DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.4.4

УДК 517.51
ББК 22.161.5

К ТЕОРЕМЕ О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССОВ ЛИПШИЦА

Игорь Владимирович Журавлев

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
igor.zhuravlev@volsu.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Более сорока лет назад Ф. Кларк доказал теорему об обратной функции для липшицевых отображений, что позволило получить теорему о неявной функции для этого класса отображений. Результаты, полученные в этой работе, представляют собой теорему о неявной функции Ф. Кларка [1] и при этом даны новые оценки постоянной Липшица ее решений.

Ключевые слова: теорема о неявной функции, теорема об обратной функции, производная Кларка, липшицевы отображения, постоянная Липшица.

Введение

Символом B^n обозначим единичный шар пространства $\mathbf{R}^n$ с центром в начале координат, через $B^n_a(r)$ или $a+rB^n$ условимся обозначать шар в $\mathbf{R}^n$ с центром a радиуса $r > 0$. Обозначим через $\mathbf{M}^{m,n}$ линейное пространство $m \times n$-матриц с вещественными элементами. Для произвольной матрицы $C \in \mathbf{M}^{m,n}$ ее норму $|C|$ определим равенством $|C| = \sup\limits_{|h|=1,\, h\in\mathbf{R}^n} |Ch|$.

Рассмотрим U — область в $\mathbf{R}^n$ и локально липшицеву вектор-функцию $F : U \to \mathbf{R}^k$. Для множества K, содержащегося в U, символом $Lip(F, K)$ обозначим точную нижнюю границу тех чисел L, для которых выполняется неравенство $|F(x_2) - F(x_1)| \le L|x_2 - x_1|$, $x_2, x_1 \in K$. Если x — точка дифференцируемости функции $F(x)$, $x \in U$, то матрица Якоби функции $F(x)$ в точке x обозначается $F'(x)$.

Пусть U' — множество всех точек дифференцируемости функции $F(x)$. Для точки $x^* \in U$ символом $\partial F(x^*)$ обозначим производную Кларка [1; 4] функции $F(x)$ в точке x^* — выпуклую оболочку множества всех матриц $M \in \mathbf{M}^{k,n}$, для которых найдется такая сходящаяся к x^* последовательность $x_p \in U'$, $p \in \mathbf{N}$, что $F'(x_p) \to M$ при $p \to \infty$.

Пусть W — область в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ и $F : W \to \mathbf{R}^k$— липшицева функция переменных $x \in \mathbf{R}^n$ и $y \in \mathbf{R}^m$. Если (x, y) — точка дифференцируемости функции $F(x, y)$, то $F'_x(x, y)$ — матрица Якоби функции $F(x, y)$ относительно дифференцирования по переменной x при фиксированной переменной y и $F'_y(x, y)$ — ее матрица Якоби относительно дифференцирования по переменной y при фиксированной переменной x.

Для каждой матрицы D, принадлежащей производной Кларка $\partial F(x,\, y)$, символом D_x обозначим $k \times n$-матрицу, у которой столбец с номером i, $1 \le i \le n$, совпадает со столбцом с номером i матрицы D, а символом D_y обозначим $k \times m$-матрицу, у которой столбец с номером j, $1 \le j \le m$, совпадает со столбцом с номером $n + j$ матрицы D. Полагаем $\partial_x F(x,\, y) = \{D_x : D \in \partial F(x,\, y)\}$, $\partial_y F(x,\, y) = \{D_y : D \in \partial F(x,\, y)\}$.

Сформулируем и докажем основной результат работы. Эта теорема представляет собой теорему о неявной функции Ф. Кларка [1] и при этом получены новые оценки постоянной Липшица ее решений.

Теорема. *Пусть $U = B^n_{x_0}(r_1) \subset \mathbf{R}^n, V = B^m_{y_0}(r_2) \subset \mathbf{R}^m$ и $F : U \times V \to \mathbf{R}^m$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и такое, что $\partial_y F(x_0, y_0)$ имеет максимальный ранг. Полагаем $\Delta = \max\limits_{D \in \partial F(x_0,y_0)} \left|D_y^{-1} \cdot D_x\right|$, $\Omega = 8\sqrt{1 + \Delta^2}$. Тогда для каждого Δ^*, $\Delta < \Delta^*$, существует R, $0 < R \le \min\{r_1, r_2\}$, и единственное удовлетворяющее условию Липшица отображение $G : B^n_{x_0}(R) \to$ $\to B^m_{y_0}(\Omega R)$, для которого выполняются равенства*

$$G(x_0) = y_0,\ F(x, G(x)) = F(x_0, y_0),\ x \in B^n_{x_0}(R),$$

и

$$|G(x_2) - G(x_1)| \le \Delta^* |x_2 - x_1|,\ x_2, x_1 \in B^n_{x_0}(R).$$

При этом $\lim\limits_{r \to 0+} Lip(G, B^n_{x_0}(r)) \le \Delta$.

Доказательство. Для каждого $0 < \varepsilon < 1$ рассмотрим отображение $\Phi_\varepsilon : U \times V \to \mathbf{R}^n \times$ $\times\, \mathbf{R}^m$, определенное соотношением

$$(x, y) \overset{\Phi_\varepsilon}{\to} (X, Y) = (x,\ y_0 + \varepsilon^{-1}(F(x, y) - F(x_0, y_0))).$$

Производная Кларка $\partial\Phi_\varepsilon(x_0, y_0)$ отображения $\Phi_\varepsilon(x, y)$ — выпуклое компактное множество матриц

$$\begin{pmatrix} I_n & Z^n_m \\ \varepsilon^{-1} D_x & \varepsilon^{-1} D_y \end{pmatrix},$$

где Z^n_m — нулевая $n \times m$-матрица, I_n — единичная $n \times n$-матрица и $D \in \partial F(x_0, y_0)$.

В дальнейшем нам понадобится оценка сверху для $\max\limits_{M \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0,y_0)} |M^{-1}|$.

Отметим, что для матрицы $M = \begin{pmatrix} I_n & Z^n_m \\ \varepsilon^{-1} D_x & \varepsilon^{-1} D_y \end{pmatrix}$, где $D \in \partial F(x_0, y_0)$, ее обратная матрица M^{-1} имеет вид $\begin{pmatrix} I_n & Z^n_m \\ -D_y^{-1} D_x & \varepsilon D_y^{-1} \end{pmatrix}$. В самом деле,

$$\begin{pmatrix} I_n & Z^n_m \\ \varepsilon^{-1} D_x & \varepsilon^{-1} D_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & Z^n_m \\ -D_y^{-1} D_x & \varepsilon D_y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & Z^n_m \\ \varepsilon^{-1} D_x - \varepsilon^{-1} D_x & I_m \end{pmatrix} = I_{n+m}.$$

Пусть $(u,v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$. Тогда

$$\left|M^{-1}(u,v)\right|^2 \le |u|^2 + \left|D_y^{-1} \cdot D_x\right|^2 |u|^2 + \varepsilon^2 |D_y^{-1}|^2 \, |v|^2$$

и

$$\left|M^{-1}\right| \le \sqrt{1 + \Delta^2 + \varepsilon^2 |D_y^{-1}|^2} \le \sqrt{1 + \Delta^2 + \varepsilon^2 L^2}, \tag{1}$$

где $L = \max\limits_{D \in \partial F(x_0,y_0)} \left|D_y^{-1}\right|$ — некоторая постоянная. Для дальнейшего существенно лишь то, что $L < \infty$. Это можно доказать, например, воспользовавшись известным неравенством [3, с. 157]

$$\left|D_{1y}^{-1} - D_{0y}^{-1}\right| \le \frac{|D_{1y} - D_{0y}|}{1 - \left|D_{0y}^{-1}\right| |D_{1y} - D_{0y}|} \left|D_{0y}^{-1}\right|^2,$$

которое выполняется при условии $|D_{1y} - D_{0y}| \le \left|D_{0y}^{-1}\right|^{-1}$, где $D_1, D_2 \in \partial F(x_0, y_0)$, и показывает, что функция $\left|D_y^{-1}\right|$ непрерывна, а значит и ограничена на компакте $\partial F(x_0, y_0)$. Полагаем $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2+\varepsilon^2 L^2}}$. Пользуясь (1) при выполнении условия

$$0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{4\sqrt{1+\Delta^2}}, \frac{\sqrt{1+\Delta^2}}{L}\right\},$$

имеем

$$\left|M^{-1}\right|^{-1} \ge \frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2+\varepsilon^2 L^2}} = \delta(\varepsilon) > \tag{2}$$

$$> \delta(\varepsilon) - \varepsilon = \frac{1 - \varepsilon\sqrt{1+\Delta^2+\varepsilon^2 L^2}}{\sqrt{1+\Delta^2+\varepsilon^2 L^2}} \ge$$

$$\ge \frac{1 - \varepsilon\sqrt{2(1+\Delta^2)}}{\sqrt{2(1+\Delta^2)}} \ge \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2}} = 2k.$$

Всюду в дальнейшем мы считаем, что

$$0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{4\sqrt{1+\Delta^2}}, \frac{\sqrt{1+\Delta^2}}{L}\right\} \text{ и } k = \frac{1}{8\sqrt{1+\Delta^2}}.$$

Покажем, что для любого единичного вектора $u \in \mathbf{R}^{n+m}$ найдется такой единичный вектор $w \in \mathbf{R}^{n+m}$, что для всех $M \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0, y_0)$ выполняется

$$\langle w, Mu \rangle \ge \delta(\varepsilon). \tag{3}$$

Для этого заметим, что $\min\limits_{M \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0,y_0)} \left(\min\limits_{|u|=1} |Mu|\right) \ge \delta(\varepsilon)$. В самом деле, функция $|Mu|$ непрерывна на компакте $\partial\Phi_\varepsilon(x_0, y_0) \times S$, где S — единичная сфера с центром в начале координат в $\mathbf{R}^{n+m}$. По теореме Вейерштрасса найдется такой $(M_0, u_0) \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0, y_0) \times S$, что $|Mu| \ge |M_0 u_0|$ для всех $(M, u) \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0, y_0) \times S$. Тогда, пользуясь (2), имеем

$$\delta(\varepsilon) \le \min_{M \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0,y_0)} \left|M^{-1}\right|^{-1} \le \left|M_0^{-1}\right|^{-1} \le \tag{4}$$

$$\leq \left| M_0^{-1} \cdot \frac{M_0 u_0}{|M_0 u_0|} \right|^{-1} = |M_0 u_0| = \min_{M \in \partial \Phi_\varepsilon(x_0, y_0)} \left(\min_{|u|=1} |Mu| \right).$$

Пусть $v \in S$. Выпуклое множество $\{Mv : M \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0, y_0)\}$ и шар $B_0^{n+m}(\delta(\varepsilon))$ не пересекаются, поскольку из неравенства (4) следует $|Mv| \geq \delta(\varepsilon)$. По первой теореме отделимости выпуклых множеств [2] найдется такой вектор $W \in \mathbf{R}^n$, что

$$\sup_{v \in B_0^{n+m}(\delta(\varepsilon))} \langle W, v \rangle \leq \inf_{M \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0, y_0)} \langle W, Mv \rangle. \tag{5}$$

Полагая $w = \frac{W}{|W|}$, поделив (5) на $|W|$, получаем $\delta(\varepsilon) = \sup\limits_{v \in B_0^{n+m}(\delta(\varepsilon))} \langle w, v \rangle \leq \langle w, Mv \rangle$ для всех $M \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0, y_0)$, что и доказывает (3).

Производная Кларка произвольного липшицева в некоторой окрестности точки $a \in \mathbf{R}^p$ отображения $G : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ обладает следующим замечательным свойством [1]: для каждого $\varepsilon^* > 0$ найдется такое $r^* > 0$, что условие $x \in B_a^p(r^*)$ влечет включение $\partial G(x) \subset \partial G(a) + \varepsilon^* B^{q,p}$, где $B^{q,p}$ — единичный шар в пространстве $q \times p$ матриц. Пользуясь этим, для каждого ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, выберем такое $r(\varepsilon) > 0$, что из соотношения $(x, y) \in B_{(x_0, y_0)}^{n+m}(r(\varepsilon))$ следует $\partial\Phi_\varepsilon(x, y) \subset \partial\Phi_\varepsilon(x_0,\ y_0) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n+m}} BM^{n+m}$ (здесь BM^{n+m} — единичный шар в пространстве $(n+m) \times (n+m)$ матриц).

Для любого единичного вектора $v \in \mathbf{R}^{n+m}$ найдется такой единичный вектор $w \in \mathbf{R}^{n+m}$, что для всех и $M \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0, y_0)$ выполняется неравенство (3) $\langle w, Mv \rangle \geq \delta(\varepsilon)$. Выбирая для произвольной матрицы $M_1 \in \partial\Phi_\varepsilon(x, y)$, $(x, y) \in B_{(x_0, y_0)}^{n+m}(r(\varepsilon))$, такую матрицу $M_0 \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0, y_0)$, что $|M_1 - M_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n+m}}$ и пользуясь следствием неравенства Коши — Буняковского $|\langle w, (M_0 - M_1) v \rangle| \leq \sqrt{n+m}|M_0 - M_1|$, имеем на основании (3),

$$\langle w, M_1 v \rangle \geq \langle w, M_0 v \rangle - \langle w, (M_0 - M_1) v \rangle \geq \delta(\varepsilon) - \varepsilon. \tag{6}$$

Покажем, что если (x_2, y_2) и (x_1, y_1) лежат в $B_{(x_0, y_0)}^{n+m}(r(\varepsilon))$, то

$$|\Phi_\varepsilon(x_2, y_2) - \Phi_\varepsilon(x_1, y_1)| \geq (\delta(\varepsilon) - \varepsilon)|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)|.$$

Пусть $b = (x_2, y_2)$, $a = (x_1, y_1)$ и $v = \frac{b-a}{|b-a|}$, $l = |b - a|$. Пусть Π — гиперплоскость, перпендикулярная v и проходящая через a и пусть $\pi(x, y)$ — проекция $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ на Π. Множество всех тех точек из rB, в которых $F(x, y)$ не дифференцируема, имеет меру 0 и по теореме Фубини для почти всех a^* из $\Pi \backslash \pi(M \cap rB)$ отрезок $[a^*, a^* + vl]$ пересекается с M на множестве линейной меры 0. Выберем последовательность $a_k^* \in \Pi \setminus \pi(M \cap rB)$, сходящуюся к a. Тогда каждая из функций

$$\Phi_\varepsilon(a_k^* + tv), \quad t \in [0, l]$$

имеет на $[0, l]$ производную $\Phi_\varepsilon{}'(a_k^* + tv)v$ и

$$\Phi_\varepsilon(b_k^*) - \Phi_\varepsilon(a_k^*) = \int_0^l \Phi_\varepsilon{}'(a_k^* + tv)v dt, \text{ где } b_k^* = a_k^* + vl.$$

Выберем согласно (6) такой единичный вектор w, что для всех $M \in \partial\Phi_\varepsilon(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n+m}} BM^{n+m}$ выполняется неравенство $\langle w, Mv \rangle \geq \delta(\varepsilon) - \varepsilon$.

Тогда

$$\langle w, \Phi_\varepsilon(b_k^*) - \Phi_\varepsilon(a_k^*)\rangle = \int\limits_0^l \langle w, {\Phi_\varepsilon}'(a_k^* + tv)v\rangle\, dt \geq (\delta(\varepsilon) - \varepsilon)l = (\delta(\varepsilon) - \varepsilon)|b-a|.$$

Пользуясь неравенством Коши — Буняковского и переходя к пределу при $k \to \infty$, приходим к соотношению

$$|\Phi_\varepsilon(b) - \Phi_\varepsilon(a)| \geq (\delta(\varepsilon) - \varepsilon)|b-a| \geq 2k|b-a|. \tag{7}$$

Лемма 1. *Справедливы включения*

$$\Phi_\varepsilon(B^{n+m}_{(x_0,y_0)} r(\varepsilon)) \supset B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(kr(\varepsilon)), \tag{8}$$

$$\Phi_\varepsilon(B^{n+m}_{(x_0,y_0)} r(\varepsilon_0)) \supset B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(kr(\varepsilon_0)),$$

$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \;\; k = \frac{1}{8\sqrt{1+\Delta^2}}$.

Доказательство. Покажем справедливость первого соотношения из (8). Пусть (x^*, y^*) — некоторая фиксированная точка из $B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(kr(\varepsilon))$ и пусть (x_μ, y_μ) — точка минимума функции $|(x^*, y^*) - \Phi_\varepsilon(x,y)|^2$ на $\overline{B^{n+m}_{(x_0,y_0)}}(r(\varepsilon))$. Предположим, что минимум достигается на $\partial\overline{B^{n+m}_{(x_0,y_0)}}(r(\varepsilon))$ — границе шара $\overline{B^{n+m}_{(x_0,y_0)}}(r(\varepsilon))$. Тогда $|(x_\mu, y_\mu) - (x_0, y_0)| = r(\varepsilon)$. Далее, в силу (7),

$$|\Phi_\varepsilon(x_\mu, y_\mu) - \Phi_\varepsilon(x_0, y_0)| \geq 2kr(\varepsilon)$$

и

$$|(x^*, y^*) - \Phi_\varepsilon(x_\mu, y_\mu)| \leq |(x^*, y^*) - \Phi_\varepsilon(x_0, y_0)| = |(x^*, y^*) - (x_0, y_0)| < r(\varepsilon)k.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} kr(\varepsilon) \;&>\; |(x^*, y^*) - (x_0, y_0)| = |(x^*, y^*) - \Phi_\varepsilon(x_0, y_0)| \geq \\ &\geq\; |\Phi_\varepsilon(x_\mu, y_\mu) - \Phi_\varepsilon(x_0, y_0)| - |(x^*, y^*) - \Phi_\varepsilon(x_\mu, y_\mu)| \geq \\ &\geq\; 2kr(\varepsilon) - r(\varepsilon)k \geq r(\varepsilon)k. \end{aligned}$$

Полученное противоречие означает, что минимум функции $|(x^*, y^*) - \Phi_\varepsilon(x,y)|^2$ достигается внутри шара $B^{n+m}_{(x_0,y_0)} r(\varepsilon)$. По теореме 2.6.6 из [1] это означает, что 0 содержится в множестве $2((x^*, y^*) - \Phi_\varepsilon(x_\mu, y_\mu))\partial\Phi_\varepsilon(x_\mu, y_\mu)$, но каждый элемент множества $\partial\Phi_\varepsilon(x,y)$ — невырожденная матрица и поэтому $(x^*, y^*) = \Phi_\varepsilon(x_\mu, y_\mu)$. Итак, выполняется первое из утверждений (8).

Покажем, что

$$\Phi_\varepsilon(B^{n+m}_{(x_0,y_0)} r(\varepsilon_0)) \supset B^{n+m}_{(x_0,y_0)}\,(kr(\varepsilon_0))$$

для $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Пусть $\Psi_\varepsilon : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ — линейное отображение с матрицей $\begin{pmatrix} I_n & Z^n_m \\ Z^m_n & (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})I_m \end{pmatrix}$. Из соотношения

$$\Phi_\varepsilon(x,y) = (x_0, y_0) + \Psi_\varepsilon \circ (\Phi_{\varepsilon_0}(x,y) - (x_0, y_0)), \tag{9}$$

учитывая неравенство $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > 1$, имеем

$$\Phi_\varepsilon(B^{n+m}_{(x_0,y_0)} r(\varepsilon_0)) = (x_0, y_0) + \Psi_\varepsilon(\Phi_{\varepsilon_0}(B^{n+m}_{(x_0,y_0)} r(\varepsilon_0)) - (x_0, y_0)) \supset$$

$$\supset (x_0, y_0) + \Psi_\varepsilon\left(r(\varepsilon_0) k B^{n+m}\right) \supset (x_0, y_0) + r(\varepsilon_0) k B^{n+m}.$$

Лемма 1 доказана.

В дальнейшем полагаем

$$L(\varepsilon) = \frac{1}{\delta(\varepsilon) - \varepsilon} = \frac{\sqrt{1 + \Delta^2 + \varepsilon^2 L^2}}{1 - \varepsilon\sqrt{1 + \Delta^2 + \varepsilon^2 L^2}}.$$

Для каждого ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ на шаре $B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(kr(\varepsilon_0))$ определены функции

$$\Phi_\varepsilon^{-1} : B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(kr(\varepsilon_0)) \to B^{n+m}_{(x_0,y_0)} r(\varepsilon_0),$$

удовлетворяющие на $B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(kr(\varepsilon))$, согласно (7), условию Липшица

$$|\Phi_\varepsilon^{-1}(X_2, Y_2) - \Phi_\varepsilon^{-1}(X_1, Y_1)| \le L(\varepsilon)|(X_2, Y_2) - (X_1, Y_1)|. \tag{10}$$

Из (9) следует, что некоторому условию Липшица $\Phi_\varepsilon^{-1}(X, Y)$ удовлетворяют и на $B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(r(\varepsilon_0))$. Отображения $\Phi_\varepsilon(x, y)$ были определены так, что обратные к ним имеют вид

$$x = X,\ y = \Theta_\varepsilon(X, Y).$$

Уточним свойства функций $\Theta_\varepsilon(X, Y)$.

Лемма 2. *Справедливы неравенства:*

1) $|\Theta_\varepsilon(X_2, Y_2) - \Theta_\varepsilon(X_1, Y_1)| \le \sqrt{(L(\varepsilon)^2 - 1)\,|X_2 - X_1|^2 + |Y_2 - Y_1|^2}$, (X_1, Y_1), $(X_2, Y_2) \in B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(kr(\varepsilon))$;

2) $|\Theta_\varepsilon(X_2, Y_2) - \Theta_\varepsilon(X_1, Y_1)| \le$

$$\le \sqrt{(L(\varepsilon_0)^2 - 1)\,|X_2 - X_1|^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 L^2(\varepsilon_0)|Y_2 - Y_1|^2},$$

$(X_2, Y_2),\ (X_1, Y_1) \in B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(kr(\varepsilon_0))$.

Доказательство. Как следует из (10),

$$|\Phi_\varepsilon^{-1}(X_2, Y_2) - \Phi_\varepsilon^{-1}(X_1, Y_1)|^2 = |(X_2, \Theta_\varepsilon(X_2, Y_2)) - (X_1, \Theta_\varepsilon(X_1, Y_1))|^2 =$$

$$= |X_2 - X_1|^2 + |\Theta_\varepsilon(X_2, Y_2) - \Theta_\varepsilon(X_1, Y_1)|^2 \le L(\varepsilon)^2(|X_2 - X_1|^2 + |Y_2 - Y_1|^2).$$

Отсюда

$$|\Theta_\varepsilon(X_2, Y_2) - \Theta_\varepsilon(X_1, Y_1)| \le \sqrt{(L(\varepsilon)^2 - 1)(|X_2 - X_1|^2 + |Y_2 - Y_1|^2},$$

$(X_2, Y_2),\ (X_1, Y_1) \in B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(kr(\varepsilon))$.

Докажем утверждение 2). Согласно (7)

$$|\Phi_{\varepsilon_0}(x_2,y_2)-\Phi_{\varepsilon_0}(x_1,y_1)|^2 \geq L^{-2}(\varepsilon_0)|(x_2,y_2)-(x_1,y_1)|^2$$

или

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)^2 |F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1)|^2+|x_2-x_1|^2 \geq L^{-2}(\varepsilon_0)(|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2).$$

Умножая последнее неравенство на $\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2$ и прибавляя справа и слева $\left(1-\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2\right)\times$ $\times\, |x_2-x_1|^2$, получим

$$|\Phi_{\varepsilon}(x_2,y_2)-\Phi_{\varepsilon}(x_1,y_1)|^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 |F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1)|^2+|x_2-x_1|^2 \geq$$

$$\geq \left(\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2 L^{-2}(\varepsilon_0)+1-\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2\right)|x_2-x_1|^2+\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2 L^{-2}(\varepsilon_0)|y_2-y_1|^2.$$

Сделаем в этом неравенстве замену переменных $(x,y)=\Phi_{\varepsilon}^{-1}(X,Y)=(X,\ \Theta_{\varepsilon}(X,Y))$. Получим

$$|X_2-X_1|^2+|Y_2-Y_1|^2 \geq$$

$$\geq \left(\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2 L^{-2}(\varepsilon_0)+1-\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2\right)(|X_2-X_1|^2+$$

$$+\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2 L^{-2}(\varepsilon_0)|\Theta_{\varepsilon}(X_2,Y_2)-\Theta_{\varepsilon}(X_1,Y_1)|^2.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2 (1-L^{-2}(\varepsilon_0))|X_2-X_1|^2+|Y_2-Y_1|^2 \geq$$

$$\geq \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2 L^{-2}(\varepsilon_0)|\Theta_{\varepsilon}(X_2,Y_2)-\Theta_{\varepsilon}(X_1,Y_1)|^2$$

и

$$(L^2(\varepsilon_0)-1)|X_2-X_1|^2+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 L^2(\varepsilon_0)|Y_2-Y_1|^2 \geq$$

$$\geq |\Theta_{\varepsilon}(X_2,Y_2)-\Theta_{\varepsilon}(X_1,Y_1)|^2.$$

Лемма 2 доказана.

Из соотношения

$$\begin{aligned}(X,Y) &= \Phi_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon}^{-1}(X,Y))=(X,\ y_0+\varepsilon^{-1}(F(X,\Theta_{\varepsilon}(X,Y))-F(x_0,y_0))),\\ (X,Y) &\in B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(r(\varepsilon_0)),\end{aligned}$$

следует, что

$$F(X,\ \Theta_{\varepsilon}(X,Y))=F(x_0,y_0)+\varepsilon(Y-y_0),\ (X,Y)\in B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(r(\varepsilon_0)).$$

Полагаем $G_\varepsilon(x) = \Theta_\varepsilon(x,\ y_0)$. Так как $\Phi_\varepsilon(B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(r(\varepsilon_0)))$ содержит шар $B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(kr(\varepsilon_0))$, то функция $G_\varepsilon(x)$ определена на $B^n_{x_0}(kr(\varepsilon_0))$ и принимает значения в $B^m_{y_0}(r(\varepsilon_0))$. Из равенства $F(X,\ \Theta_\varepsilon(X,Y)) = F(x_0,y_0) + \varepsilon(Y - y_0)$ следует, что

$$F(x, G_\varepsilon(x)) = F(x_0,y_0),\ x \in B^n_{x_0}(kr(\varepsilon_0)), \tag{11}$$

и так как (x_0,y_0) — неподвижная точка отображений $\Phi_\varepsilon(x,y)$, то

$$G_\varepsilon(x_0) = \Theta_\varepsilon(x_0,y_0) = y_0.$$

По лемме 2 функция $G_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условиям Липшица:

$$|G_\varepsilon(x_2) - G_\varepsilon(x_1)| \le \sqrt{L(\varepsilon)^2 - 1}|x_2 - x_1|,\ \ x_2,x_1 \in B^n_{x_0}(kr(\varepsilon)), \tag{12}$$

$$|G_\varepsilon(x_2) - G_\varepsilon(x_1)| \le \sqrt{L(\varepsilon_0)^2 - 1}|x_2 - x_1|,\ \ x_2,x_1 \in B^n_{x_0}(kr(\varepsilon_0)),$$

где

$$\sqrt{L(\varepsilon)^2 - 1} = \frac{\sqrt{\Delta^2 + 2\varepsilon\sqrt{1 + \Delta^2 + \varepsilon^2 L^2} + \varepsilon^2(1 + \Delta^2 + L^2 + \varepsilon^2 L^2)}}{1 - \varepsilon\sqrt{1 + \Delta^2 + \varepsilon^2 L^2}}.$$

Покажем, что $G_\varepsilon(x)$ не зависит от ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. Если в некоторой точке $x \in B^n_{x_0}(kr(\varepsilon_0))$ выполняется $G_{\varepsilon_1}(x) \ne G_{\varepsilon_0}(x)$, то поскольку все $\Phi_\varepsilon(x,y)$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ взаимно однозначны, то $\Phi_{\varepsilon_0}(x, G_{\varepsilon_1}(x)) \ne \Phi_{\varepsilon_0}(x, G_{\varepsilon_0}(x))$. Но в силу (11) $\Phi_{\varepsilon_1}(x, G_{\varepsilon_1}(x)) = (x,\ 0_m)$ и $\Phi_{\varepsilon_1}(x, G_{\varepsilon_0}(x)) = (x, \varepsilon_1^{-1}(F(x, G_{\varepsilon_0}(x,\ y_0)) - F(x_0,y_0)) = (x,\ 0_m)$. Полагаем $G(x) = G_{\varepsilon_0}(x)$. Отображение $G : B^n_{x_0}(kr(\varepsilon_0)) \to B^m_{y_0}(r(\varepsilon_0))$ удовлетворяет равенству $F(x,\ G(x)) = F(x_0,y_0)$, $x \in B^n_{x_0}(kr(\varepsilon_0))$, и единственно. В самом деле, если $(x,y) \in B^n_{x_0}(kr(\varepsilon_0)) \times B^m_{y_0}(r(\varepsilon_0)) \subset B^{n+m}_{(x_0,y_0)}(r(\varepsilon_0))$ и $F(x,y) = F(x,G(x))$, то $\Phi_{\varepsilon_0}(x,y) = \Phi_{\varepsilon_0}(x, G(x))$, то есть $y = G(x)$.

Для завершения доказательства отметим, что пользуясь (12) для каждого Δ^*, $\Delta < \Delta^*$, мы можем выбрать такое ε_0, $\varepsilon_0 \le \min\left\{\frac{1}{4\sqrt{1+\Delta^2}}, \frac{\sqrt{1+\Delta^2}}{L}\right\}$, что $\sqrt{L(\varepsilon)^2 - 1} < \Delta^*$, для всех ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Затем, полагаем $R = kr(\varepsilon_0)$, $\Omega R = r(\varepsilon_0) = R/k$. Функция $G : B^n_{x_0}(R) \to B^m_{y_0}(\Omega R)$ удовлетворяет всем заключениям теоремы и, как следует из (12), $\lim\limits_{r \to 0+} Lip(G, B^n_{x_0}(r)) \le \Delta$. Теорема доказана.

Из этой теоремы получаем следствие.

Следствие. *Пусть U — область в $\mathbf{R}^n$ и отображение $F : U \to \mathbf{R}^n$ — липшицево. Если $\partial F(a)$, $a \in U$, имеет максимальный ранг, то существует такая окрестность V точки a, что F гомеоморфно на V, а отображение $F^{-1} : F(V) \to \mathbf{R}^n$ липшицево на $F(V)$. При этом* $\lim\limits_{r \to 0+} Lip(F^{-1}, B^n_{F(a)}(r)) \le \max\limits_{D \in \partial F(a)} |D^{-1}|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М. : Наука, 1988. — 280 с.

2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 543 с.

3. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. Н. Соболев. — М. : Наука, 1965. — 520 с.

4. Clarke, F. On the invers function theorem / F. Clarke // Pac. J. Math. — 1976. — Vol. 64, № 1. — P. 97–102.

REFERENCES

1. Klark F. *Optimizatsiya i negladkiy analiz* [Optimization and Nonsmooth Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 280 p.
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the Function Theory and Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 543 p.
3. Lyusternik L.A., Sobolev V.N. *Elementy funktsionalnogo analiza* [Elements of Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 520 p.
4. Clarke F. On the Invers Function Theorem. *Pac. J. Math.*, 1976, vol. 64, no. 1, pp. 97-102.

ON THE IMPLICIT FUNCTION THEOREM FOR LIPSCHITZ MAPPINGS

Igor Vladimirovich Zhuravlev

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
igor.zhuravlev@volsu.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. New estimations for Lipschitz constant of solutions in the Clarke's implicit function theorem are proved.

Let $U = B^n_{x_0}(r_1) \subset \mathbf{R}^n$, $V = B^m_{y_0}(r_2) \subset \mathbf{R}^m$ and $F : U \times V \to \mathbf{R}^m$ be a local Lipschitz mapping in some neighbourhood of point (x_0, y_0). Let $\partial_y F(x_0, y_0)$ is of maximal rank. Then for every Δ^*, $\Delta < \Delta^*$, there exist R, $0 < R \le \min\{r_1, r_2\}$, and a unique Lipschitz mapping $G : B^n_{x_0}(R) \to B^m_{y_0}(\Omega R)$ such that

$$G(x_0) = y_0, \quad F(x, G(x)) = F(x_0, y_0),\ x \in B^n_{x_0}(R),$$

and

$$|G(x_2) - G(x_1)| \le \Delta^* |x_2 - x_1|,\ x_2, x_1 \in B^n_{x_0}(R).$$

Moreover, we have $\lim\limits_{r \to 0+} Lip(G, B^n_{x_0}(r)) \le \Delta$.

Key words: the implicit function theorem, the inverse function theorem, Clarke derivative, Lipschitz mappings, Lipschitz constant.