www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

ТРУДЫ III МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ»

DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.1
УДК 517.95
ББК 22.161

ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИНДЕЛЕФА ДЛЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Рипсиме Сергоевна Акопян

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
Волгоградский государственный аграрный университет
akrim111@yandex.ru
просп. Университетский, 26, 400002 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Различные задачи асимптотического поведения минимальных поверхностей, заданных над неограниченными областями, изучались во многих работах (см., например, [1–3; 5–7]). Получены теоремы типа Линделефа о предельном значении градиента решения уравнения минимальных поверхностей и гауссовой кривизны рассматриваемых поверхностей на бесконечности.

Ключевые слова: уравнения минимальных поверхностей, гауссова кривизна, асимптотическое поведение, голоморфная функция, изотермические координаты, голоморфная в метрике поверхности функция.

Минимальные графики $z = f(x, y)$ над областями R^2 описываются квазилинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'_x(x,y)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f'_y(x,y)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}}\right)=0. \quad (1)$$

Пусть $f(x,y)$ есть решение уравнения (1), заданное над односвязной областью $D \subset R^2$, ограниченной двумя кривыми L_1 и L_2, выходящими из одной точки и уходящими в бесконечность. Будем считать, что $f(x,y) \in C^2(\overline{D})$.

Пользуясь теоремой Линделефа для функций, голоморфных в неограниченных областях (см. [4, с. 322]), сформулируем вспомогательную теорему для функций голоморфных в метрике поверхности ds_f, где

$$ds_f^2 = (1 + f'^2_x)dx^2 + 2f'_x f'_y dxdy + (1 + f'^2_y)dy^2.$$

Напомним, что голоморфными в метрике ds_f функциями являются функции голоморфные либо антиголоморфные в традиционном смысле в изотермических координатах на поверхности. Ясно, что от выбора координат это не зависит.

Теорема 1. *Пусть функция $h(x,y)$– голоморфна в метрике поверхности ds_f в области D, ограниченной кривыми L_1 и L_2, выходящими из одной точки и уходящими в бесконечность. Если функция $h(x,y)$ непрерывна на кривых L_1 и L_2 и*

$$h(x,y) \to a_n, \qquad ((x,y) \to \infty, (x,y) \in L_n) \qquad n = 1,\ 2,$$

то имеет место одна из двух возможностей: или функция $h(x,y)$ не ограничена в области D, или $a_1 = a_2 = a$ и $h(x,y) \to a$ при (x,y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D.

Доказательство. Возьмем произвольно точку $(x_0,y_0) \in \overline{D}$ и введем в рассмотрение однозначные в $\overline{D}$ функции, существование которых показано в работе [6]:

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{f'_x(t,s)f'_y(t,s)}{\sqrt{1 + |\bigtriangledown f(t,s)|^2}}\ dt + \frac{1 + f'^2_y(t,s)}{\sqrt{1 + |\bigtriangledown f(t,s)|^2}}\ ds,$$

$$g(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{1 + f'^2_x(t,s)}{\sqrt{1 + |\bigtriangledown f(t,s)|^2}}\ dt + \frac{f'_x(t,s)f'_y(t,s)}{\sqrt{1 + |\bigtriangledown f(t,s)|^2}}\ ds.$$

Известно, что комплекснозначная функция $\zeta = \xi + i\eta$, где

$$\xi = x + g(x,y), \quad \eta = y + v(x,y), \tag{2}$$

является голоморфной в метрике минимальной поверхности и осуществляет введение на графике $z = f(x,y)$ изотермических координат (ξ,η) (см. [6]).

Отображение (2) не уменьшает евклидово расстояние между точками. А именно, для любой пары точек (x_1,y_1) и (x_2,y_2) будет выполнено неравенство (см. [6]):

$$(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 \geq (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

где (ξ_1,η_1), (ξ_2,η_2) — образы точек (x_1,y_1) и (x_2,y_2) соответственно. Из вышесказанного заключаем, что отображение $\zeta(x,y)$ однолистно в $\overline{D}$, причем образом D в плоскости переменных (ξ,η) будет некоторая область D', ограниченная кривыми L'_1 и L'_2, выходящими из одной точки и уходящими в бесконечность. Здесь L'_1 и L'_2 образы граничных кривых L_1 и L_2 соответственно.

Если функция $h(x,y)$ голоморфна в метрике поверхности $z = f(x,y)$, то сложная функция $h(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ будет голоморфной в области D' в традиционном понимании. Здесь $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$ – отображение, обратное к отображению (2). Голоморфная в области D' функция $\check{h}(\xi,\eta) \equiv h(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ является непрерывной на кривых L'_1 и L'_2 и удовлетворяет условиям

$$\check{h}(\xi,\eta) \to a_n, \qquad ((\xi,\eta) \to \infty, (\xi,\eta) \in L'_n) \qquad n = 1,\ 2,$$

следовательно, по теореме Линделефа для функций, голоморфных в неограниченных областях (см. [4, с. 322]), имеет место одна из двух возможностей: или $\check{h}(\xi,\eta)$ не ограничена в области D', или $a_1 = a_2 = a$ и $\check{h}(\xi,\eta) \to a$ при (ξ,η), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D'. Возвращаясь к функции $h(x,y)$, получаем наше утверждение: или функция $h(x,y)$ ограничена в области D, или $a_1 = a_2 = a$ и $h(x,y) \to a$ при (x,y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D.

Используя полученный результат, выводим, что при вышеуказанных предположениях на минимальную поверхность $z = f(x,y)$ будет справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если градиент функции $f(x,y)$ на кривых L_1 и L_2 удовлетворяет условиям*

$$\nabla f(x,y) \to a_n, \qquad a_n \in R^2, \qquad ((x,y) \to \infty, (x,y) \in L_n) \qquad n = 1,\ 2,$$

то имеет место одна из двух возможностей: или $\nabla f(x,y)$ не ограничен в области D, или $a_1 = a_2 = a$ и $\nabla f(x,y) \to a$ при (x,y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D.

Доказательство. Рассмотрим комплекснозначную функцию

$$\chi(x,y) = \frac{f'_x(x,y)}{1 + \sqrt{1 + |\bigtriangledown f(x,y)|^2}} - i\frac{f'_y(x,y)}{1 + \sqrt{1 + |\bigtriangledown f(x,y)|^2}}.$$

Известно ([8, с. 113]), что данная функция является голоморфной в метрике минимальной поверхности $z = f(x,y)$. Причем, так как $f(x,y) \in C^2(\overline{D})$, то на кривых L_1 и L_2 функция $\chi(x,y)$ непрерывна и выполняются условия

$$\chi(x,y) \to \alpha_n, \qquad ((x,y) \to \infty, (x,y) \in L_n) \qquad n = 1,\ 2,$$

где $\alpha_n = \frac{a_{n1}}{1+\sqrt{1+|a_n|^2}} - i\frac{a_{n2}}{1+\sqrt{1+|a_n|^2}}$, (a_{n1}, a_{n2}) — координаты a_n. Следовательно, так как функция $\chi(x,y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, то отсюда выводим, что или $\chi(x,y)$ не ограничена в области D, или $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и функция $\chi(x,y) \to \alpha$ при (x,y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D. А это означает, что для градиента $\nabla f(x,y)$ имеет место одна из двух возможностей: или градиент $\nabla f(x,y)$ не ограничен в области D, или $a_1 = a_2 = a$ и $\nabla f(x,y) \to a$ при (x,y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D.

Обозначим $K(x,y)$ гауссову кривизну минимальной поверхности $z = f(x,y)$. Отметим, что $K(x,y) \le 0$. Так как $f(x,y)$ имеет непрерывные вторые производные вплоть до границы области D, то гауссова кривизна $K(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если гауссова кривизна $K(x,y)$ минимальной поверхности (1) на кривых L_1 и L_2 удовлетворяет условиям*

$$K(x,y) \to b_n, \qquad ((x,y) \to \infty, (x,y) \in L_n) \qquad n = 1,\ 2,$$

и, кроме того, градиент функции $f(x,y)$ на кривых L_1 и L_2 имеет равные предельные значения при $(x,y) \to \infty$, то имеет место одна из двух возможностей: или $K(x,y)$ не ограничена в области D, или $b_1 = b_2 = b$ и $K(x,y) \to b$ при (x,y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D.

Доказательство. Известно ([8, с. 113]), что через производную функции $\chi(x,y)$ по параметру $\zeta = \xi + i\eta$ выражается гауссова кривизна поверхности $K(x,y)$. Причем

$$|\chi'_\zeta(x,y)|^2 = \frac{-K(x,y)(1 + |\bigtriangledown f(x,y)|^2)^2}{(1 + \sqrt{1 + |\bigtriangledown f(x,y)|^2})^4}. \tag{3}$$

Так как

$$0 < \frac{(1 + |\bigtriangledown f(x,y)|^2)^2}{(1 + \sqrt{1 + |\bigtriangledown f(x,y)|^2})^4} < 1, \tag{4}$$

то из равенства (3) и условий теоремы следует, что на кривых L_1 и L_2 функция $|\chi'_\zeta(x,y)|$ непрерывна и представляется как произведение сходящихся при $(x,y) \to \infty$ функций: $\sqrt{-K(x,y)}$ и $\frac{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2}{(1+\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2})^2}$.

Тогда голоморфная в метрике поверхности функция $\chi'_\zeta(x,y)$ непрерывна на кривых L_1 и L_2 и существуют пределы при $(x,y) \to \infty$:

$$\chi'_\zeta(x,y) \to c_n, \qquad ((x,y) \to \infty, (x,y) \in L_n) \qquad n = 1,\ 2,$$

где $|c_n|^2 = -b_n \cdot k, \qquad k = \lim\limits_{(x,y)\to\infty} \frac{(1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2)^2}{(1+\sqrt{1+|\bigtriangledown f(x,y)|^2})^4}, (x,y) \in L_n \qquad n = 1,\ 2.$

Используя теорему 1 для функции $\chi'_\zeta(x,y)$, выводим, что или $\chi'_\zeta(x,y)$ не ограничена в области D, или $c_1 = c_2 = c$ и $\chi'_\zeta(x,y) \to c$ при (x,y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D. Возвращаясь к функции $K(x,y)$, учитывая (3), (4) и условие теоремы о равных предельных значениях градиента при $(x,y) \to \infty$ на кривых L_1 и L_2, для гауссовой кривизны минимальной поверхности получаем нужное утверждение: или $K(x,y)$ не ограничена в области D, или $b_1 = b_2 = b$ и $K(x,y) \to b$ при (x,y), стремящемся к бесконечности по любому пути, лежащему в области D.

Близкие по содержанию результаты о предельном значении гауссовой кривизны минимальной поверхности на бесконечности были получены в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян, Р. С. О допустимой скорости стремления к нулю гауссовой кривизны минимальной поверхности над полосообразной областью / Р. С. Акопян // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 2 (17). — С. 4–8.

2. Акопян, Р. С. О предельном значении гауссовой кривизны минимальной поверхности на бесконечности / Р. С. Акопян // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — № 1 (32). — С. 6–10.

3. Акопян, Р. С. Теоремы типа Фрагмена — Линделефа для минимальной поверхности над полосообразной областью / Р. С. Акопян // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 2 (19). — С. 6–12.

4. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. — М. : Наука, 1991. — 448 с.

5. Миклюков, В. М. Некоторые вопросы качественной теории уравнений типа минимальной поверхности / В. М. Миклюков // Граничные задачи математической физики. — Киев : Наукова Думка, 1983. — С. 137–146.

6. Осерман, Р. Минимальные поверхности / Р. Осерман // Успехи мат. наук. — 1967. — Т. XXII, № 4. — С. 55–136.

7. Пелих, В. И. Теоремы Фрагмена — Линделефа на минимальных поверхностях / В. И. Пелих // Геометрический анализ и его приложения: Научные школы ВолГУ. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 1999. — С. 352–368.

8. Nitsche, J. C. C. Vorlesungen über Minimalflächen / J. C. C. Nitsche. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1975. — 199 p.

REFERENCES

1. Akopyan R.S. O dopustimoy skorosti stremleniya k nulyu gaussovoy krivizny minimalnoy poverkhnosti nad polosoobraznoy oblastyu [About the Admissible Speed of Approaching to Zero of Gaussian Curvature of Minimal Surface over Strip Domain]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2012, no. 2 (17), pp. 4-8.

2. Akopyan R.S. O predelnom znachenii gaussovoy krivizny minimalnoy poverkhnosti na beskonechnosti [Limit Value of the Gaussian Curvature of the Minimal Surface at Infinity]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, no. 1 (32), pp. 6-10.

3. Akopyan R.S. Teoremy tipa Fragmena — Lindelefa dlya minimalnoy poverkhnosti nad polosoobraznoy oblastyu [Fragmén — Lindelöf Type Theorems for the Minimal Surface over Strip Domain]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2013, no. 2 (19), pp. 6-12.

4. Evgrafov M.A. *Analiticheskie funktsii* [Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 448 p.

5. Miklyukov V.M. Nekotorye voprosy kachestvennoy teorii uravneniy tipa minimalnoy poverkhnosti [On the Hyberbolicity Criterior for Noncompact Riemannian Manifolds of Special Type]. *Granichnye zadachi matematicheskoy fiziki*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1983, pp. 137-146.

6. Oserman R. Minimalnye poverkhnosti [Minimal Surfaces]. *Uspekhi mat. nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1967, vol. XXII, no. 4, pp. 55-136.

7. Pelikh V.I. Teoremy Fragmena — Lindelefa na minimalnykh poverkhnostyakh [Theorems of Fragmén — Lindelöf on Minimal Surfaces]. *Geometricheskiy analiz i ego prilozheniya: Nauchnye shkoly VolGU*. Volgograd, Izd-vo VolGU, 1999, pp. 352-368.

8. Nitsche J.C.C. *Vorlesungen über Minimalflächen*. Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag, 1975. 199 p.

LINDELÖF-TYPE THEOREMS FOR THE MINIMAL SURFACE AT INFINITY

Ripsime Sergoevna Akopyan

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Higher Mathematics,
Volgograd State Agrarian University
akrim111@yandex.ru
Prosp. Universitetsky, 26, 400002 Volgograd, Russian Federation

Abstract. A lot of works on researching the solutions of equation of the minimal surfaces, which are given over unbounded domains (see, for example, [1–3; 5–7]) in which various tasks of asymptotic behavior of the minimal surfaces were studied. The obtained theorems of Lindelöf type about the limiting value of the gradient of the solution of the equation of minimal surfaces and Gaussian curvature of the considered surface at infinity.

Let $z = f(x, y)$ be a solution of the equation of minimal surfaces (1) given over the domain D bounded by two curves L_1 and L_2, coming from the same point and going into infinity. We assume that $f(x, y) \in C^2(\overline{D})$.

For the Gaussian curvature of minimal surfaces $K(x, y)$ will be the following theorem.

Theorem. If the Gaussian curvature $K(x, y)$ of the minimal surface (1) on the curves L_1 and L_2 satisfies the conditions

$$K(x,y) \to b_n, \qquad ((x,y) \to \infty, (x,y) \in L_n) \qquad n = 1,\ 2,$$

and, in addition, the gradient of the function $f(x, y)$ on the curves L_1 and L_2 has the equal limit values for $(x, y) \to \infty$, this is one of two possibilities: or $K(x, y)$ not limited to D, or $b_1 = b_2 = b$ and $K(x, y) \to b$ for (x, y) tending to infinity along any path lying in the domain D.

Key words: equations of the minimal surfaces, gaussian curvature, asymptotic behavior, holomorphic function, isothermal coordinates, holomorphic in the metric of the surface function.