DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.3

УДК 517.98
ББК 22.162

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ *L*-СЖАТИЙ

Александр Григорьевич Королев

Ph.D., старший преподаватель кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
akorolev5@yandex.com
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе вводится понятие L-сжатия для нелинейных операторов, действующих в пространстве $C([0,T];X)$, и доказывается существование неподвижной точки для подобных отображений. Результат может рассматриваться как обобщение известного принципа сжимающих отображений Банаха.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, теоремы о неподвижных точках, принцип сжимающих отображений Банаха, обобщенные сжатия, метод последовательных приближений.

Нашей целью является установление нового принципа неподвижной точки для нелинейных операторов, действующих в пространстве $C([0,T];X)$. Данный результат может рассматриваться как обобщение хорошо известного принципа сжимающих отображений Банаха.

Пусть X есть некоторое банахово пространство, $T>0$ и $C([0,T];X)$ есть пространство непрерывных X-значных функций, определенных на отрезке $I=[0,T]$ в X со стандартной нормой:

$$\|u\| = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Пусть теперь F есть замкнутое подмножество $C([0,T];X)$. Рассмотрим непрерывный, возможно нелинейный оператор $N\colon F\to F$, отображающий F в себя.

Определение 1. *Будем говорить, что N есть L-сжатие на F, если для любых $u,v\in F$ выполнено так называемое L-условие, если справедливо следующее:*

$$\|N(u)(t)-N(v)(t)\|_X \le L(\|u(t)-v(t)\|_X), \tag{1}$$

где $L\colon C[0,T]\to C[0,T]$ есть линейный монотонный оператор, действующий на пространстве $C([0,T];\mathbb{R})$ непрерывных функций со спектральным радиусом $\rho(L)<1$.

Основной результат статьи в том, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что оператор N является L-сжатием на F. Тогда N имеет неподвижную точку в F.*

Доказательство. Мы будем использовать метод последовательных приближений. Возьмем произвольный элемент $u_0 \in F$ и построим следующую последовательность:

$$u_1 = N(u_0), u_2 = N(u_1), \ldots, u_{n+1} = N(u_n), \ldots$$

Поскольку F есть замкнутое и инвариантное относительно действия N множество, то данная последовательность u_n и все ее возможные предельные точки принадлежат F.

Теперь оценим

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_X = \|N(u_n)(t) - N(u_{n-1})(t)\|_X \leq L(\|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|_X).$$

Так как L монотонный, то мы может проитерировать достаточное число раз, получив

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_X \leq L^n(F)(t),$$

где мы обозначили $F(t) = \|N(u_0)(t) - u_0(t)\|_X$.

Следовательно, верно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_X \leq \sum_{n=0}^{\infty} L^n(F)(t). \tag{2}$$

Заметим теперь, что ряд в правой части сходится в $C([0,T];\mathbb{R})$ в силу условия $\rho(L) < 1$ (резольвента оператора L определена в точке $z = 1$).

Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}[u_{n+1}(t) - u_n(t)]$ абсолютно и равномерно сходится в $C([0,T];X)$, а значит последовательность $u_n(t)$ сходится с необходимостью к неподвижной точке оператора N (поскольку N непрерывен как L-сжатие).

Замечание 1. Для данного L из доказательства следует, что для того, чтобы установить существование неподвижной точки нелинейного L-сжатия N, достаточно либо установить, что $\rho(L) < 1$, либо непосредственно доказать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} L^n(1)(t)$ в $C([0,T];\mathbb{R})$. В последующих примерах мы используем это замечание.

Пример 1. Пусть $L = q\,E + K$, где $0 < q < 1$, и E есть единичный оператор, а K оператор Вольтерра. Спектр оператора Вольтерра K состоит только из нулевой точки, потому $\rho(L) = q < 1$ и, следовательно, применима главная теорема (1).

В случае, когда $K = 0$, результат тривиально следует из принципа сжимающих отображений Банаха.

Пример 2. Случай $L = q\,E + K$, когда

$$K(f)(t) = Ct^{-a}\int_0^t f(s)\,ds, \tag{3}$$

при $0 < q,\ a < 1,\ C > 0$, был рассмотрен в [2], где была доказана соответствующая теорема о неподвижной точке для операторов данного вида.

Пример 3. Теперь рассмотрим случай, когда $L = bK$, $b > 0$, где K есть интегральный оператор вида:

$$K(f)(t) = \int_0^t K(t,s)f(s)ds, \tag{4}$$

для некоторого положительного ядра $K(t,s) \geq 0$, где мы требуем, чтобы K действовал на $C([0,T];\mathbb{R})$ с $\rho(K) < 1$.

Особый интерес представляет случай, когда

$$K = K_{a,b}(t,s) = s^{-b}(t-s)^{-a} \tag{5}$$

при $0 < a,\ b < 1$, $a + b < 1$.

Оказывается, что в этом случае мы можем точно посчитать выражения вида

$$J_{a,b,k} = K_{a,b}(t^k) = \int_0^t s^{-b+k}(t-s)^{-a}ds. \tag{6}$$

Для этой цели мы сделаем замену переменной $s = t\tau$ и тогда

$$J_{a,b,k} = t^{k+1-b-a}\int_0^1 \tau^{-b+k}(1-\tau)^{-a}d\tau = t^{k+1-b-a}B(k+1-b,1-a),$$

где $B(m,n)$ есть хорошо известная бета-функция

$$B(m,n) = \int_0^1 \tau^{m-1}(1-\tau)^{n-1}d\tau = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

и $\Gamma(n)$ есть гамма-функция (см. для справки, например, [1]).

Обозначим $c = 1 - a - b > 0$.

Таким образом, получается, что t^k переходит в t^{k+c} с точностью до константы $B(k+1-b,1-a)$:

$$J_{a,b,k} = t^{k+c}B(k+1-b,1-a) = t^{k+c}\frac{\Gamma(k+1-b)\Gamma(1-a)}{\Gamma(k+2-a-b)}. \tag{7}$$

Теперь мы можем представить

$$S_1 = K(1) = J_{a,b,0} = B(1-b,1-a)t^c = D_1t^c,$$

$$S_2 = K(S_1) = B(1-b,1-a)J_{a,b,c} = B(1-b,1-a)B(c+1-b,1-a)t^{2c} = D_2t^{2c},$$

$$S_3 = K(S_2) = D_2J_{a,b,2c} = B(1-b,1-a)B(c+1-b,1-a)B(2c+1-b,1-a)t^{3c} = D_3t^{3c}.$$

И далее по индукции

$$S_n = K(S_{n-1}) = K^n(1) = D_nt^{nc}.$$

Обозначив через $A = \Gamma(1-a)$ и $B = \Gamma(1-b)$, запишем

$$D_1(a,b) = \frac{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1+c)} = \frac{BA}{\Gamma(1+c)},$$

$$D_2(a,b) = D_1(a,b)B(c+1-b,1-a) = BA^2\frac{\Gamma(1-b+c)}{\Gamma(1+c)}\frac{1}{\Gamma(1+2c)} = \frac{BA^2e_1(b,c)}{\Gamma(1+2c)},$$

$$D_3(a,b) = D_2(a,b)B(2c+1-b,1-a) = BA^3e_1\frac{\Gamma(1-b+2c)}{\Gamma(1+2c)}\frac{1}{\Gamma(1+3c)} = \frac{BA^3e_1e_2}{\Gamma(1+3c)}.$$

По индукции

$$D_n(a,b) = \frac{BA^ne_1\dots e_{n-1}}{\Gamma(1+nc)},$$

где

$$e_p = \frac{\Gamma(1-b+pc)}{\Gamma(1+pc)},$$

и $e_p < 1$ при условии $pc > b$.

Получили, что

$$D_n = \frac{BA^nE_n}{\Gamma(1+nc)},$$

где $E_n = e_1\dots e_{n-1}$ ограничена по n.

Согласно формуле Стирлинга $\Gamma(1+z)$ асимпотически равно $z^ne^{-n}\sqrt{2\pi z}$.

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} L^n(1) = \sum_{n=1}^{\infty} b^nS_n = \sum_{n=1}^{\infty} b^nD_nt^{nc} \tag{8}$$

сходится в $C([0,T];\mathbb{R})$ для любого $T > 0$. Потому оператор N (который есть L-сжатие для $L = bK$) имеет неподвижную точку, которая может быть найдена методом последовательных приближений, как показано в доказательстве основной теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andrews, G. E. Special Functions / G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy. — Cambridge : Cambridge University Press, 1999. — 664 p.

2. Lou, B. Fixed points for operators in a space of continuous functions and applications / B. Lou // Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 127. — P. 2259–2264.

REFERENCES

1. Andrews G.E., Askey R., Roy R. *Special Functions*. Cambridge, Cambridge University Press, 1999. 664 p.

2. Lou B. Fixed Points for Operators in a Space of Continuous Functions and Applications. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 127, pp. 2259-2264.

A FIXED POINT THEOREM FOR *L*-CONTRACTIONS

Alexander Grigoryevich Korolev

Ph.D., Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
akorolev5@yandex.com
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Our goal is to introduce a new fixed point theorem for operators acting on the space $C([0,T];X)$. This result can be considered as a generalization of the celebrated Banach Contraction Principle.

Let X be a Banach space, $T > 0$ and consider the space $C([0,T];X)$ of continuous X-valued functions from the segment $I = [0,T]$ to X equipped with the uniform norm:

$$\|u\| = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Let F be a closed subset of $C([0,T];X)$. Consider a continuous non-linear operator $N\colon F \to F$ that maps F to itself.

We say that the operator N is L-contraction on F if for any $u, v \in F$ it satisfies the so called L-condition:

$$\|N(u)(t) - N(v)(t)\|_X \leq L(\|u(t) - v(t)\|_X),$$

where $L\colon C[0,T] \to C[0,T]$ is a linear positive monotone operator acting on the space $C([0,T];\mathbb{R})$ of the real-valued continuous functions and having the spectral radius $\rho(L) < 1$.

Our main result is the following theorem.

Theorem. *Suppose that an operator N is L-contraction on F. Then N has a fixed point in F.*

Key words: nonlinear equations, fixed point theorems, Banach contraction principle, generalized contractions, method of successive approximations.