



DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.4.2>

УДК 519.63

ББК 22.311

## ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ И ДИФФУЗИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА

**Александр Викторович Боков**

Кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры естественнонаучных и гуманитарных дисциплин,  
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова,  
филиал в г. Пятигорске Ставропольского края  
av\_bokov@mail.ru  
ул. Кучуры, 8, 357500 г. Пятигорск, Российская Федерация

**Алексей Александрович Клячин**

Доктор физико-математических наук,  
заведующий кафедрой математического анализа и теории функций,  
Волгоградский государственный университет  
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru  
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Марина Александровна Корытова**

Кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики,  
Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)  
sma.59@mail.ru  
просп. Ленина, 76, 454080 г. Челябинск, Российская Федерация

**Аннотация.** Объектом исследования является математическая модель конвективного теплопереноса. Цель исследования — построение дискретного аналога для обобщенного дифференциального уравнения, описывающего предложенную математическую модель конвекции в вязкой несжимаемой жидкости.

**Ключевые слова:** конвекция, теплоперенос, математическая модель, обобщенное дифференциальное уравнение, дискретный аналог, контрольный объем, аппроксимация функции.

## Введение

Авторы статьи некоторое время занимались численным моделированием конвективного переноса. Для реализации математической модели было предложено использовать метод контрольного объема [5; 6]. Этот метод имеет ряд существенных преимуществ по сравнению с методом конечных разностей. Он гарантирует точное выполнение законов сохранения массы, количества движения, энергии на любой группе ячеек — контрольных объемов, а потому и во всей расчетной области. Для представления профилей функций между узлами сетки использовались различные шаблоны, аппроксимирующие точное решение, полученное аналитически для элементарного отрезка между соседними узлами. Применение шаблона на основе точного решения приводило к экспоненциальной схеме, требующей больших вычислительных ресурсов. Поэтому использование ее ранее считалось неэффективным. Кроме того, решения были получены для прямоугольных сеток. Дискретные аналоги и примеры расчетов на таких сетках можно найти в работах [1; 4; 7]. Использование таких же шаблонов для криволинейных систем координат приводило к большим вычислительным погрешностям, что с математической точки зрения было совершенно не оправдано. Многие прикладные задачи принципиально удобнее решать в криволинейных, например, в цилиндрических координатах. Но тогда для получения точных шаблонов нужны другие точные решения, учитывающие особенности криволинейных сеток. Современные требования к точности численных решений также изменились, и вычислительные мощности современных ЭВМ позволяют эффективно проводить сложные вычисления. Все это объясняет желание авторов получить более эффективный инструмент — расчетные схемы и алгоритмы, использующие в своей основе именно экспоненциальную схему для цилиндрической системы координат.

### 1. Математическая модель конвективного теплопереноса и обобщенное дифференциальное уравнение

Математическая модель свободной или вынужденной конвекции в вязкой несжимаемой жидкости получается на основе уравнений гидродинамики, тепло- и массообмена (см., например, [2]): уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{3} \eta \nabla \cdot (\nabla \cdot \bar{u}) + \rho \bar{g}, \quad (1)$$

уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}) = 0 \quad (2)$$

и уравнения переноса тепла (аналогичный вид имеет уравнение переноса массовой концентрации химической компоненты)

$$c\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla T \right) = \lambda \nabla^2 T. \quad (3)$$

В этих уравнениях скорость  $\bar{u}$  (векторная величина), давление  $p$ , температура  $T$  — зависимые переменные (неизвестные функции); плотность  $\rho$  (в случае свободной конвекции зависит от неоднородности температуры), динамическая вязкость  $\eta$ , теплопроводность  $\lambda$  и удельная теплоемкость  $c$  являются физическими параметрами жидкости;  $\bar{g}$  — напряженность гравитационного поля;  $t$  — время.

Дифференциальные уравнения (1)–(3) описывают процессы переноса количества движения, массы и энергии. Каждое из уравнений выражает соответствующий закон сохранения (импульса, массы, энергии). Рассматривая совместно (1–2), получаем систему уравнений для компонент вектора скорости в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \nabla \cdot (\rho \bar{u} u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nabla \cdot (\eta \nabla u_i) + B_i + V_i, \quad (4)$$

где  $u_i$  —  $i$ -я компонента вектора скорости ( $i = 1, 2, 3$ );  $B_i$  —  $i$ -я составляющая объемной силы (приложенной к единице объема);  $V_i$  —  $i$ -я составляющая величины, учитывающей дополнительные диссипативные члены.

Из (3) и (4) следует, что  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $T$  подчиняются обобщенному закону сохранения, которому соответствует дифференциальное уравнение для зависимой (обобщенной) переменной  $\Phi$  :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Phi) + \nabla \cdot (\rho \bar{u} \Phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) + \Psi, \quad (5)$$

где  $\Gamma$  — коэффициент «диффузии», а  $\Psi$  — так называемый «источниковый член» (обычно представляется в линеаризованном виде, как линейная функция  $\Phi$ ). Здесь физический смысл  $\Psi$  и  $\Gamma$  зависит от того, какую именно величину обозначает переменная  $\Phi$ . Коэффициент  $\Gamma$  играет роль коэффициента диффузии для уравнения переноса массовой концентрации химической компоненты, коэффициента теплопроводности для уравнения тепловой конвекции, коэффициента динамической или кинематической вязкости для уравнения движения жидкости. Источниковый член  $\Psi$  может включать диссипативные и объемные компоненты, которые не учитываются конвективным и диффузионным членами уравнения (5).

Для численного решения уравнения (5) будем использовать метод контрольного объема. Применение данного метода объясняется желанием получить решения, удовлетворяющие законам сохранения в расчетной области, а также сравнительно простой реализацией методики расчета и распространением ее на области сложной геометрической формы. Учитывая, что уравнения, описывающие теплоперенос, массоперенос, движение жидкости, во многом сходны, а интересующие нас зависимые переменные (компоненты) подчиняются обобщенному закону сохранения, применим метод контрольного объема к обобщенному дифференциальному уравнению вида (5).

Достаточно подробно суть метода и его приложения изложены в книге [5]. Поясним основные идеи метода. Расчетная область разбивается на множество непересекающихся контрольных объемов, в каждом из которых содержится только одна узловая точка. Дифференциальное уравнение интегрируется по контрольным объемам. При этом делается предположение о виде функции, описывающей изменение переменной между двумя соседними узлами. В результате получается дискретный аналог исходного дифференциального уравнения, связывающий значение переменной в узловой точке с ее значениями в соседних узлах. Метод контрольного объема гарантирует выполнение законов сохранения рассматриваемых величин как на всей расчетной области, так и на любой ее части. Таким образом, решение удовлетворяет точным интегральным балансам даже на относительно «грубой» сетке.

В [5] приведены примеры дискретных аналогов для уравнения (5), записанного в декартовых координатах. Их различие обусловлено способом выбора интерполяционных

функций и профилей для вычисления значений переменных, конвективных и диффузионных потоков на гранях контрольных объемов. Для ряда задач более естественным представляется выбор цилиндрических координат (в случае осесимметричных течений, течений в трубах и др.). Тогда для построения дискретного аналога необходимо использовать другие кусочные профили, более точно описывающие изменение переменных величин между узловыми точками. Далее рассматривается вывод таких функциональных зависимостей, базирующихся на точных решениях уравнений сохранения. На основе новых функциональных зависимостей будем строить дискретный аналог обобщенного дифференциального уравнения в цилиндрической системе координат.

## 2. Интегральные балансы для граней контрольного объема

Уравнение (5) с использованием уравнения неразрывности (2) можно упростить, представив в виде:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \bar{u} \cdot \nabla \Phi = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) + \Psi,$$

Запишем последнее уравнение в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  (с учетом правил действий с оператором Гамильтона, [3]):

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} u_r + \rho \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} u_\varphi + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} u_z = \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \Psi. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $u_r, u_\varphi, u_z$  представляют собой соответствующие компоненты вектора скорости:  $\bar{u} = (u_r, u_\varphi, u_z)$ .

Преобразуем уравнение (6), умножив обе части на  $r$  :

$$\begin{aligned} & r \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + r \rho u_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho u_\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + r \rho u_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + r \Psi. \end{aligned} \quad (7)$$

В цилиндрических координатах уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \rho) + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho u_z) = 0. \quad (8)$$

Преобразуем уравнение конвекции и диффузии (7), используя уравнение неразрывности (8):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (r \rho \Phi) + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r \Phi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi \Phi) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho u_z \Phi) = \\ & = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + r \Psi. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) проинтегрируем по контрольному объему  $V$  (рис. 1) и по временному промежутку  $[t_0, t_0 + \Delta t]$ . Обозначим через  $u$  и  $d$  верхнюю и нижнюю грани контрольного

объема, через  $w$  и  $e$  — левую («западную») и правую («восточную») грани, через  $n$  и  $s$  — «северную» и «южную» грани.

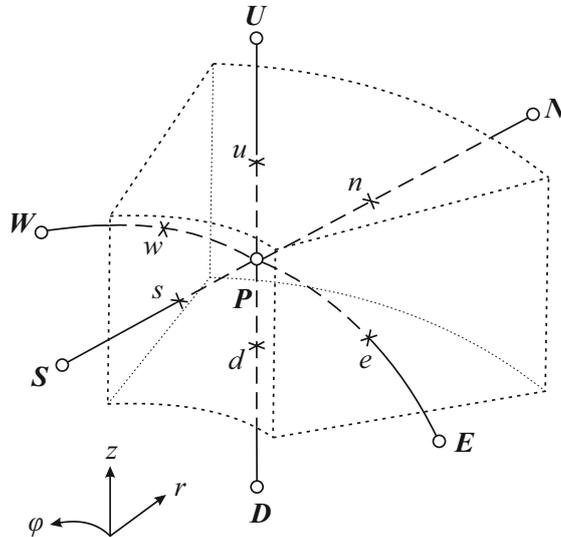


Рис. 1. Контрольный объем  $V$  с узловой точкой  $P$

Для удобства представления формул используем такие же обозначения в записи соответствующих этим граням значений переменных. Таким образом, через  $z_d$  обозначим значение переменной  $z$  на нижней грани, а через  $z_u$  — значение этой переменной на верхней грани. Тогда для контрольного объема  $V$  выполнено условие  $z_d \leq z \leq z_u$ . Аналогичным образом вводятся обозначения для значений переменных  $\varphi$  и  $r$ , тогда  $\varphi_e \leq \varphi \leq \varphi_w$ ,  $r_s \leq r \leq r_n$ . Следовательно, интегрирование по рассматриваемому контрольному объему — это интегрирование по области

$$V = \{(r, \varphi, z) \mid r_s \leq r \leq r_n, \varphi_e \leq \varphi \leq \varphi_w, z_d \leq z \leq z_u\}.$$

Интегрируя по области  $V$ , получаем

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (r\rho\Phi) dt \right] dr d\varphi dz + \\ & + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \iint_{\varphi_e z_d}^{\varphi_w z_u} \left[ \int_{r_s}^{r_n} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r\rho u_r \Phi) - \frac{\partial}{\partial r} \left( r\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right) dr \right] dz d\varphi dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \iint_{r_s z_d}^{r_n z_u} \left[ \int_{\varphi_e}^{\varphi_w} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi \Phi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right) d\varphi \right] dz dr dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \iint_{r_s \varphi_e}^{r_n \varphi_w} \left[ \int_{z_d}^{z_u} \left( \frac{\partial}{\partial z} (r\rho u_z \Phi) - \frac{\partial}{\partial z} \left( r\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right) dz \right] d\varphi dr dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left[ \iiint_V r \Psi dr d\varphi dz \right] dt. \end{aligned} \tag{10}$$

Размеры контрольного объема  $V$  определяются значениями  $\Delta r = r_n - r_s$ ,  $\Delta \varphi = \varphi_e - \varphi_w$  (рис. 2) и  $\Delta z = z_u - z_d$ . Пусть  $(\delta r)_n$  — расстояние между узловыми точками  $P$  и  $N$ , а  $(\delta r)_s$  — расстояние между  $P$  и  $S$ . По такому же принципу обозначим расстояния между другими парами узлов:  $(\delta \varphi)_w$  — между  $P$  и  $W$ ,  $(\delta \varphi)_e$  — между  $P$  и  $E$ ,  $(\delta z)_u$  — между  $P$  и  $U$ ,  $(\delta z)_d$  — между  $P$  и  $D$ .

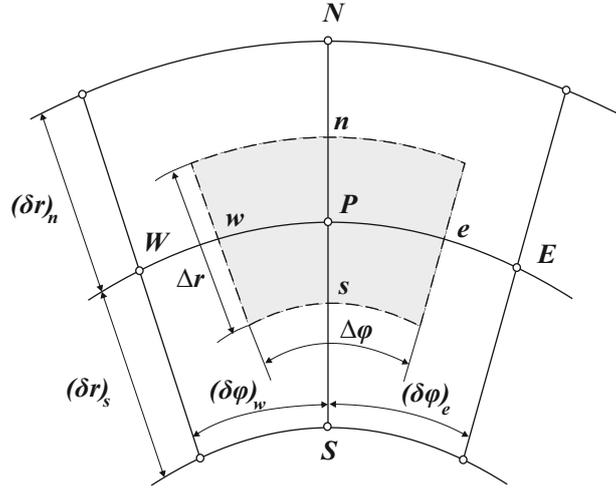


Рис. 2. Проекция контрольного объема  $V$  на плоскость  $(r, \varphi)$

Введем понятия суммарных потоков, направленных вдоль осей координат и складывающихся из конвективных и диффузионных составляющих:

$$J_r = r\rho u_r \Phi - r\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad J_\varphi = \rho u_\varphi \Phi - \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad J_z = r\rho u_z \Phi - r\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (11)$$

С учетом формул (11) уравнение (10) примет вид:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (r\rho\Phi) dt \right] dr d\varphi dz + \\ & + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left[ \iiint_V \left( \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) dr d\varphi dz \right] dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left[ \iiint_V r \Psi dr d\varphi dz \right] dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть  $J_n$  — значение потока  $J_r$  на грани  $n$ , а  $J_s$  — значение  $J_r$  на грани  $s$ . Также обозначим через  $J_w$  и  $J_e$  значения  $J_\varphi$  на гранях  $w$  и  $e$ , а через  $J_u$  и  $J_d$  — значения  $J_z$  на гранях  $u$  и  $d$ . Значения переменных  $\Phi$  и  $\rho$  в момент времени  $t_0 + \Delta t$  (новые значения на текущем временном шаге) в узловой точке  $P$  будем обозначать как  $\Phi_P$  и  $\rho_P$ . Подобным образом обозначим значения переменной  $\Phi$  в соседних узлах:  $\Phi_N$  в узле  $N$ ,  $\Phi_S$  в узле  $S$ ,  $\Phi_W$  и  $\Phi_E$  в точках  $W$  и  $E$ ,  $\Phi_U$  и  $\Phi_D$  в точках  $U$  и  $D$ . Значения  $\Phi$  и  $\rho$  в узле  $P$  в момент времени  $t_0$  («старые», то есть заданные значения) обозначим через  $\Phi_P^0$  и  $\rho_P^0$ . Согласно применяемому методу считаем, что значения переменных  $\Phi$  и  $\rho$  в узловой точке сохраняются во всем окружающем эту точку контрольном объеме. Кроме того, при интегрировании будем использовать неявную схему: в пределах всего шага по времени ( $t_0 < t \leq t_0 + \Delta t$ ) значения  $\Phi$  и  $\rho$  принимаются равными новым значениям.

Тогда уравнение (12) аппроксимируется следующим дискретным аналогом:

$$(\rho_P \Phi_P - \rho_P^0 \Phi_P^0) \frac{\Delta V}{\Delta t} + (J_n - J_s) \Delta \varphi \Delta z + (J_w - J_e) \Delta r \Delta z + (J_u - J_d) \Delta r \Delta \varphi = \bar{\Psi} \Delta V, \quad (13)$$

где  $\bar{\Psi}$  — среднее по контрольному объему (новое, в момент времени  $t_0 + \Delta t$ ) значение  $\Psi$ ,  $\Delta V = \frac{r_n + r_s}{2} \Delta r \Delta \varphi \Delta z$ . Отметим, что при  $r_P = \frac{r_n + r_s}{2}$  выполнено  $\Delta V = r_P \Delta r \Delta \varphi \Delta z$ .

Аналогично интегрируем уравнение неразрывности (8):

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[ \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (r\rho) dt \right] dr d\varphi dz + \\ & + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left[ \iiint_V \left( \frac{\partial}{\partial r} (r\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (r\rho u_z) \right) dr d\varphi dz \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем обозначения:

$$F_r = r\rho u_r, \quad F_\varphi = \rho u_\varphi, \quad F_z = r\rho u_z. \quad (15)$$

При этом  $F_n$  и  $F_s$  — значения  $F_r$  на гранях  $n$  и  $s$ ,  $F_w$  и  $F_e$  — значения  $F_\varphi$  на гранях  $w$  и  $e$ ,  $F_u$  и  $F_d$  — значения  $F_z$  на гранях  $u$  и  $d$ .

Учитывая (15), составим дискретный аналог уравнения (14):

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta V}{\Delta t} + (F_n - F_s) \Delta \varphi \Delta z + (F_w - F_e) \Delta r \Delta z + (F_u - F_d) \Delta r \Delta \varphi = 0. \quad (16)$$

Умножим (16) на  $\Phi_P$  и вычтем из (13). Тогда

$$\begin{aligned} & (\Phi_P - \Phi_P^0) \frac{\rho_P^0 \Delta V}{\Delta t} + (J_n - F_n \Phi_P) \Delta \varphi \Delta z - (J_s - F_s \Phi_P) \Delta \varphi \Delta z + \\ & + (J_w - F_w \Phi_P) \Delta r \Delta z - (J_e - F_e \Phi_P) \Delta r \Delta z + (J_u - F_u \Phi_P) \Delta r \Delta \varphi - \\ & - (J_d - F_d \Phi_P) \Delta r \Delta \varphi = \bar{\Psi} \Delta V. \end{aligned} \quad (17)$$

В дальнейшем задачей нашего исследования является получение достаточно хорошего приближения для значений суммарных потоков, входящих в уравнение (17). С этой целью необходимо сделать некоторые предположения о профиле функции  $\Phi$  между соседними узлами с тем, чтобы рассчитать значения обобщенной переменной на гранях контрольного объема.

### 3. Точные решения уравнений сохранения

Для получения лучших аппроксимаций профилей обобщенной переменной в различных направлениях найдем точные решения уравнений сохранения отдельно по каждой координате.

I. Рассмотрим установившееся течение вдоль оси аппликата:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} (r\rho u_z \Phi) - \frac{\partial}{\partial z} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial z} (r\rho u_z) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решаем систему уравнений (18):

$$\begin{aligned} r\rho u_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} - r \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) &= 0, \\ r \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \rho u_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) &= 0, \\ \rho u_z &= \text{const}. \end{aligned}$$

В предположении, что  $\Phi = \Phi(z)$ ,  $\Phi'_r = \Phi'_\varphi = 0$  и  $\Gamma = \text{const}$ , получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения в области  $0 \leq z \leq L$ :

$$\Phi''_{zz} - \frac{\rho u_z}{\Gamma} \Phi'_z = 0, \quad \Phi(0) = \Phi_0, \quad \Phi(L) = \Phi_L. \quad (19)$$

Решая задачу (19), найдем:

$$\begin{aligned} \Phi &= C_1 e^{\rho u_z z / \Gamma} + C_2, \\ \begin{cases} C_1 + C_2 = \Phi_0, \\ C_1 e^{\rho u_z L / \Gamma} + C_2 = \Phi_L. \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначая  $P_z = \frac{\rho u_z L}{\Gamma}$  (число Пекле), получим

$$C_1 = \frac{\Phi_L - \Phi_0}{e^{P_z} - 1}, \quad C_2 = \Phi_0 - \frac{\Phi_L - \Phi_0}{e^{P_z} - 1} = \frac{\Phi_0 e^{P_z} - \Phi_L}{e^{P_z} - 1}.$$

Отсюда

$$\Phi = \frac{\Phi_L - \Phi_0}{e^{P_z} - 1} e^{P_z z / L} + \frac{\Phi_0 e^{P_z} - \Phi_L}{e^{P_z} - 1},$$

или

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_L - \Phi_0} = \frac{e^{P_z z / L} - 1}{e^{P_z} - 1}. \quad (20)$$

II. Рассмотрим установившееся течение в направлении полярного угла (вдоль дуги  $L_0 L$  при  $r = \text{const}$ , рис. 3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi \Phi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Считаем, что искомое решение ищется при незначительных изменениях координаты  $r$ . Поэтому полагаем  $r = \text{const}$ . Данное ограничение вполне допустимо, так как найденные нами решения будут использованы в пределах малых ячеек расчетной области.

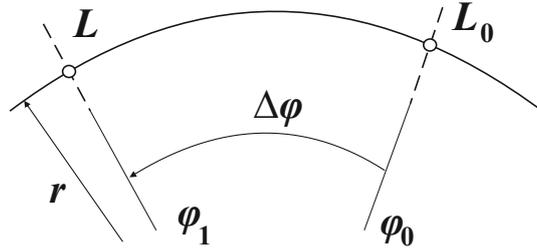


Рис. 3. Область решения одномерной задачи в направлении  $\varphi$

Решаем систему уравнений (21):

$$\begin{aligned} \rho u_\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) &= 0, \\ \rho u_\varphi &= \text{const}. \end{aligned}$$

В предположении, что  $\Phi = \Phi(\varphi)$ ,  $\Phi'_r = \Phi'_z = 0$  и  $\Gamma = \text{const}$ , получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения в области  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$  (в пределах изменения параметра дуги  $l = r \cdot \varphi : L_0 \leq l \leq L$ ):

$$\Phi''_{\varphi\varphi} - r \frac{\rho u_\varphi}{\Gamma} \Phi'_\varphi = 0, \quad \Phi(\varphi_0) = \Phi_0, \quad \Phi(\varphi_1) = \Phi_1. \tag{22}$$

Решая задачу (22), найдем:

$$\begin{aligned} \Phi &= C_1 e^{r \rho u_\varphi \varphi / \Gamma} + C_2, \\ \begin{cases} C_1 e^{r \rho u_\varphi \varphi_0 / \Gamma} + C_2 &= \Phi_0, \\ C_1 e^{r \rho u_\varphi \varphi_1 / \Gamma} + C_2 &= \Phi_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Если принять  $\varphi_0 = 0$ , то система уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$  упрощается:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 &= \Phi_0, \\ C_1 e^{r \rho u_\varphi \varphi_1 / \Gamma} + C_2 &= \Phi_1. \end{cases}$$

Обозначая  $P_\varphi = r \frac{\rho u_\varphi}{\Gamma} \varphi_1$  (число Пекле), получим

$$C_1 = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{e^{P_\varphi} - 1}, \quad C_2 = \Phi_0 - \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{e^{P_\varphi} - 1} = \frac{\Phi_0 e^{P_\varphi} - \Phi_1}{e^{P_\varphi} - 1}.$$

Отсюда

$$\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{e^{P_\varphi} - 1} e^{P_\varphi \varphi / \varphi_1} + \frac{\Phi_0 e^{P_\varphi} - \Phi_1}{e^{P_\varphi} - 1},$$

или

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_1 - \Phi_0} = \frac{e^{P_\varphi \varphi / \varphi_1} - 1}{e^{P_\varphi} - 1}. \tag{23}$$

Отметим, что решение (23) будет верным при условии  $r = \text{const}$ .

III. Рассмотрим установившееся течение вдоль полярной оси:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r \Phi) - \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r) &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

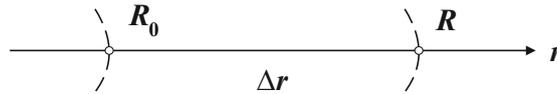


Рис. 4. Область решения одномерной задачи в направлении  $r$

Решаем систему уравнений (24):

$$\begin{aligned} r\rho u_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) &= 0, \\ r\rho u_r &= k = \text{const.} \end{aligned}$$

Рассматривая течение как одномерное, получаем уравнение относительно функции одной переменной  $\Phi = \Phi(r)$ . В предположении  $\Gamma = \text{const}$  задача сводится к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения в области  $R_0 \leq r \leq R$ :

$$k\Phi'_r = \Gamma\Phi'_r + r\Gamma\Phi''_{rr}, \quad \Phi(R_0) = \Phi_0, \quad \Phi(R) = \Phi_R, \quad \text{где } k = r\rho u_r. \tag{25}$$

Задача (25) приводится к виду

$$\Phi''_{rr} = \frac{k_1}{r} \Phi'_r, \quad \Phi(R_0) = \Phi_0, \quad \Phi(R) = \Phi_R, \quad \text{где } k_1 = \frac{k - \Gamma}{\Gamma}.$$

Общим решением дифференциального уравнения является функция

$$\Phi(r) = C_1 \frac{r^{k_1+1}}{k_1+1} + C_2, \quad \text{где } k_1 + 1 = \frac{k}{\Gamma} = \frac{r\rho u_r}{\Gamma}.$$

Пусть  $\tilde{C}_1 = \frac{C_1}{k_1+1} = \frac{C_1\Gamma}{k}$ ,  $k_2 = \frac{k}{\Gamma} = \frac{r\rho u_r}{\Gamma}$ , тогда

$$\Phi(r) = \tilde{C}_1 r^{k_2} + C_2 = \tilde{C}_1 e^{k_2 \ln r} + C_2.$$

Учитывая начальные условия, запишем систему для  $\tilde{C}_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 e^{k_2 \ln R_0} + C_2 = \Phi_0, \\ \tilde{C}_1 e^{k_2 \ln R} + C_2 = \Phi_R. \end{cases}$$

Находим решение задачи (25):

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 = \frac{\Phi_R - \Phi_0}{e^{k_2 \ln R} - e^{k_2 \ln R_0}}, \\ C_2 = \Phi_0 - \frac{\Phi_R - \Phi_0}{e^{k_2 \ln R} - e^{k_2 \ln R_0}} e^{k_2 \ln R_0} = \frac{\Phi_0 e^{k_2 \ln R} - \Phi_R e^{k_2 \ln R_0}}{e^{k_2 \ln R} - e^{k_2 \ln R_0}}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\Phi(r) = \frac{\Phi_R - \Phi_0}{e^{k_2 \ln R} - e^{k_2 \ln R_0}} e^{k_2 \ln r} + \frac{\Phi_0 e^{k_2 \ln R} - \Phi_R e^{k_2 \ln R_0}}{e^{k_2 \ln R} - e^{k_2 \ln R_0}},$$

или

$$\Phi(r) = \frac{\Phi_R - \Phi_0}{e^{k_2 \ln(R/R_0)} - 1} e^{k_2 \ln(r/R_0)} + \frac{\Phi_0 e^{k_2 \ln(R/R_0)} - \Phi_R}{e^{k_2 \ln(R/R_0)} - 1}.$$

Последнее равенство можно записать в виде, аналогичном (20) и (23):

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_R - \Phi_0} = \frac{e^{k_2 \ln(r/R_0)} - 1}{e^{k_2 \ln(R/R_0)} - 1}. \tag{26}$$

#### 4. Физический смысл точных решений

Проще всего пояснить физический смысл полученных точных решений на примере решения (20). Исследуем зависимость  $\Phi(z)$  при различных значениях числа Пекле  $P_z$ .

I. В пределе при  $P_z \rightarrow 0$  (в случае «чистой» диффузии) получаем

$$\lim_{P_z \rightarrow 0} \frac{e^{P_z z/L} - 1}{e^{P_z} - 1} = \lim_{P_z \rightarrow 0} \frac{P_z z/L}{P_z} = \frac{z}{L}, \quad \text{или} \quad \Phi = \Phi_0 + (\Phi_L - \Phi_0) \frac{z}{L},$$

то есть  $\Phi(z)$  линейно зависит от  $z$ .

II. При  $P_z \gg 1$  для значений  $z$ , отличных от нуля, имеем

$$\frac{e^{P_z z/L} - 1}{e^{P_z} - 1} \approx e^{P_z(z-L)/L} = e^{-P_z(L-z)/L}$$

и

$$\Phi = e^{-P_z(L-z)/L} \Phi_L + \left(1 - e^{-P_z(L-z)/L}\right) \Phi_0,$$

то есть, чем больше  $P_z$ , тем больше влияние  $\Phi_0$  на грани контрольного объема.

III. При  $P_z \ll -1$  получаем

$$\frac{e^{P_z z/L} - 1}{e^{P_z} - 1} = \frac{e^{-|P_z|z/L} - 1}{e^{-|P_z|} - 1} \approx 1 - e^{-|P_z|z/L}$$

и

$$\Phi = \left(1 - e^{-|P_z|z/L}\right) \Phi_L + e^{-|P_z|z/L} \Phi_0,$$

то есть, при отрицательных значениях  $P_z$  чем больше  $|P_z|$ , тем больше влияние  $\Phi_L$ .

IV. Производная  $\Phi'_z$  (если рассматривать  $\Phi$  как функцию одной переменной) имеет вид:

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{d}{dz} \left( \Phi_0 + \frac{e^{P_z z/L} - 1}{e^{P_z} - 1} (\Phi_L - \Phi_0) \right) = \frac{\Phi_L - \Phi_0}{e^{P_z} - 1} e^{P_z z/L} \cdot \frac{P_z}{L}.$$

На грани контрольного объема, расположенной посередине между узлами (то есть при  $z = L/2$ ), имеем

$$\Phi'_z(L/2) = \frac{\Phi_L - \Phi_0}{e^{P_z} - 1} e^{P_z/2} \cdot \frac{P_z}{L} = \frac{\Phi_L - \Phi_0}{L} \frac{P_z}{e^{P_z/2} - e^{-P_z/2}}.$$

Таким образом, при больших значениях  $|P_z|$  производная  $\Phi'_z(L/2)$  близка к нулю (диффузия почти отсутствует).

Физический смысл точного решения (23) легко пояснить, исследуя аналогичным образом зависимость  $\Phi(\varphi)$  при различных значениях числа Пекле  $P_\varphi$ . При этом и результаты получаются точно такие же. Немного отличается исследование зависимости  $\Phi(r)$  в (26). В частности, при  $k_2 \rightarrow 0$ , что равносильно условию  $P_r \rightarrow 0$ , получаем

$$\lim_{k_2 \rightarrow 0} \frac{e^{k_2 \ln(r/R_0)} - 1}{e^{k_2 \ln(R/R_0)} - 1} = \frac{\ln r - \ln R_0}{\ln R - \ln R_0}.$$

В этом случае зависимость  $\Phi(r)$  нелинейная. Однако, как и для  $\Phi(z)$ , при  $k_2 \gg 1$  выполняется

$$\frac{e^{k_2 \ln(r/R_0)} - 1}{e^{k_2 \ln(R/R_0)} - 1} \approx e^{k_2(\ln(r/R_0) - \ln(R/R_0))} = e^{-k_2 \ln(R/r)}$$

и

$$\Phi(r) = \Phi_0 + (\Phi_R - \Phi_0)e^{-k_2 \ln(R/r)}.$$

Таким образом, на грани контрольного объема более существенно влияние  $\Phi_0$ .

При  $k_2 \ll -1$  имеем

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_R - \Phi_0} = \frac{e^{k_2 \ln(r/R_0)} - 1}{e^{k_2 \ln(R/R_0)} - 1} \approx 1,$$

и это означает, что на грани контрольного объема значение  $\Phi(r)$  близко к  $\Phi_R$ .

## 5. Экспоненциальная схема

Используя полученные аналитические решения (20), (23) и (26), построим дискретный аналог для обобщенного дифференциального уравнения.

I. Найдем приближение для значения потока  $J_z$  на верхней грани  $u$  контрольного объема.

В качестве профиля между узлами  $P$  и  $U$  используем точное решение (20), заменив  $\Phi_0$  на  $\Phi_P$ ,  $\Phi_L$  на  $\Phi_U$ , а  $L$  на расстояние  $(\delta z)_u$  между точками  $P$  и  $U$ . Тогда

$$\Phi = \Phi_P + \frac{\Phi_U - \Phi_P}{e^{P_u} - 1} \left( e^{(P_u z)/(\delta z)_u} - 1 \right), \quad P_u = \frac{(\rho u_z)_u (\delta z)_u}{\Gamma_u}, \quad 0 \leq z \leq (\delta z)_u.$$

Обозначим:  $D_z = \frac{\Gamma}{\delta z}$ ,  $m_z = \frac{\delta z}{z}$ . На верхней грани контрольного объема имеем  $F_u = (r \rho u_z)_u$ ,  $D_u = \frac{\Gamma_u}{(\delta z)_u}$ ,  $m_u = \frac{(\delta z)_u}{z_u}$ . Здесь  $z_u$  — расстояние до грани  $u$  от узла  $P$ .

Поток  $J_u$  можно представить в виде

$$J_u = F_u \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_U - \Phi_P}{e^{P_u} - 1} \left( e^{P_u/m_u} - 1 \right) \right] - r \Gamma_u \frac{\Phi_U - \Phi_P}{e^{P_u} - 1} \frac{P_u}{(\delta z)_u} e^{P_u/m_u},$$

где  $\Gamma_u = D_u(\delta z)_u$ ,  $P_u = \frac{(\rho u_z)_u}{\Gamma_u}(\delta z)_u = \frac{F_u}{rD_u}$ .

Следовательно,

$$J_u = F_u \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_U - \Phi_P}{e^{P_u} - 1} \left( e^{P_u/m_u} - 1 \right) \right] - F_u \frac{\Phi_U - \Phi_P}{e^{P_u} - 1} e^{P_u/m_u} =$$

$$= F_u \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_U}{e^{P_u} - 1} \right]. \quad (27)$$

Таким образом,  $J_u$  не зависит от расположения границы раздела между узлами  $P$  и  $U$  ( $m_u$  в выражение для потока  $J_u$  не входит).

Аналогично на нижней грани  $d$  контрольного объема выполняется равенство

$$J_d = F_d \left[ \Phi_D + \frac{\Phi_D - \Phi_P}{e^{P_d} - 1} \right], \quad (28)$$

где  $F_d = (r\rho u_z)_d$ ,  $P_d = \frac{(\rho u_z)_d}{\Gamma_d}(\delta z)_d$ ,  $(\delta z)_d$  — расстояние между узлами  $P$  и  $D$ .

II. Найдем приближение для потока  $J_\varphi$  на «западной» грани  $w$  контрольного объема.

В качестве профиля между узлами  $P$  и  $W$  используем «средневзвешенное» по этой грани значение  $\Phi$  на основе решения (23), заменив  $\Phi_0$  на  $\Phi_P$ ,  $\Phi_1$  на  $\Phi_W$ , а  $\varphi_1$  на  $(\delta\varphi)_w$  (см. рис. 2). Тогда

$$\Phi = \Phi_P + \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} \left( e^{(P_w\varphi)/(\delta\varphi)_w} - 1 \right), \quad P_w = r \frac{(\rho u_\varphi)_w (\delta\varphi)_w}{\Gamma_w}, \quad 0 \leq \varphi \leq (\delta\varphi)_w.$$

Обозначим:  $D_\varphi = \frac{\Gamma}{r\delta\varphi}$ ,  $m_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\varphi}$ . На «западной» грани контрольного объема  $F_w = (\rho u_\varphi)_w$ ,  $D_w = \frac{\Gamma_w}{r(\delta\varphi)_w}$ ,  $m_w = \frac{(\delta\varphi)_w}{\varphi_w}$ . Здесь  $\varphi_w$  — угол до грани  $w$  от узла  $P$ . Поток  $J_w$  можно представить в виде

$$J_w = F_w \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} \left( e^{P_w/m_w} - 1 \right) \right] - \frac{\Gamma_w}{r} \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} \frac{P_w}{(\delta\varphi)_w} e^{P_w/m_w},$$

где  $\Gamma_w = rD_w(\delta\varphi)_w$ ,  $P_w = r \frac{(\rho u_\varphi)_w (\delta\varphi)_w}{\Gamma_w} = \frac{F_w}{D_w}$ .

Следовательно,

$$J_w = F_w \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} \left( e^{P_w/m_w} - 1 \right) \right] - F_w \frac{\Phi_W - \Phi_P}{e^{P_w} - 1} e^{P_w/m_w} =$$

$$= F_w \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_W}{e^{P_w} - 1} \right]. \quad (29)$$

Таким образом,  $J_w$  также не зависит от расположения границы раздела между соседними узлами.

На «восточной» грани  $e$  контрольного объема выполняется:

$$J_e = F_e \left[ \Phi_E + \frac{\Phi_E - \Phi_P}{e^{P_e} - 1} \right], \quad (30)$$

где  $F_e = (\rho u_\varphi)_e$ ,  $P_e = r \frac{(\rho u_\varphi)_e}{\Gamma_e} (\delta\varphi)_e$ ,  $(\delta\varphi)_e$  — угол между узлами  $P$  и  $E$ .

III. Найдем приближения для потока  $J_r$  на «северной» грани  $n$  контрольного объема.

В качестве профиля между узлами  $P$  и  $N$  используем точное решение (26), заменив  $\Phi_0$  на  $\Phi_P$ ,  $\Phi_R$  на  $\Phi_N$ ,  $R_0$  на  $R_P$ ,  $R$  на  $R_N$ , а  $\Delta r$  на  $(\delta r)_n = R_N - R_P$  (см. рис. 2). При этом  $R_P \leq r \leq R_N = R_P + (\delta r)_n$ . Тогда

$$\Phi = \Phi_P + \frac{\Phi_N - \Phi_P}{e^{P_n} - 1} \left( e^{(P_n/L) \ln(r/R_P)} - 1 \right),$$

где  $L = \ln \frac{R_N}{R_P}$ ,  $P_n = r_n \frac{(\rho u_r)_n}{\Gamma_n} \ln \left( 1 + (\delta r)_n / R_P \right) = r_n \frac{(\rho u_r)_n}{\Gamma_n} \cdot L$ .

Обозначим:  $D_r = \frac{\Gamma}{\ln(1 + \delta r / R_P)}$ ,  $m_r = \frac{\ln(1 + \delta r / R_P)}{\ln(r / R_P)}$ ,  $\delta r$  — расстояние между соседними узлами вдоль полярной оси. На «северной» грани контрольного объема величины  $F_r$ ,  $D_r$  и  $m_r$  принимают значения  $F_n = r_n (\rho u_r)_n$ ,  $D_n = \frac{\Gamma_n}{L}$ ,  $m_n = \frac{L}{\ln(r_n / R_P)}$ .

Здесь  $r_n$  — значение полярного радиуса, соответствующее грани  $n$ .

Поток  $J_n$  можно представить в виде

$$J_n = F_n \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_N - \Phi_P}{e^{P_n} - 1} \left( e^{P_n/m_n} - 1 \right) \right] - r_n \Gamma_n \frac{\Phi_N - \Phi_P}{e^{P_n} - 1} \frac{1}{L} e^{P_n/m_n},$$

где  $\Gamma_n = D_n L$ ,  $P_n = r_n \frac{(\rho u_r)_n}{\Gamma_n} L = \frac{F_n}{D_n}$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_n &= F_n \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_N - \Phi_P}{e^{P_n} - 1} \left( e^{P_n/m_n} - 1 \right) \right] - F_n \frac{\Phi_N - \Phi_P}{e^{P_n} - 1} e^{P_n/m_n} = \\ &= F_n \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_N}{e^{P_n} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Как и в предыдущих случаях,  $J_n$  не зависит от расположения границы раздела между соседними узлами ( $m_n$  в выражение для потока  $J_n$  не входит).

Аналогично на «южной» грани  $s$  контрольного объема выполняется:

$$J_s = F_s \left[ \Phi_S + \frac{\Phi_S - \Phi_P}{e^{P_s} - 1} \right], \quad (32)$$

где  $F_s = r_s (\rho u_r)_s$ ,  $P_s = r_s \frac{(\rho u_r)_s}{\Gamma_s} \ln \left( 1 + (\delta r)_s / R_S \right)$ ,  $(\delta r)_s$  — расстояние между узлами  $P$  и  $S$ .

Подставим выражения (27)–(32) для суммарных потоков на гранях контрольного

объема в уравнение (17).

$$\begin{aligned} & (\Phi_P - \Phi_P^0) \frac{\rho_P^0 \Delta V}{\Delta t} + \left( F_n \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_N}{e^{P_n} - 1} \right] - F_n \Phi_P \right) \Delta \varphi \Delta z - \\ & - \left( F_s \left[ \Phi_S + \frac{\Phi_S - \Phi_P}{e^{P_s} - 1} \right] - F_s \Phi_P \right) \Delta \varphi \Delta z + \left( F_w \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_W}{e^{P_w} - 1} \right] - F_w \Phi_P \right) \Delta r \Delta z - \\ & - \left( F_e \left[ \Phi_E + \frac{\Phi_E - \Phi_P}{e^{P_e} - 1} \right] - F_e \Phi_P \right) \Delta r \Delta z + \left( F_u \left[ \Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_U}{e^{P_u} - 1} \right] - F_u \Phi_P \right) \Delta r \Delta \varphi - \\ & \left( F_d \left[ \Phi_D + \frac{\Phi_D - \Phi_P}{e^{P_d} - 1} \right] - F_d \Phi_P \right) \Delta r \Delta \varphi = \bar{\Psi} \Delta V. \end{aligned}$$

Среднее значение источникового члена  $\bar{\Psi}$  представим в линеаризованном виде:  $\bar{\Psi} = \Psi_C + \Psi_P \Phi_P$ , где коэффициенты  $\Psi_C$  и  $\Psi_P$  определяются видом дифференциального уравнения.

Приводя подобные члены, имеем:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\rho_P^0 \Delta V}{\Delta t} + \frac{F_n}{e^{P_n} - 1} \Delta \varphi \Delta z + \frac{e^{P_s}}{e^{P_s} - 1} F_s \Delta \varphi \Delta z + \frac{F_w}{e^{P_w} - 1} \Delta r \Delta z + \right. \\ & \left. + \frac{e^{P_e}}{e^{P_e} - 1} F_e \Delta r \Delta z + \frac{F_u}{e^{P_u} - 1} \Delta r \Delta \varphi + \frac{e^{P_d}}{e^{P_d} - 1} F_d \Delta r \Delta \varphi - \Psi_P \Delta V \right) \Phi_P - \\ & - \frac{\rho_P^0 \Delta V}{\Delta t} \Phi_P^0 - \frac{F_n}{e^{P_n} - 1} \Delta \varphi \Delta z \Phi_N - \frac{e^{P_s}}{e^{P_s} - 1} F_s \Delta \varphi \Delta z \Phi_S - \frac{F_w}{e^{P_w} - 1} \Delta r \Delta z \Phi_W - \\ & - \frac{e^{P_e}}{e^{P_e} - 1} F_e \Delta r \Delta z \Phi_E - \frac{F_u}{e^{P_u} - 1} \Delta r \Delta \varphi \Phi_U - \frac{e^{P_d}}{e^{P_d} - 1} F_d \Delta r \Delta \varphi \Phi_D = \Psi_C \Delta V. \end{aligned}$$

Получаем следующий вид дискретного аналога:

$$a_P \Phi_P = a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_U \Phi_U + a_D \Phi_D + b, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} a_P &= a_P^0 + a_N + a_S + a_W + a_E + a_U + a_D - \Psi_P \Delta V, \\ a_N &= \frac{F_n}{e^{P_n} - 1} \Delta \varphi \Delta z, \quad a_S = \frac{e^{P_s}}{e^{P_s} - 1} F_s \Delta \varphi \Delta z, \quad a_W = \frac{F_w}{e^{P_w} - 1} \Delta r \Delta z, \\ a_E &= \frac{e^{P_e}}{e^{P_e} - 1} F_e \Delta r \Delta z, \quad a_U = \frac{F_u}{e^{P_u} - 1} \Delta r \Delta \varphi, \quad a_D = \frac{e^{P_d}}{e^{P_d} - 1} F_d \Delta r \Delta \varphi, \\ a_P^0 &= \frac{\rho_P^0 \Delta V}{\Delta t}, \quad b = a_P^0 \Phi_P^0 + \Psi_C \Delta V. \end{aligned}$$

Значения чисел Пекле  $P_n, P_s, P_w, P_e, P_u, P_d$ , «расходы»  $F_n, F_s, F_w, F_e, F_u, F_d$  и «проводимости»  $D_n, D_s, D_w, D_e, D_u, D_d$  вычисляются по формулам, полученным в ходе построения дискретного аналога. Приведенную схему, использующую точные (экспоненциальные) решения, называют экспоненциальной.

## 6. Общая форма дискретного аналога

Для дискретного аналога (33) можно получить более общую формулировку, если воспользоваться исследованием С. Патанкара [5, с. 78]. Представим, например, суммарный поток  $J_n$  как среднее взвешенное значений обобщенной переменной в соседних

узлах:

$$J_n = \left[ F_n + \frac{F_n}{e^{P_n} - 1} \right] \Phi_P - \frac{F_n}{e^{P_n} - 1} \Phi_N$$

или

$$J^* = \frac{J_n}{D_n} = B \Phi_P - A \Phi_N,$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{P_n}{e^{P_n} - 1}, \\ B &= P_n + \frac{P_n}{e^{P_n} - 1} = A + P_n. \end{aligned} \quad (34)$$

При изменении направления координатной оси на противоположное меняется знак  $P_n$ , а коэффициенты  $A$  и  $B$  меняются местами. Тогда

$$\begin{aligned} -J^* &= B^* \Phi_N - A^* \Phi_P, \\ A^* &\equiv A(-P_n) = B(P_n), \quad B^* \equiv B(-P_n) = A(P_n). \end{aligned}$$

Таким образом, при противоположных направлениях координатной оси, то есть при значениях  $P_n$  разных знаков, выражения для коэффициентов  $A$  и  $B$  различаются. Решения (34) получены при условии, что направление вектора скорости  $\bar{u}$  совпадает с направлением полярной оси (при  $P_n > 0$ ). Если  $\bar{u}$  и полярная ось противоположно направлены, то  $P_n < 0$ . Тогда

$$A(P_n) = A(-|P_n|) = B(|P_n|) = A(|P_n|) + |P_n| = A(|P_n|) - P_n.$$

Соответственно, при  $P_n > 0$  выполнено равенство  $A(P_n) = A(|P_n|)$ .

Введем оператор

$$A(P) = A(|P|) + \max(-P; 0), \quad (35)$$

где  $A(|P|) = \frac{|P|}{e^{|P|} - 1}$ . При этом

$$B(P) = A(|P|) + \max(P; 0). \quad (36)$$

Коэффициент  $a_N$  запишем, используя (35):

$$a_N = \frac{F_n}{e^{P_n} - 1} \Delta\varphi \Delta z = D_n A(P_n) \Delta\varphi \Delta z = \left[ D_n A(|P_n|) + \max(-F_n; 0) \right] \Delta\varphi \Delta z.$$

Аналогично получаем выражение для  $a_S$ , используя (36):

$$a_S = \frac{e^{P_s}}{e^{P_s} - 1} F_s \Delta\varphi \Delta z = D_s B(P_s) \Delta\varphi \Delta z = \left[ D_s A(|P_s|) + \max(F_s; 0) \right] \Delta\varphi \Delta z.$$

Применение операторов  $A(P)$  и  $B(P)$  позволяет получить обобщенную форму записи и для других коэффициентов. Тогда окончательно дискретный аналог принимает вид:

$$a_P \Phi_P = a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_U \Phi_U + a_D \Phi_D + b, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} a_P &= a_P^0 + a_N + a_S + a_W + a_E + a_U + a_D - \Psi_P \Delta V, \\ a_N &= D_n A(P_n) \Delta \varphi \Delta z, \quad a_S = D_s B(P_s) \Delta \varphi \Delta z, \quad a_W = D_w A(P_w) \Delta r \Delta z, \\ a_E &= D_e B(P_e) \Delta r \Delta z, \quad a_U = D_u A(P_u) r_u \Delta r \Delta \varphi, \quad a_D = D_d B(P_d) r_d \Delta r \Delta \varphi, \\ a_P^0 &= \frac{\rho_P^0 \Delta V}{\Delta t}, \quad b = a_P^0 \Phi_P^0 + \Psi_C \Delta V, \end{aligned}$$

а операторы  $A(P)$  и  $B(P)$  задаются формулами (35, 36).

Полученный дискретный аналог (37) обобщенного дифференциального уравнения (5), записанного в цилиндрической системе координат (9), может быть использован для численного моделирования конвективного теплопереноса в условиях ламинарных и турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости в замкнутом объеме. Вопросы реализации данной модели, касающиеся расчета поля скоростей, использования граничных условий различного рода, остались за рамками данной статьи, поскольку здесь решалась задача получения экспоненциальной схемы применительно к цилиндрическим координатам. Учет особенностей реализации модели необходим для корректной аппроксимации функции  $\Phi$  между узловыми точками, для определения вида операторов  $A(P)$  и  $B(P)$  и формул расчета чисел Пекле для переменных  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$ . Использование дискретных аналогов, построенных на основе точных решений уравнений переноса, может оказаться более предпочтительным с учетом современного уровня вычислительной техники.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белова, О. В. Метод контрольного объема для расчета гидравлических сетей / О. В. Белова, В. Ю. Волков, А. П. Скибин // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2013. — Вып. 5. — С. 1–14.
2. Берковский, Б. М. Вычислительный эксперимент в конвекции / Б. М. Берковский, В. К. Полевиков. — Минск : Университетское, 1988. — 167 с.
3. Будак, Б. М. Кратные интегралы и ряды / Б. М. Будак, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1965. — 608 с.
4. Патанкар, С. В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах / С. В. Патанкар. — М. : Изд-во МЭИ, 2003. — 312 с.
5. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. — М. : Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.
6. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. — М. : Мир, 1991. — Т. 1. — 502 с.
7. Heiss, A. Numerische und experimentelle Untersuchungen der laminaren und turbulenten Konvektion in einem geschlossenen Behälter. Dissertation / A. Heiss. — München : Lehrstuhl A für Thermodynamik, Technische Universität München, 1987. — 203 p.

### REFERENCES

1. Belova O.V., Volkov V.Yu., Skibin A.P. Metod kontrolnogo obyema dlya rascheta gidravlicheskih setey [Control Volume Method for Calculation of Hydraulic Networks]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii*, 2013, iss. 5, pp. 1-14.
2. Berkovskiy B.M., Polevikov V.K. *Vychislitelnyy eksperiment v konveksii* [Computing Experiment in Convection]. Minsk, Universitetskoe Publ., 1988. 167 p.
3. Budak B.M., Fomin S.V. *Kratnye integraly i ryady* [Multiple Integrals and Series]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 608 p.

4. Patankar S.V. *Chislennoe reshenie zadach teploprovodnosti i konvektivnogo teploobmena pri techenii v kanalakh* [Computation of Conduction and Duct Flow Heat Transfer]. Moscow, Izd-vo MEI Publ., 2003. 312 p.

5. Patankar S. *Chislennye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti* [Numerical Heat Transfer and Fluid Flow]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984. 152 p.

6. Fletcher K. *Vychislitelnye metody v dinamike zhidkostey* [Computational Methods for Fluid Dynamics]. Moscow, Mir Publ., 1991, vol. 1. 502 p.

7. Heiss A. *Numerische und experimentelle Untersuchungen der laminaren und turbulenten Konvektion in einem geschlossenen Behälter. Dissertation.* München, Lehrstuhl A für Thermodynamik, Technische Universität München, 1987. 203 p.

## DISCRETIZATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CONVECTION AND DIFFUSION BASED ON CONTROL VOLUME METHOD

**Alexander Viktorovich Bokov**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Department of Natural Science and Humanitarian Disciplines,  
Pyatigorsk Branch of Plekhanov Russian University of Economics  
av\_bokov@mail.ru  
Kuchury St., 8, 357500 Pyatigorsk, Russian Federation

**Aleksey Aleksandrovich Klyachin**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Head Of Department of Mathematical Analysis and Function Theory,  
Volgograd State University  
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru  
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

**Marina Aleksandrovna Korytova**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics,  
South Ural State University (National Research University)  
sma.59@mail.ru  
Prosp. Lenina, 76, 454080 Chelyabinsk, Russian Federation

**Abstract.** The object of research is a mathematical model of convective heat and mass transfer. This model is based on the equations of hydrodynamics. Taking into account that the equations governing heat transfer, mass transfer and fluid flow are similar in many respects, and the dependent variables of our interest satisfy a generalized conservation law, we apply numerical methods to a differential equation of a generalized variable. The research objective is construction of a discrete analogue of the generalized differential equation describing the proposed mathematical model of convection in a viscous incompressible fluid.

To implement the mathematical model, it is suggested to use the control volume method. This method has a number of significant advantages in comparison to the method of finite differences. It provides strict compliance with the laws of mass, momentum, energy conservation for any group of cells, and therefore,

in the whole computational domain. The method itself and its application are sufficiently described in the book by S. Patankar [5]. The computational domain is divided into a multiplicity of control volumes. The differential equation is integrated over the control volumes. In this case, the assumption about the form of the function describing the change in the variable between two adjacent nodes is made. To represent the profiles of functions between the nodes of the grid, we use templates that approximate the exact solution obtained analytically.

As a rule, researchers use discrete analogues obtained for rectangular grids in numerical simulation. Use of such templates for curvilinear coordinate systems leads to large computational errors. Many applied problems are easier to solve in the curvilinear coordinates, for example, in cylindrical coordinates. Further, to obtain the exact templates, we need different solutions that take into account specific features of curvilinear grids. Modern computers allow performance of complex mathematical calculations. It also makes possible the use of more accurate functional dependencies for approximations. This all led to the desire of authors to get a more efficient tool — the calculated schemes and algorithms that use an exponential scheme for the cylindrical coordinate system as a basis.

The task is to obtain the best approximations of the generalized variable profiles in a variety of directions. For this purpose, we find the exact solutions of the equations of conservation separately for each coordinate. The article investigates the meaning of exact solutions made in order to ensure their correctness.

Using the obtained analytical solutions, we have built the discrete analogue of the generalized differential equation. We obtained a more general formulation for the discrete analogue based on the research of S. Patankar. The resulting discrete analogue of the generalized differential equation written in cylindrical coordinates can be used for numerical simulations of convective heat and mass transfer under conditions of axisymmetric laminar and turbulent flows of viscous incompressible fluid and fluid flows in channels and pipes. Using discrete analogues constructed on the basis of exact transfer equations may be more advantageous taking into account the present level of computer technology.

**Key words:** convection, heat and mass transfer, mathematical model, generalized differential equation, discrete analogue, control volume, function approximation.