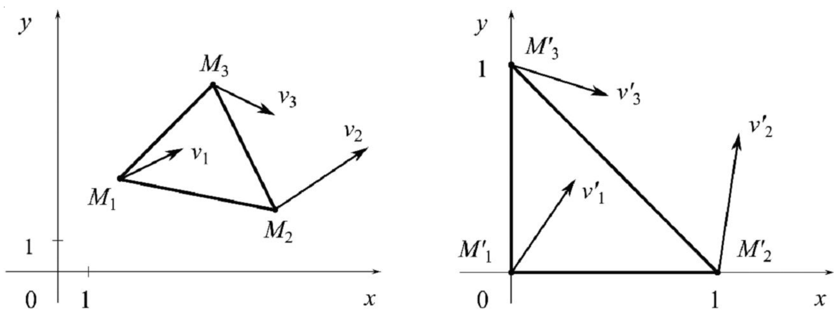



Рис. 3. Переход от данных на треугольнике $T$ к данным на симплексе $S$:
*a* – исходный треугольник $T$; *b* – результирующий симплекс $S$

**Определение 6.** Стандартизирующим аффинным преобразованием будем называть аффинное преобразование, переводящее треугольник $T$ в двумерный единичный симплекс $S$.

Понятно, что если треугольник $T$ обладает вершинами $M_i(x_i, y_i)$, то стандартизирующее аффинное преобразование задается следующей заменой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

причем под действием преобразования (23) вершины треугольника $T$ переходят в вершины симплекса $S$:

$$M_1(x_1, y_1) \to M'_1(0,0),\ M_2(x_2, y_2) \to M'_2(1,0),\ M_3(x_3, y_3) \to M'_3(0,1), \tag{24}$$

а векторы $v_i$ в вершинах треугольника $T$ – в векторы $v'_i$ в вершинах симплекса:

$$v_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \to v'_i = \begin{pmatrix} a'_i \\ b'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Преобразование (23) сохраняет отношение объемов, поэтому для того, чтобы получить решение (22) на треугольнике $T$, достаточно перевести данные на симплекс $S$ и найти решение в виде (17), применяя формулы (7)–(10) для вычисления объемов.

## 2. Перенос на произвольном наборе точек

Пусть на плоскости задан конечный набор точек $M_i$, и в каждой из точек задан вектор $v_i$. На выпуклой оболочке $\mathrm{Conv}(M_i)$ построим прямую призму $P$ высоты $h$, и пусть присутствующая в атмосфере загрязняющая аэрозольная субстанция обладает постоянной плотностью $\rho_i$ на боковых гранях призмы $P$ и нулевой плотностью на ее верхней грани.

**Определение 7.** Пусть векторы $v_i$ и скаляры $\rho_i$ не зависят от времени, и пусть загрязняющая аэрозольная субстанция не диффундирует, не вступает в химические реакции нейтрализации с веществами окружающей среды и не выпадает в осадок. Пусть $Tr$ – какая-либо триангуляция точек $M_i$, состоящая из треугольников $T_i$:

$$Tr = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}. \tag{26}$$

Квазирешением стационарной задачи конвективного переноса на наборе точек $M_i$ будем называть набор решений на треугольниках $T_i$:

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \tag{27}$$

полученных в смысле определения 5.

**Определение 8.** Решением стационарной задачи конвективного переноса на наборе точек $M_i$ будем называть непрерывную функцию $\rho(x, y)$, интерполирующую значения (27).

Если все треугольники триангуляции $Tr$ непротиворечивы, будем говорить, что триангуляция $Tr$ непротиворечива. Треугольник непротиворечивой триангуляции будем называть корректно определенным, если известны плотности $\rho_i$ на всех входящих относительно поля $v(x, y)$ боковых гранях прямой призмы $P$, построенной на этом треугольнике[2]. Класс корректно определенных треугольников триангуляции $Tr$ будем обозначать $CD(Tr)$.

Например, если набор из пяти точек $M_i$ триангулирован как на рисунке 4, и направления векторов $v_i$ таковы, как на рисунке 4$a$, то все треугольники триангуляции $Tr$ непротиворечивы и среди них имеется один корректно определенный треугольник $T_1$. После решения задачи на треугольнике $T_1$ корректно определенными становятся треугольники $T_2$ и $T_3$. После решения задачи на треугольниках $T_2$ и $T_3$ корректно определенным становится треугольник $T_4$. Таким образом, на каждом из треугольников триангуляции последовательно получаются решения в смысле определения 5, а совокупность этих решений образует квазирешение на триангуляции в смысле определения 7. Если же направления векторов $v_i$ таковы, как на рисунке 4$b$, то среди треугольников триангуляции них нет ни одного корректно определенного, и решить задачу ни на одном из них нельзя.

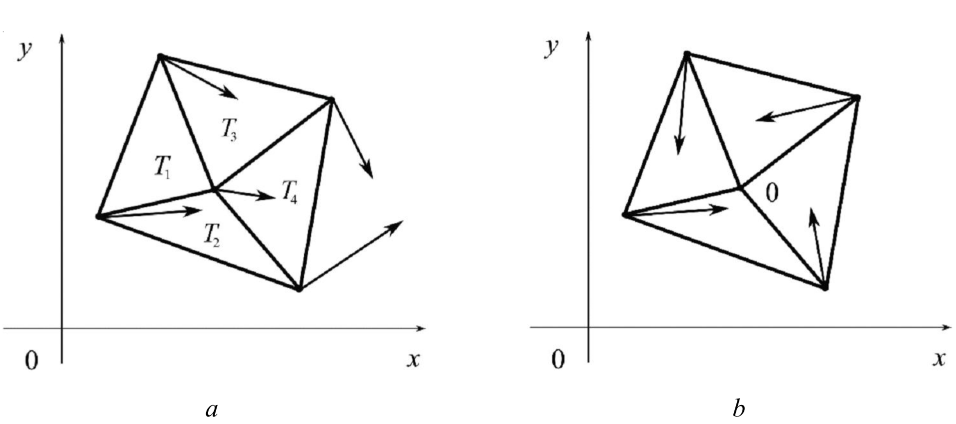



Рис. 4. Корректно и некорректно определенные треугольники:
*a* – в триангуляции имеется корректно определенный треугольник $T_1$;
*b* – в триангуляции нет ни одного корректно определенного треугольника

Однако решение возможно на объединении таких треугольников. Пусть $tr \subset Tr$ – подмножество треугольников из $Tr$, и пусть $D$ – объединение треугольников из $tr$. Область $D$ будем называть корректно определенной, если известны плотности $\rho_i$ на всех входящих относительно поля $v(x, y)$ боковых гранях прямой призмы $P$, построенной на этой области. Если корректно определенная область $D$ является связной, то решение стационарной задачи конвективного переноса на ней получается аналогично (22). А именно: пусть $\sigma_1$, $\sigma_2$, ..., $\sigma_k$ – боковые грани прямой призмы $P_D$, построенной на области $D$, и пусть $\Omega_i$ – объемы потоков, проходящих через эти грани за единицу времени. Пусть $\sigma_{k+1}$ – верхняя грань призмы $P_D$. Тогда объем потока, проходящего через верхнюю грань, вычисляется в силу закона сохранения массы:

$$\Omega_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} \Omega_i \,. \tag{28}$$

Объемы на боковых гранях вычисляются при помощи стандартизирующих аффинных преобразований (23), после выполнения которых применяются формулы (7)–(9), и каждый из полученных объемов умножается на модуль якобиана соответствующего стандартизирующего аффинного преобразования. После этого средняя объемная плотность загрязняющей аэрозольной субстанции внутри призмы $P_D$ вычисляется как отношение объемов:

$$\rho_{\mathrm{D}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \delta_i \rho_i \Omega_i}{\sum_{i=1}^{k+1} \delta_i \Omega_i}, \tag{29}$$

где коэффициенты $\delta_i$ равны 1 для входящих потоков, и 0 – для исходящих.

Таким образом, для любой непротиворечивой триангуляции имеется алгоритм вычисления квазирешения задачи конвективного переноса в смысле определения 7. Последовательность исполнения алгоритма такова.

**Шаг 1.** Обозначим $Tr_0$ исходную триангуляцию: $Tr_0 = Tr$. Допустим, среди треугольников триангуляции $Tr_0$ имеется хотя бы один корректно определенный треугольник $T_{i0}$. Решая задачу на треугольнике $T_{i0}$, получаем решение $\rho_{i0}$.

**Шаг 2.** Исключим треугольник $T_{i0}$ из триангуляции $Tr_0$, получим триангуляцию $Tr_1 = Tr_0 \setminus T_{i0}$. Допустим, среди треугольников триангуляции $Tr_1$ имеется хотя бы один корректно определенный треугольник $T_{i1}$. Решая задачу на треугольнике $T_{i0}$, получаем решение $\rho_{i1}$.

**Шаг 3.** Исключим треугольник $T_{i1}$ из триангуляции $Tr_1$, получим триангуляцию $Tr_2 = Tr_1 \setminus T_{i1}$.

И так далее.

**Шаг k.** Допустим, в $k$-й триангуляции $Tr_k = Tr_{k-1} \setminus T_{ik-1}$ нет ни одного корректно определенного треугольника. Тогда объединение всех еще не исключенных треугольников является корректно определенной областью. Обозначим ее $D$. Если область $D$ является связной, то, применяя (29), решаем на ней задачу и найденное значение $\rho_D$ присваиваем всем треугольникам области $D$. Если же область $D$ состоит из нескольких компонент связности, то поступаем точно так же с каждой из компонент связности.

### 3. Пример

Пусть на местности имеется одиннадцать станций метеонаблюдения, и пусть эти станции зафиксировали одиннадцать значений ветрового потока. Обозначим станции $M_i$, а полученные от них значения ветрового потока будем считать двумерными векторами $v_i$, приложенными к этим точкам.

$$\begin{array}{llll} M_1(2,8); & v_1=(0,0); & M_2(5,15); & v_2=(1,-1) \\ M_3(6,2); & v_3=(1,1); & M_4(8,10); & v_4=(2,1); \\ M_5(11,16); & v_5=(3,0); & M_6(12,5); & v_6=(0,0); \\ M_7(13,9); & v_7=(2,1); & M_8(17,1); & v_8=(1,0); \\ M_9(17,7); & v_9=(1,2); & M_{10}(18,13); & v_{10}=(3,1); \\ M_{11}(20,9); & v_{11}=(2,2). & & \end{array} \tag{30}$$

Пусть везде на границе выпуклой оболочки $\mathrm{Conv}(M_i)$ средняя объемная плотность загрязняющей атмосферной субстанции постоянна и равна $\rho$, и везде выше высоты $h$ ее плотность равна нулю. Требуется описать функцию плотности внутри выпуклой оболочки $\mathrm{Conv}(M_i)$ как непрерывную функцию координат $\rho(x, y)$.

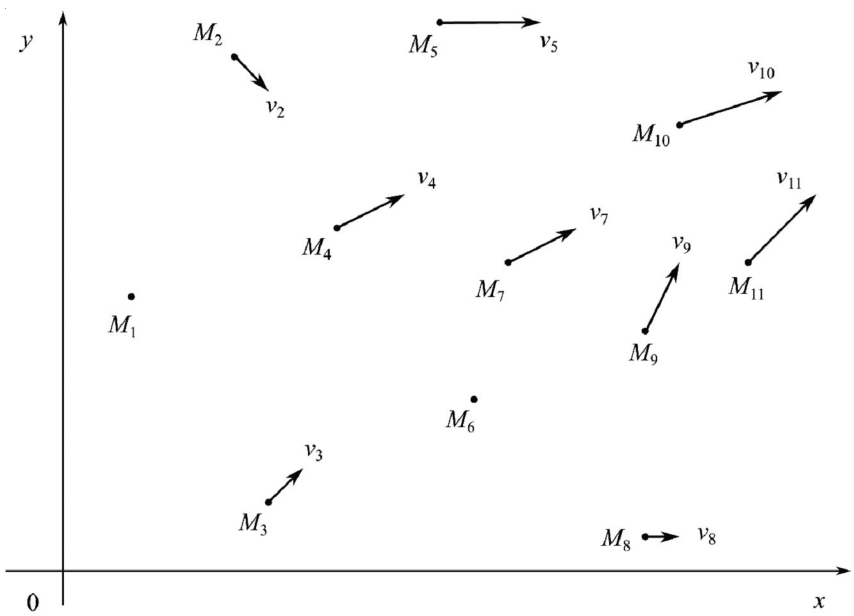



Рис. 5. Набор скоростей воздушного потока в точках $M_i$

Применим к точкам $M_i$ алгоритм какой-либо триангуляции. Получим триангуляцию $Tr$, состоящую из тринадцати треугольников $T_{ijk}$, каждый из которых нумеруется тремя индексами своих вершин $M_i$, $M_j$ и $M_k$.

$$Tr=\{T_{1,2,4}, T_{1,3,4}, T_{2,4,5}, T_{3,4,6}, T_{3,6,8}, T_{4,5,7}, T_{6,4,7}, T_{5,7,10}, T_{6,7,9}, T_{6,8,9}, T_{7,9,10}, T_{8,9,11}, T_{9,10,11}\}. \tag{31}$$

Мультииндексы $ijk$ упорядочены лексикографически. Для упрощения обозначений занумеруем треугольники в порядке их возрастания (см. рис. 6):

$$Tr = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}\}. \tag{32}$$

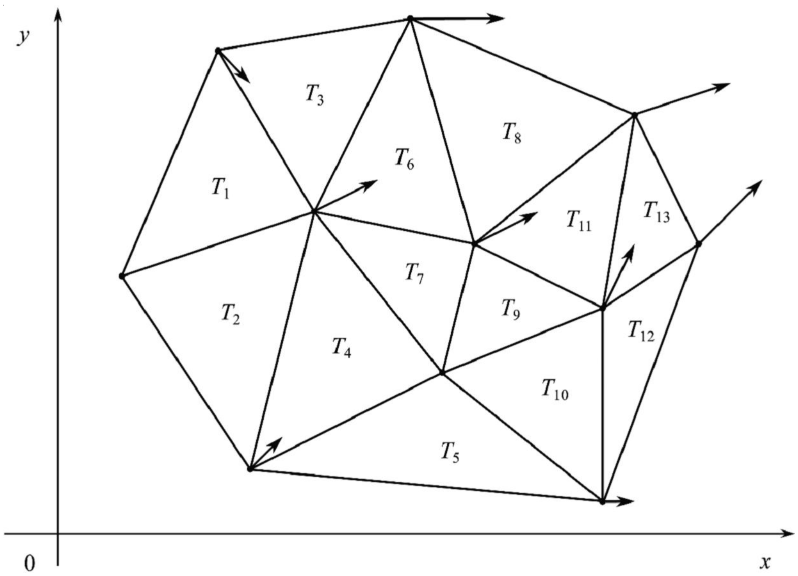



Рис. 6. Триангуляция исходного набора точек и наблюдаемые векторы скорости в вершинах триангуляции

Все ребра триангуляции $Tr$ непротиворечивы. Следовательно, триангуляция $Tr$ непротиворечива. Обозначим $Tr_0 = Tr$. Среди треугольников триангуляции $Tr_0$ лишь два принадлежат классу корректно определенных: $T_2, T_5 \in CD(Tr_0)$. Пусть теперь $Tr_1 = Tr_0 \setminus \{T_2, T_5\}$. Среди треугольников триангуляции $Tr_1$ три треугольника принадлежат классу корректно определенных: $T_1, T_4, T_{10} \in CD(Tr_1)$. Снова обозначим $Tr_2 = Tr_1 \setminus \{T_1, T_4, T_{10}\}$ и т. д. (рис. 7):

$$\begin{array}{ll}
Tr_0 = Tr & T_2, T_5 \in CD(Tr_0) \\
Tr_1 = Tr_0 \setminus \{T_2, T_5\} & T_1, T_4, T_{10} \in CD(Tr_1) \\
Tr_2 = Tr_1 \setminus \{T_1, T_4, T_{10}\} & T_3, T_7, T_{12} \in CD(Tr_2) \\
Tr_3 = Tr_2 \setminus \{T_3, T_7, T_{12}\} & T_6, T_9 \in CD(Tr_3) \\
Tr_4 = Tr_3 \setminus \{T_6, T_9\} & T_8 \in CD(Tr_4) \\
Tr_5 = Tr_4 \setminus \{T_8\} & T_{11} \in CD(Tr_5) \\
Tr_6 = Tr_5 \setminus \{T_{11}\} & T_{13} \in CD(Tr_6)
\end{array} \tag{33}$$

Средняя объемная плотность $\rho_i$ вычисляется в порядке, заданном триангуляциями (33):

$$\rho_2, \rho_5 \to \rho_1, \rho_4, \rho_{10} \to \rho_3, \rho_7, \rho_{12} \to \rho_6, \rho_9 \to \rho_8 \to \rho_{11} \to \rho_{13}. \tag{34}$$

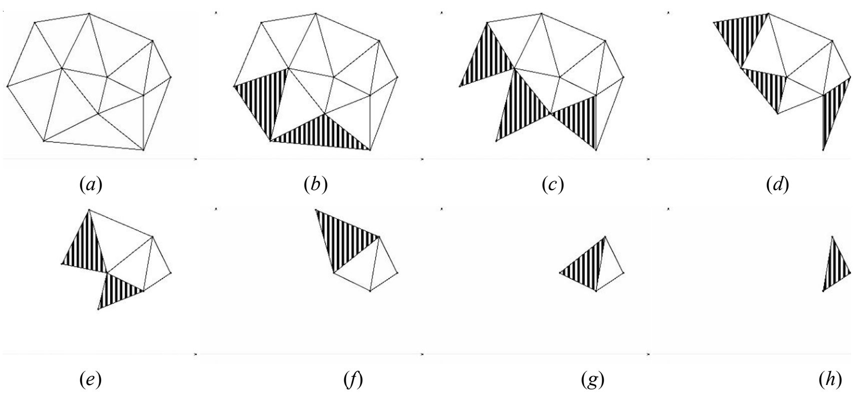



Рис. 7. Последовательность прохода корректно определенных треугольников в триангуляциях $Tr_0$, … $Tr_6$

Вычислим сначала среднюю объемную плотность $\rho_2$.

Так как треугольник $T_2$ обладает вершинами (2,8), (6,2) и (8,10), то под действием следующего стандартизирующего аффинного преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{35}$$

он переходит в единичный симплекс $S$ с вершинами (0,0), (1,0) и (0,1) соответственно. Далее, так как

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

то векторы в вершинах симплекса приобретают следующие координаты:

$$v'_1 = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$v'_2 = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$v'_3 = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -2 \\ 16 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

где вектор $v'_1$ привязан к точке (0,0), вектор $v'_2$ привязан к точке (1,0) и вектор $v'_3$ привязан к точке (0,1).

Пусть теперь $P$'– прямая призма высоты $h$, построенная на симплексе $S$. Пользуясь известными координатами векторов $v'_i$, по формулам (7)–(10), вычисляем объемы $\Omega'_i$ потока воздуха, проходящие через боковые и верхнюю грани призмы $P$'. Имеем:

$$\Omega'_1 = \frac{5}{44} h, \quad \Omega'_2 = -\frac{10}{44} h, \quad \Omega'_3 = -\frac{1}{44} h, \quad \Omega'_4 = \frac{6}{44} h. \tag{40}$$

С учетом того что через верхнюю грань в призму $P$' поступает воздух с нулевой плотностью загрязняющей субстанции, средняя объемная плотность в призме $P$' на симплексе $S$ равна:

$$\rho_S = \frac{\Omega'_1 \rho}{\Omega'_1 + \Omega'_4} = \frac{5}{11} \rho \approx 0{,}45\rho, \tag{41}$$

а это, в силу аффинной инвариантности средней объемной плотности, означает, что

$$\rho_2 \approx 0{,}45\rho. \tag{42}$$

Аналогично, отталкиваясь от треугольника $T_5$ триангуляции $Tr_0$, при помощи стандартизирующего аффинного преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{43}$$

вычисляем значение средней объемной плотности $\rho_5$:

$$\rho_5 = \rho. \tag{44}$$

После этого исключаем из триангуляции $Tr_0$ треугольники $T_2$ и $T_5$ и переходим к триангуляции $Tr_1$, в которой корректно определенными являются треугольники $T_1$, $T_4$ и $T_{10}$. Выполняем нужные стандартизирующие аффинные преобразования, вычисляем $\rho_1$, $\rho_4$ и $\rho_{10}$ и т. д.

Окончательно, после прохода всех триангуляций вплоть до $Tr_6$, имеем следующие значения средней объемной плотности $\rho_i$ на треугольниках $T_i$:

$$\begin{array}{llll} \rho_1 \approx 0{,}73\rho; & \rho_2 \approx 0{,}45\rho; & \rho_3 \approx 0{,}77\rho; & \rho_4 \approx 0{,}38\rho \\ \rho_5 = 1{,}00\rho & \rho_6 \approx 0{,}51\rho; & \rho_7 \approx 0{,}25\rho; & \rho_8 \approx 0{,}51\rho; \\ \rho_9 \approx 0{,}17\rho; & \rho_{10} \approx 0{,}17\rho; & \rho_{11} \approx 0{,}19\rho; & \rho_{12} \approx 0{,}08\rho; \\ \rho_{13} \approx 0{,}17\rho; & & & \end{array} \qquad (45)$$

и этот набор значений является квазирешением задачи конвективного переноса на триангуляции $Tr$. Если каждое из значений $\rho_i$ привязано к конкретной точке внутри треугольника $T_i$ (например, к центроиду треугольника), то, триангулируя эти точки, можно легко получить решение в смысле определения 8 путем линейной интерполяцией значений $\rho_i$.

### *ПРИМЕЧАНИЯ*

[1] Значения символов $\delta_i$ можно интерпретировать следующим образом: $\delta_i = 1$ для входящих потоков с положительными объемами $\Omega_i$, и $\delta_i = 0$ для исходящих потоков с отрицательными объемами $\Omega_i$ (нулевой поток считается входящим).

[2] Другими словами, треугольник корректно определен, если на нем возможно решение стационарной задачи конвективного переноса в смысле определения 5.

### *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П. С. Александров. – М. : Наука, 1968. – 912 с.

2. Белихов, А. Б. Современные компьютерные модели распространения загрязняющих веществ в атмосфере / А. В. Белихов, Д. Л. Леготин, А. К. Сухов // Вестник КГУ. – 2013. – № 1. – С. 14–19.

3. Берлянд, М. Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М. Е. Берлянд. – Л. : Гидрометеоиздат, 1985. – 271 с.

4. Берлянд, М. Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы / М. Е. Берлянд. – Л. : Гидрометеоиздат, 1975. – 448 с.

5. Мартинсон, Л. К. Дифференциальные уравнения математической физики / Л. К. Мартинсон, Ю. И. Малов. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 367 с.

6. Марчук, Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1982. – 320 с.

7. Ольшанский, М. А. Анализ многосеточного метода для уравнений конвекции-диффузии с краевыми условиями Дирихле / М. А. Ольшанский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 8. – С. 1450–1479.

8. Скворцов, А. В. Триангуляция Делоне и ее применение / А. В. Скворцов. – Томск : Изд-во ТГУ, 2002. – 128 с.

9. Черемухина, Е. Е. Линейно интерполированное векторное поле и выполнение условий соленоидальности / Е. Е. Черемухина, В. Г. Мосин // Международный научно-исследовательский журнал. – 2015. – № 11 (42), ч. 3. – С. 38–43.

10. Черемухина, Е. Е. Линии тока линейно интерполированного векторного поля / Е. Е. Черемухина, В. Г. Мосин // Научное обозрение. – 2015. – № 20. – С. 162–165.

11. Черемухина, Е. Е. Средняя объемная плотность аэрозольной субстанции в задаче конвективного переноса / Е. Е. Черемухина, В. Г. Мосин // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 4 (46), ч. 6. – С. 137–142.

*REFERENCES*

1. Aleksandrov P.S. *Lektsii po analiticheskoy geometrii, popolnennye neobkhodimymi svedeniyami iz algebry* [Lectures on Analytical Geometry , Supplemented by Essential Materials From Algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 912 p.
2. Belikhov A.B. Sovremennye kompyuternye modeli rasprostraneniya zagryaznyayushchikh veshchestv v atmosfere [Modern Computer Models of the Spread of Pollutants in the Atmosphere]. *Vestnik KGU*, 2013, no. 1, pp. 14-19.
3. Berlyand M.E. *Prognoz i regulirovanie zagryazneniya atmosfery* [Prediction and Control of Atmospheric Pollution]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1985. 271 p.
4. Berlyand M.E. *Sovremennye problemy atmosfernoy diffuzii i zagryazneniya atmosfery* [Modern Problems of Atmospheric Diffusion and Air Pollution]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1975. 448 p.
5. Martinson L.K., Malov Yu.I. *Differentsialnye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2006. 367 p.
6. Marchuk G.I. *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy* [Mathematical Modeling in Environmental Problem]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 320 p.
7. Olshanskiy M.A. *Analiz mnogosetochnogo metoda dlya uravneniy konvektsii-diffuzii s kraevymi usloviyami Dirikhle* [An Analysis of the Multigrid Method for Convection-Diffusion Equation With Boundary Conditions of the Dirichlet], 2004, vol. 44, no. 8, pp. 1450-1479.
8. Skvortsov A.V. *Triangulyatsiya Delone i ee primenenie* [Delaunay Triangulation and Its Application]. Tomsk, Izd-vo TGU, 2002. 128 p.
9. Cheremukhina E.E., Mosin V.G. Lineyno interpolirovannoe vektornoe pole i vypolnenie usloviya solenoidalnosti [Linear Interpolation of the Vector Field and the Condition of Solenoidality]. *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatelskiy zhurnal*, 2015, no. 11, pp. 38-43.
10. Cheremukhina E.E. Linii toka lineyno interpolirovannogo vektornogo polya [Current Lines of a Linearly Interpolated Vector Field]. *Nauchnoe obozrenie*, 2015, no. 20, pp. 162-165.
11. Cheremukhina E.E., Mosin V.G. Srednyaya obyemnaya plotnost aerozolnoy substantsii v zadache konvektivnogo perenosa [Average Bulk Density of the Aerosol Substance in the Problem of Convective Diffusion]. *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatelskiy zhurnal*, 2016, no. 4, pp. 137-142.


# CONVECTIVE ATMOSPHERIC TRANSPORT OF POLLUTING AEROSOL SUBSTANCE ON AN ARBITRARY SET OF POINTS


**Evangelina Evgenyevna Cheremukhina**

Master Student, Derartment of Nature-Protection and Hydraulic Engineering,
Samara State University of Architecture and Civil Engineering
evangelinas@list.ru
Molodogvardeyskaya St., 194, 443110 Samara, Russian Federation

**Vladimir Gennadyevich Mosin**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Higher Mathematics,
Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
yanbacha@yandex.ru
Molodogvardeyskaya St., 194, 443110 Samara, Russian Federation



**Abstract.** In this article we solve the stationary boundary problem of convective transport of polluting aerosol substance.The task conditions that some weather stations measure wind speed and direction at certain moment of time. According to our theory weather stations are the points at plane and weather information is the set of airflow two-dimensional vectors. The stations’ convex hull is the region of study. We suppose that polluting matter density is constant on every linear link of convex hull and it’s time-independent. We also suppose that polluting

aerosol substance is not diffusing, it doesn‘t react with the environment or precipitate. Based on these data and hypothesis we have to calculate the polluting matter density in any inside point of the convex hull.

At first, we solve the task in the simplest situation. We consider unit simplex and get explicit formulas for volumes of airflow that goes through simplex sides. If the volume is positive, the flow is incoming (if the volume is negative, the flow is outgoing). We expand the two-dimensional vector field to a three-dimensional vector field and assume that the vertical component of the three dimensional field has a zero density pollutant. We calculate the density of the pollutant inside the simplex based on the ratio of the incoming flows.

After this we take a look at a more complex situation. We take an arbitrary triangle, and transform it into a single simplex using a special affine transformation. This way, we calculate the density of the pollutant inside of the triangle using the formulas that we got previously.

And now we take a more general situation. If the number of points is more that three, we triangulate the set of points and get a set of triangles. For each triangle we solve the problems as mentioned above, in this way we obtain a set of densities. This set of densities we call a quasi-solution for a stationary boundary problem of convective transfer of pollutant. The quasi-solution is not a continuous function. That is why the quasi-solution can give only a rough estimation of the distribution of the pollutant inside of the research area. We interpolate the quasi-solution and as a result obtain a solution for a stationary boundary problem of convective transport of pollutant as a continuous function of coordinates.

**Key words:** linear interpolation, convection, mass transfer, mathematical modeling, finite elements method.