DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.2

УДК 517.544
ББК 22.162

ТОЧНЫЙ ПОРЯДОК РОСТА МАЖОРАНТЫ В НЕРАВЕНСТВЕ ШВАРЦА — ПИКА ДЛЯ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ

Динара Халиловна Гиниятова

Соискатель кафедры теории функций и приближений,
Казанский (Приволжский) федеральный университет
normaliti@gmail.com
ул. Кремлевская, 18, 420008 г. Казань, Российская Федерация

Аннотация. В статье [6], посвященной аналогам леммы Шварца для интегральных характеристик областей, были получены новые неравенства типа Шварца — Пика для коэффициента жесткости кручения плоской односвязной области. Однако вопрос о точности представленных оценок до сих пор оставался открытым. В настоящей работе устанавливается асимптотическая точность указанных оценок для коэффициента жесткости кручения.

Ключевые слова: неравенства типа Шварца — Пика, коэффициент жесткости кручения, лемма Шварца, конформные отображения.

Введение

Неравенства типа Шварца — Пика берут свое начало в классических трудах Пика [14], Каратеодори [13], Саца [19], Бернштейна [12] и др. Последние десятилетия эта тематика активно развивалась, ряд результатов по неравенствам данного типа можно найти в работах Рушевея [16; 17], Ямашиты [20], Авхадиева [7–10] и др. (см. также [2–4]). Основным объектом изучения в подобных неравенствах являются производные функций f, в общем случае локально голоморфных или мероморфных в некоторой гиперболической области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ и таких, что $f(\Omega) \subset \Pi \subset \overline{\mathbb{C}}$. В работе [6], посвященной аналогам леммы Шварца для интегральных характеристик плоских односвязных областей, неравенства типа Шварца — Пика удалось распространить на физический функционал области, такой как коэффициент жесткости кручения. Ниже приведем основные определения и необходимые результаты из данной статьи.

Пусть Ω — произвольная односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Жесткостью кручения (коэффициентом жесткости кручения) упругой балки с поперечным сечением Ω называется функционал $P(\Omega)$, определяемый как решение следующей вариационной задачи (см. [11; 15]):

$$P(\Omega) = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\left(2\int_\Omega u(x)dx\right)^2}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy},$$

где $(x, y) \in \Omega$, $C_0^\infty(\Omega)$ — пространство гладких функций с компактным носителем в Ω. Общая теория кручения была разработана Сен-Венаном. Согласно предложенной им формуле:

$$P(\Omega) = 2 \iint_\Omega \upsilon\, dxdy,$$

где $\upsilon = \upsilon(x, y)$ — решение краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta\upsilon = -2$ с краевым условием $\upsilon\big|_{\partial\Omega} = 0$. Функцию υ называют функцией напряжений. Изучению свойств данной функции посвящено множество работ (см., например, [5; 18]). Эквивалентность двух определений жесткости кручения доказана в [15]. Поскольку функционалы, определяемые посредством краевых задач, являются трудно вычислимыми, важной проблемой математической физики является получение оценок для них через более простые, геометрические, характеристики области. В 1998 г. Ф.Г. Авхадиевым было установлено, что жесткость кручения эквивалентна конформному и евклидовому моменту инерции относительно границы [1].

Далее пусть Ω — произвольная односвязная область в $\mathbb{C}$ и $0 \in \Omega$. Согласно теореме Римана существует функция $f : \Delta \to \Omega$, такая что $f(0) = 0$. Пусть Ω_r — образ круга $\Delta_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < r\}$ при отображении функцией f для всякого $r \in (0, 1)$, то есть $\Omega_r = \{z \in \Omega : z = f(\zeta), |\zeta| < r, r \in (0, 1)\}$. В [1] сформулирован аналог теоремы Шварца — Пика для $P(\Omega)$, а именно доказана теорема.

Теорема. *Пусть $P(\Omega) < \infty$ и $0 < r < 1$. Тогда справедливы следующие неравенства*

$$\frac{dP(\Omega_r)}{dr} < \frac{4r^3}{1 - r^8} P(\Omega),$$

и для всякого $m \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{P(\Omega_r)}{r^4}\right)^{(2m+1)} < \frac{(2m+1)!P(\Omega)}{(1 - r^2)^{2m+1}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 r^{2k}. \tag{1}$$

Оба неравенства в данной теореме являются строгими. Например, для первого неравенства это означает, что для любой константы $c > 0$ не существует области Ω, такой что

$$\frac{dP(\Omega_r)}{dr} \ge \frac{cr^3}{1 - r^2}, \quad (0 < r < 1).$$

В этом легко убедиться, тем не менее, ниже мы покажем, что порядок точности приведенных оценок улучшить нельзя. В этом смысле полученные оценки являются асимптотически точными.

1. Основные результаты

Теорема 1. *Для любого $r_0 \in [1/2, 1)$ существует область $\Omega = \Omega(r_0)$, содержащая в себе точку $z = 0$, такая что*

$$\left.\frac{dP(\Omega_r(r_0))}{dr}\right|_{r=r_0} \ge \frac{c_0}{1 - r_0^2},$$

где $c_0 = \frac{\pi}{2^7 3^5}$.

Доказательство. В качестве области Ω рассмотрим круг единичного радиуса, граница которого проходит близко к началу координат (рис. 1).

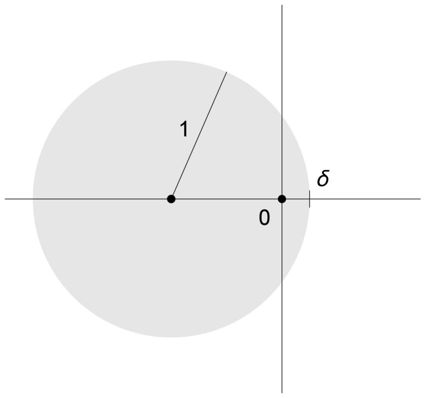

Рис. 1. Область Ω

В [6] доказана формула

$$P(\Omega_r) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty} r^{2n}\sum_{\alpha=1}^{[\frac{n}{2}]}\left|\sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta a_{n-\beta}\right|^2, \qquad (2)$$

где a_i — коэффициенты разложения в ряд Тейлора конформного отображения $f:\Delta\to\to\Omega$. Воспользуемся этой формулой в качестве примера ее практического применения для вычисления $P(\Omega_r)$. Построим отображающую функцию $f(z)$, которая переводит единичный круг Δ в область Ω с соответствием $f(0)=0$:

$$f(z) = \frac{z-(\delta-1)}{1-(\delta-1)z} + \delta - 1.$$

Разложим $f(z)$ в ряд по степеням z и запишем общий вид коэффициента a_k при z^k:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k\left((-1)^{k-1}(1-\delta)^{k-1} + (-1)^k(1-\delta)^{k+1}\right),$$

то есть

$$a_k = (-1)^{k-1}(1-\delta)^{k-1} + (-1)^k(1-\delta)^{k+1}.$$

Вычислим произведение $a_k a_{n-k}$:

$$\begin{aligned} a_k a_{n-k} = &\left((-1)^{k-1}(1-\delta)^{k-1} + (-1)^k(1-\delta)^{k+1}\right)\left((-1)^{n-k-1}(1-\delta)^{n-k-1} + \right.\\ &\left. + (-1)^{n-k}(1-\delta)^{n-k+1}\right) = (-1)^{n-2}(1-\delta)^{n-2} + 2(-1)^{n-1}(1-\delta)^n + \\ &+ (-1)^n(1-\delta)^{n+2} = (-1)^{n-2}(1-\delta)^{n-2}\left(1-(1-\delta)^2\right)^2. \end{aligned}$$

Обозначим $\gamma = 1-\delta$, тогда согласно формуле (2)

$$P(\Omega_r) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty} r^{2n}\sum_{\alpha=1}^{[\frac{n}{2}]}\left|\sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha}(-1)^{n-2}\gamma^{n-2}(1-\gamma^2)^2\right|^2.$$

Поскольку произведение коэффициентов $a_k a_{n-k}$ не зависит от индекса суммирования, его можно вынести из-под знака суммы. Имеем

$$\left|\sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha}\gamma^{n-2}(-1)^{n-2}(1-\gamma^2)^2\right|^2 = \left|\gamma^{n-2}(-1)^{n-2}(1-\gamma^2)^2(n-2\alpha+1)\right|^2.$$

Следовательно,

$$P(\Omega_r) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty} r^{2n}\gamma^{2n-4}(1-\gamma^2)^4\sum_{\alpha=1}^{[\frac{n}{2}]}|n-2\alpha+1|^2.$$

Имеем

$$P(\Omega_r) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty} r^{2n}\gamma^{2n-4}(1-\gamma^2)^4\cdot\frac{n(n^2-1)}{6}.$$

Вынесем все множители, не зависящие от n, из-под знака суммы, получим

$$P(\Omega_r) = \frac{\pi}{2}\frac{(1-\gamma^2)^4}{6\gamma^4}\sum_{n=2}^{\infty} n(n^2-1)(r\gamma)^{2n}. \tag{3}$$

Введем обозначение $t=(r\gamma)^2$ и вычислим сумму в последнем выражении для $P(\Omega_r)$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n^2-1)t^n = \sum_{n=2}^{\infty} n^3t^n - \sum_{n=2}^{\infty} nt^n. \tag{4}$$

Используя известную формулу для геометрической прогрессии

$$1+t+t^2+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t},$$

дифференцированием по t получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nt^n = \frac{t}{(1-t)^2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} nt^n = \frac{t}{(1-t)^2} - t.$$

Аналогично последовательным дифференцированием вычисляем и первую сумму в (4). Окончательно имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} t^n n(n^2-1) = \frac{6t^2}{(1-t)^4}.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям и применяя формулу (3) для вычисления жесткости кручения $P(\Omega_r)$, получим

$$P(\Omega_r) = \frac{\pi(\delta-2)^4\delta^4 r^4}{2((\delta-1)^2r^2-1)^4}.$$

Вычислим производную

$$\left(\frac{P(\Omega_r)}{r^4}\right)' = \frac{4\pi(2-\delta)^4\delta^4(\delta-1)^2 r}{(1-(\delta-1)^2r^2)^5}.$$

Достаточно показать, что для каждого фиксированного $r_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ приведенная выше область Ω существует. Существование области Ω равносильно в нашем случае существованию величины δ. Положим $\delta = 1 - r_0^2$. Тогда

$$\frac{4\pi(1+r_0^2)^4(1-r_0^2)^4 r_0^5}{(1-r_0^6)^5} = \frac{4\pi(1+r_0^2)^4(1-r_0^2)^4 r_0^5}{(1-r_0^2)^5(1+r_0^2+r_0^4)^5} = \frac{4\pi(1+r_0^2)^4 r_0^5}{(1-r_0^2)(1+r_0^2+r_0^4)^5} \geq \frac{c}{(1-r_0^2)}.$$

Определим константу c из условия неравенства. Имеем

$$\frac{4\pi(1+r_0^2)^4 r_0^5}{(1+r_0^2+r_0^4)^5} \geq \frac{4\pi(1+r_0^2)^4 r_0^5}{3^5} \geq \frac{4\pi r_0^5}{3^5} \geq \frac{4\pi}{2^5 3^5} = \frac{\pi}{1944},$$

то есть в качестве константы c можно взять число $\frac{\pi}{1944}$.

Теперь рассмотрим случай производных порядка $n > 1$. Вычислим производную n-го порядка для функции $P(\Omega_r)/r^4$. Для этого приведем ее к виду

$$\frac{P(\Omega_r)}{r^4} = \frac{\pi(\delta-2)^4\delta^4}{2} \cdot \frac{1}{(1-ar^2)^4},$$

где $a = (\delta-1)^2$. Таким образом, необходимо вычислить производную n-го порядка для функции $1/(1-ar^2)^4$. Для этого предварительно разложим ее в ряд, а затем продифференцируем. Перепишем нашу функцию в виде $1/(1-t)^4 \quad (t = ar^2)$. Тогда, последовательно дифференцируя функцию $1/(1-t)$, получим

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} t^k,$$
$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1},$$
$$\frac{2}{(1-t)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) t^{k-2},$$
$$\frac{2 \cdot 3}{(1-t)^4} = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) t^{k-3}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{1}{(1-ar^2)^4} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}(k+3)(k+2)(k+1)a^k r^{2k}.$$

Последовательно дифференцируем полученный ряд

$$\left(\frac{1}{(1-ar^2)^4}\right)' = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}(k+3)(k+2)(k+1)a^k 2k r^{2k-1},$$
$$\left(\frac{1}{(1-ar^2)^4}\right)'' = \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{\infty}(k+3)(k+2)(k+1)a^k 2k(2k-1) r^{2k-2},$$
$$\left(\frac{1}{(1-ar^2)^4}\right)''' = \frac{1}{6}\sum_{k=3}^{\infty}(k+3)(k+2)(k+1)a^k 2k(2k-1)(2k-2) r^{2k-3}$$

и т. д. Имеем

$$\left(\frac{1}{(1-ar^2)^4}\right)^{(n)} = \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{\infty} a^k(k+3)(k+2)(k+1)\prod_{j=1}^{n}(2k-j+1)r^{2k-n}.$$

Таким образом, получаем

$$\left(\frac{P(\Omega_r)}{r^4}\right)^{(n)} = \frac{\pi}{12}(\delta-2)^4\delta^4(\delta-1)^n\sum_{k=n}^{\infty} t^{k-\frac{n}{2}}(k+3)(k+2)(k+1)\prod_{j=1}^{n}(2k-j+1),$$

где $t=(\delta-1)^2r^2$.

Мы должны показать существование константы $c>0$, такой что

$$\left|\left(\frac{P(\Omega_r(r_0))}{r_0^4}\right)^{(n)}\right| \geq \frac{c}{(1-r_0^2)^n}, \quad r_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим сумму в выражении производной n-го порядка:

$$\sum_{k=n}^{\infty} t^{k-\frac{n}{2}}(k+3)(k+2)(k+1)2k(2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-n+1). \tag{5}$$

Так как

$$\begin{aligned}
&2k \geq k,\\
&2k-1 \geq k-1,\\
&\ldots\\
&2k-n+1 \geq k-n+1 = k-(n-1),
\end{aligned}$$

то выражение (5) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n}^{\infty} t^{k-\frac{n}{2}}(k+3)(k+2)(k+1)2k(2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-n+1) \geq\\
&\geq \sum_{k=n}^{\infty} t^{k-\frac{n}{2}}(k+3)(k+2)(k+1)k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1) =\\
&= t^{\frac{n}{2}}\sum_{k=n}^{\infty} t^{k-n}(k+3)(k+2)(k+1)k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1) =\\
&= \frac{t^{\frac{n}{2}}(n+3)!}{(1-t)^{n+4}} \geq \frac{t^{\frac{n}{2}}}{(1-t)^{n+4}}.
\end{aligned}$$

Имеем

$$\left(\frac{P(\Omega_r(r_0))}{r_0^4}\right)^{(n)} \geq \frac{\pi(\delta-2)^4\delta^4(\delta-1)^n(\delta-1)^n r_0^n}{12(1-(\delta-1)^2r_0^2)^{n+4}}.$$

Положим $\delta = 1-r_0^2$ и покажем, что существует константа $c>0$, такая что

$$\frac{\pi(1+r_0^2)^4 r_0^{3n}}{12(1-r_0^2)^n(1+r_0^2+r_0^4)^{n+4}} \geq \frac{c}{(1-r_0^2)^n}. \tag{6}$$

Из (6) следует, что

$$c \le \frac{\pi r_0^{3n}(1+r_0^2)^4}{12(1+r_0^2+r_0^4)^{n+4}}.$$

Определим константу c из условия неравенства для $1/2 \le r_0 < 1$

$$\frac{\pi r_0^{3n}(1+r_0^2)^4}{12(1+r_0^2+r_0^4)^{n+4}} \ge \frac{\pi r_0^{3n}(1+r_0^2)^4}{12\cdot 3^{n+4}} \ge \frac{\pi r_0^{3n}}{12\cdot 3^{n+4}} \ge \frac{\pi}{12\cdot 2^{3n}\cdot 3^{n+4}}.$$

Следовательно, за константу c можно взять число $\frac{\pi}{2^{3n+2}3^{n+5}}$. Таким образом, нами доказана теорема.

Теорема 2. *Для любого $r_0 \in [1/2, 1)$ существует область $\Omega = \Omega(r_0)$, содержащая в себе точку $z = 0$, такая что*

$$\left(\frac{P(\Omega_r(r_0))}{r^4}\right)^{(n)}\Bigg|_{r=r_0} \ge \frac{c}{(1-r_0^2)^n},$$

где $c = \frac{\pi}{2^{3n+2}3^{n+5}}$.

Замечание. Следует отметить, что утверждение теоремы 2 справедливо для всякого произвольного $n \in \mathbb{N}$, в отличие от неравенства (1), где результат сформулирован лишь для нечетных производных.

Автор благодарит профессора Ф.Г. Авхадиева за проявленный интерес и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авхадиев, Ф. Г. Решение обобщенной задачи Сен-Венана / Ф. Г. Авхадиев // Мат. сб. — 1998. — Т. 189, № 12. — С. 3–12.
2. Гиниятова, Д. Х. Аналог теоремы Саца для вторых производных аналитических функций / Д. Х. Гиниятова // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. — 2009. — Т. 38. — С. 84–85.
3. Гиниятова, Д. Х. Обобщение теорем Саца и Рушевея о точных оценках производных аналитических функций / Д. Х. Гиниятова // Изв. вузов. Математика. — 2009. — № 12. — С. 84–89.
4. Гиниятова, Д. Х. Оценки градиента гиперболического радиуса и неравенства типа Шварца — Пика для эксцентрического кольца / Д. Х. Гиниятова // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия физ.-мат. — 2016. — С. 172–179.
5. Салахудинов, Р. Г. Изопериметрические неравенства для L^p-норм функции напряжения многосвязной области на плоскости / Р. Г. Салахудинов // Изв. вузов. Математика. — 2013. — № 9. — С. 75–80.
6. Abramov, D. A. Versions of the Schwarz lemma for domain moments and the torsional rigidity / D. A. Abramov, F. G. Avkhadiev, D. Kh. Giniyatova // Lobachevskii J. Math. — 2011. — Vol. 32, № 2. — P. 149–158.
7. Avkhadiev, F. G. Estimates of the derivatives of meromorphic maps from convex domains into concave domains / F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths // CMFT. — 2008. — Vol. 8. — P. 107–119.
8. Avkhadiev, F. G. Schwarz — Pick inequalities for hyperbolic domains in the extended plane / F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths // Geom. Dedicata. — 2004. — Vol. 106. — P. 1–10.
9. Avkhadiev, F. G. Schwarz — Pick type inequalities / F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. — Boston ; Berlin ; Bern : Birkhäuser, 2009. — 156 p.

10. Avkhadiev, F. G. The punishing factors for convex pairs are 2^{n-1} / F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths // Revista Math. Iberoamericana. — 2007. — Vol. 23. — P. 847–860.

11. Bandle, C. Isoperimetric inequalities and application / C. Bandle. — Boston : Pitman, 1980. — 228 p.

12. Bernstein, S. N. Sur la limitation des derivees des polynomes / S. N. Bernstein // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1930. — Vol. 190. — P. 338–340.

13. Carathéodory, C. Sur quelques applications du théorème de Landau — Picard / C. Carathéodory // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1907. — Vol. 144. — P. 1203–1206.

14. Pick, G. Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgeschriebene Funktionswerte bewirkt werden / G. Pick // Mat. Ann. — 1916. — Vol. 77. — P. 7–23.

15. Polya, G. Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics / G. Polya, G. Szego. — Princeton : Princeton Univ. Press, 1951. — 279 p.

16. Ruscheweyh, St. Two remarks on bounded analytic functions / St. Ruscheweyh // Bulg. Math. Publ. — 1985. — Vol. 11. — P. 200–202.

17. Ruscheweyh, St. Über einige Klassen in Einheitskreis holomorpher Funktionen / St. Ruscheweyh // Ber. Math.-Stat. Sektion Forschungszentrum Graz. — 1974. — № 7. — P. 1–12.

18. Salakhudinov, R. G. Payne type inequalities for L^p-norms of the warping functions / R. G. Salakhudinov // J. of Math. Anal. and Appl. — 2014. — Vol. 410, № 2. — P. 659–669.

19. Szász, O. Ungleichheitsbeziehungen für die Ableitungen einer Potenzreihe, die eine im Einheitskreise beschränkte Funktion darstellt / O. Szász // Math. Z. — 1920. — № 8. — P. 303–309.

20. Yamashita, S. La dérivée d'une function univalente dans un domaine hyperbolique / S. Yamashita // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1992. — Vol. 314. — P. 45–48.

REFERENCES

1. Avkhadiev F.G. Reshenie obobshchennoy zadachi Sen-Venana [Solution of the Generalized Saint Venant Problem]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1998, vol. 189, no. 12, pp. 3-12.

2. Giniyatova D.Kh. Analog teoremy Satsa dlya vtorykh proizvodnykh analiticheskikh funktsiy [The Analog of Szasz's Theorem for the Second Derivatives of Analytic Functions]. *Tr. mat. tsentra im. N.I. Lobachevskogo*, 2009, vol. 38, pp. 84-85.

3. Giniyatova D.Kh. Obobshchenie teorem Satsa i Rusheveya o tochnykh otsenkakh proizvodnykh analiticheskikh funktsiy [Generalization of Theorems of Szasz and Ruscheweyh on Exact Bounds for Derivatives of Analytic Functions]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2009, no. 12, pp. 84-89.

4. Giniyatova D.Kh. Otsenki gradienta giperbolicheskogo radiusa i neravenstva tipa Shvartsa — Pika dlya ekstsentricheskogo koltsa [Estimates of the Hyperbolic Radius Gradient and Schwarz — Pick Inequalities for the Eccentric Annulus]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Seriya fiz.-mat.*, 2016, pp. 172-179.

5. Salakhudinov R.G. Izoperimetricheskie neravenstva dlya L^p-norm funktsii napryazheniya mnogosvyaznoy oblasti na ploskosti [Isoperimetric Inequalities for L^p-Norms of the Stress Function of a Multiply Connected Plane Domain]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2013, no. 9, pp. 75-80.

6. Abramov D.A., Avkhadiev F.G., Giniyatova D.Kh. Versions of the Schwarz Lemma for Domain Moments and the Torsional Rigidity. *Lobachevskii J. Math.*, 2011, vol. 32, no. 2, pp. 149-158.

7. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. Estimates of the Derivatives of Meromorphic Maps From Convex Domains Into Concave Domains. *CMFT*, 2008, vol. 8, pp. 107-119.

8. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. Schwarz — Pick Inequalities for Hyperbolic Domains in the Extended Plane. *Geom. Dedicata*, 2004, vol. 106, pp. 1-10.

9. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *Schwarz — Pick type inequalities*. Boston; Berlin; Bern, Birkhäuser, 2009. 156 p.
10. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. The Punishing Factors for Convex Pairs are 2^{n-1}. *Revista Math. Iberoamericana*, 2007, vol. 23, pp. 847-860.
11. Bandle C. *Isoperimetric inequalities and application*. Boston, Pitman, 1980. 228 p.
12. Bernstein S.N. Sur la Limitation des Derivees des Polynomes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1930, vol. 190, pp. 338-340.
13. Carathéodory S. Sur Quelques Applications du Théorème de Landau — Picard. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1907, vol. 144, pp. 1203-1206.
14. Pick G. Über Die Beschränkungen Analytischer Funktionen, Welche Durch Vorgeschriebene Funktionswerte Bewirkt Werden. *Mat. Ann.*, 1916, vol. 77, pp. 7-23.
15. Polya G., Szego G. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1951. 279 p.
16. Ruscheweyh St. Two Remarks on Bounded Analytic Functions. *Bulg. Math. Publ.*, 1985, vol. 11, pp. 200-202.
17. Ruscheweyh St. Über Einige Klassen in Einheitskreis Holomorpher Funktionen. *Ber. Math.-Stat. Sektion Forschungszentrum Graz.*, 1974, no. 7, pp. 1-12.
18. Salakhudinov R.G. Payne Type Inequalities for L^p-Norms of the Warping Functions. *J. of Math. Anal. and Appl.*, 2014, vol. 410, no. 2, pp. 659-669.
19. Szász O. Ungleichheitsbeziehungen Für Die Ableitungen Einer Potenzreihe, Die Eine Im Einheitskreise Beschränkte Funktion Darstellt. *Math. Z.*, 1920, no. 8, pp. 303-309.
20. Yamashita S. La Dérivée D'une Function Univalente dans un Domaine Hyperbolique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1992, vol. 314, pp. 45-48.

AN EXACT ORDER OF THE MAJORANT GROWTH IN THE SCHWARZ — PICK INEQUALITY FOR TORSIONAL RIGIDITY

Dinara Khalilovna Giniyatova

Candidate for a Degree, Department of Functions Theory and Approximations,
Kazan Federal University
normaliti@gmail.com
Kremlyovskaya St., 18, 420008 Kazan, Russian Federation

Abstract. The beginning of Schwarz — Pick type inequalities may be found in classical papers of Pick [14], Caratheodory [13], Szasz [19], Bernstein [12] and others. In recent years this program is actively developed, a number of results on inequalities of this type can be found in articles of Ruscheweyh [16; 17], Yamashita [20], Avkhadiev [7–10] etc. (see also [2–4]). These results are concerned with function f holomorphic or meromorphic in a domain Ω in the extended complex plane $\overline{\mathbb{C}}$ and $f(\Omega) \subset \Pi \subset \overline{\mathbb{C}}$. In [6] we obtained Schwarz — Pick type inequalities for the torsional rigidity. As known, the Saint-Venant functional P for the torsional rigidity in an arbitrary plane Ω can be found as the solution of the generalized problem (see [1; 11; 15])

$$P(\Omega) = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\left(2\int_\Omega u(x)dx\right)^2}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy},$$

where $(x, y) \in \Omega,\ C_0^\infty(\Omega)$ — the space of smooth functions with compact support in Ω. Let $\Omega \in \mathbb{C}$ arbitrary simply connected domain and $0 \in \mathbb{C}$. According to

Riemann's theorem there exists a function f such that $f : \Delta \to \Omega$ and $f(0) = 0$. Let Ω_r the image of the circle $\Delta_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < r\}$ under the mapping f for each $r \in (0,1)$, i.e. $\Omega_r = \{z \in \Omega : z = f(\zeta), |\zeta| < r, r \in (0,1)\}$. In [6] an analogue of Schwarz — Pick theorem is formulated for the $P(\Omega)$, to be exact the following theorem is proved there.

Theorem. *Let $P(\Omega) < \infty$ и $0 < r < 1$. Then the following inequalities hold*

$$\frac{dP(\Omega_r)}{dr} < \frac{4r^3}{1-r^8} P(\Omega),$$

and, for each $m \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{P(\Omega_r)}{r^4}\right)^{(2m+1)} < \frac{(2m+1)! P(\Omega)}{(1-r^2)^{2m+1}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 r^{2k}.$$

We see, that both inequalities are strict in this theorem. In this paper we establish the asymptotic accuracy of the estimates. We prove the next theorems:

Theorem 1. *For each $r_0 \in [1/2, 1)$ there exists $\Omega = \Omega(r_0)$, $z = 0 \in \Omega$, such that*

$$\left.\frac{dP(\Omega_r(r_0))}{dr}\right|_{r=r_0} \geq \frac{c_0}{1-r_0^2},$$

where $c_0 = \frac{\pi}{2^7 3^5}$.

Theorem 2. *For each $r_0 \in [1/2, 1)$ there exists $\Omega = \Omega(r_0)$, $z = 0 \in \Omega$, such that*

$$\left.\left(\frac{P(\Omega_r(r_0))}{r^4}\right)^{(n)}\right|_{r=r_0} \geq \frac{c}{(1-r_0^2)^n},$$

where $c = \frac{\pi}{2^{3n+2} 3^{n+5}}$, n>1

Key words: Schwarz — Pick type inequalities, torsional rigidity, Schwarz's lemma, conformal mappings.