DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.5

УДК 517.54
ББК 22.161.5

О ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ РЕГУЛЯРНОЙ ЧАСТИ МНОЖЕСТВА ГАХОВА

Андрей Витальевич Казанцев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет
avkazantsev@gmail.com
ул. Кремлевская, 35, 400008 г. Казань, Российская Федерация

Аннотация. Пусть H — класс функций, голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$, $\mathcal{G}_1$ — подкласс H, состоящий из всех нормированных в нуле и локально однолистных в $\mathbb{D}$ функций, каждая из которых имеет единственную критическую точку конформного радиуса, являющуюся его максимумом. Показано, что класс $\mathcal{G}_1$ представляет собой линейно связное подмножество класса H, рассматриваемого как линейное топологическое пространство с топологией равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{D}$.

Ключевые слова: множество Гахова, класс Гахова, линейная связность, конформный радиус, гиперболическая производная, критические точки.

1. Классы Гахова

Исследование экстремумов конформных радиусов плоских областей было инициировано Д. Полиа и Г. Сеге в связи с изопериметрическими неравенствами [10; 12] и Ф.Д. Гаховым в целях построения классов корректности внешней обратной краевой задачи [4; 5]. Обе традиции были объединены в работах Л.А. Аксентьева и его учеников [1–4]. С этих же работ началось систематическое накопление условий единственности критической точки конформного радиуса (одно из недавних см. в [8]). Процесс такого накопления привел к введению максимального класса единственности — множества Гахова [9], определение которого сейчас напомним.

В классе H всех функций, голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, выделим подкласс H_0, состоящий из локально однолистных в $\mathbb{D}$ функций f (то есть $f'(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in \mathbb{D}$) с нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Обозначим через M_f множество всех критических точек гиперболической производной

$$h_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)|f'(\zeta)| \tag{1}$$

функции $f \in H_0$. В классической постановке Полиа — Сеге — Хиги, когда функция f однолистна, величина (1) представляет собой выражение для внутреннего конформного радиуса области $D = f(\mathbb{D})$ в точке $w = f(\zeta)$.

Геометрия поверхности $h = h_f$ над элементами $a \in M_f$ определяется значениями индекса $\gamma_f(a)$ векторного поля $\nabla h_f(\zeta)$. Таких значений может быть только три: равенство $\gamma_f(a) = +1$ означает, что $\zeta = a$ — локальный максимум указанной поверхности, случай $\gamma_f(a) = -1$ соответствует наличию у нее седловой точки $\zeta = a$, а возможность $\gamma_f(a) = 0$ отвечает ситуации, когда в точке $\zeta = a$ рассматриваемая поверхность имеет полуседло.

Пусть k_f обозначает число элементов множества M_f. Рассмотрим класс $\mathcal{G} = \{f \in \in H_0 : k_f \leq 1\}$ и его разложение в дизъюнктное объединение $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \amalg \mathcal{G}_s \amalg \mathcal{G}_0$ подклассов $\mathcal{G}_1 = \{f \in H_0 : k_f = 1, \gamma_f(M_f) = +1\}$, $\mathcal{G}_s = \{f \in H_0 : k_f = 1, \gamma_f(M_f) \neq +1\}$ и $\mathcal{G}_0 = \{f \in H_0 : k_f = 0\}$. Класс $\mathcal{G}$ будем называть классом, или множеством Гахова, а подкласс $\mathcal{G}_1$ — его регулярной частью, или регулярным классом Гахова.

В свое время на Казанском семинаре по геометрической теории функций Ф.Г. Авхадиев поставил перед автором вопрос о линейной связности множества $\mathcal{G}_1$. В настоящей заметке дан вариант ответа на этот вопрос. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Класс $\mathcal{G}_1$ есть линейно связное подмножество класса H в топологии равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{D}$.*

2. Линейная связность класса $\mathcal{G}_1$

Вначале докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любой функции $f \in \mathcal{G}_1$ существует семейство $f_t \in \mathcal{G}_1$, $t \in [0,1]$, такое, что f_0 осуществляет тождественное отображение, а $f_1 = f$.*

Доказательство. Фиксируем произвольную функцию $f \in \mathcal{G}_1$. Пусть $\zeta = a$ — единственный элемент множества M_f; без ограничения общности считаем, что $a \neq 0$. Требуемое семейство сконструируем из трех следующих частей.

1) Семейство

$$w_s(\zeta) = \frac{f\left(\dfrac{\zeta + a_s}{1 + \bar{a}_s\zeta}\right) - f(a_s)}{f'(a_s)1 - |a|^2},\ a_s = \frac{as}{1 - |a|^2(1-s)},\ 0 \leq s \leq 1, \tag{2}$$

соединяет функции $f = w_0$ и w_1, причем $w_1''(0) = 0$, то есть $M_{w_1} = \{0\}$. Включение $w_s \in \mathcal{G}_1$ с $M_{w_s} = \{a(1-s)\}$, $0 \leq s \leq 1$, обеспечивается применением результатов, собранных в [9, с. 13].

2) Далее, семейство

$$v_\rho(\zeta) = \frac{1}{r(\rho)} w_1(r(\rho)\zeta),\ r(\rho) = r_c + (1 - r_c)(1 - \rho),\ 0 \leq \rho \leq 1, \tag{3}$$

где $r_c = r_c(w_1) = \sup\{r \in [0,1] : w_1(r\zeta)/r \in S^0\}$, соединяет функцию $w_1 = v_0$ с выпуклой функцией v_1. Справедливость включения $v_\rho \in \mathcal{G}_1$ с $M_{v_\rho} = \{0\}$, $0 \leq \rho \leq 1$, установлена в [7]. Напомним, что через S^0 традиционно обозначается класс выпуклых нормированных функций в единичном круге.

3) Наконец, семейство

$$u_\lambda(\zeta) = \lambda\zeta + (1 - \lambda)v_1(\zeta),\ 0 \leq \lambda \leq 1, \tag{4}$$

соединяет функцию $v_1 = u_0$ с тождественным отображением u_1. Принадлежность данного семейства регулярному классу Гахова $\mathcal{G}_1$ следует из утверждений, доказанных в [6].

Определим $f_t = u_{1-3t}$ при $0 \le t \le 1/3$, $f_t = v_{2-3t}$, когда $1/3 \le t \le 2/3$, и $f_t = w_{3-3t}$, если $2/3 \le t \le 1$. Тогда f_t, $t \in [0,1]$, — семейство с требуемыми свойствами, и теорема 2 доказана.

Далее докажем теорему 1.

Доказательство. Как известно (например, из [13]), задаваемая на H топология равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{D}$ метризуется с помощью метрики

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{\zeta \in K_n} \frac{|f(\zeta) - g(\zeta)|}{1 + |f(\zeta) - g(\zeta)|}, \ f, g \in H, \tag{5}$$

где $\{K_n\}_{n \ge 1}$ — исчерпание $\mathbb{D}$ компактными множествами, то есть $K_n \subset K_{n+1}$, $n \ge 1$, и $\bigcup_{n \ge 1} K_n = \mathbb{D}$. Выберем $K_n = \{\zeta \in \mathbb{D} : |\zeta| < r_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\{r_n\}_{n \ge 1}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к 1.

Возьмем любую функцию $f \in \mathcal{G}_1$ и покажем, что построенное в теореме 2 семейство f_t, $t \in [0,1]$, образует путь, то есть будет непрерывным как отображение отрезка $[0,1]$ в множество $\mathcal{G}_1$ с метрикой (5).

Фиксируем произвольные $\sigma \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$. Требуется установить существование такого $\delta > 0$, что для всех $t \in [0,1]$, удовлетворяющих условию $|t - \sigma| < \delta$, имеет место неравенство $d(f_t, f_\sigma) < \varepsilon$.

Очевидно существование номера N, такого что $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2$. Структура метрики (5) позволяет вывести отсюда, что для всех $t \in [0,1]$ будет

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{\zeta \in K_n} \frac{|f_t(\zeta) - f_\sigma(\zeta)|}{1 + |f_t(\zeta) - f_\sigma(\zeta)|} < \varepsilon/2.$$

Поэтому для требуемого заключения достаточно установить неравенство

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \sup_{\zeta \in K_n} \frac{|f_t(\zeta) - f_\sigma(\zeta)|}{1 + |f_t(\zeta) - f_\sigma(\zeta)|} \le \varepsilon/2, \tag{6}$$

с которым должно быть связано существование $\delta > 0$, налагающее надлежащие ограничения на t. Так как $K_n \subset K_N$ при $n \le N$, то для выполнения (6) достаточно потребовать, чтобы

$$\forall \zeta \in K_N \ \ |f_t(\zeta) - f_\sigma(\zeta)| < \varepsilon/2, \tag{7}$$

при всех $t \in [0,1]$ с условием $|t - \sigma| < \delta$. Существование $\delta > 0$ с приведенными ограничениями на t, обеспечивающими выполнение условия (7), является следствием свойства равномерной непрерывности функции $F(\zeta, t) = f_t(\zeta)$ на компакте $K_N \times [0,1]$ (см. [11, с. 292]).

Последнее свойство следует из непрерывности функции $F(\zeta, t)$ по совокупности переменных, которая устанавливается на объемлющих $K_N \times [0,1]$ множествах по отдельности для каждого из трех подсемейств из доказательства теоремы 2, составляющих f_t, $t \in [0,1]$, а в случае семейства (3) — по отдельности для ситуаций, приводящих к (7) при $\sigma = 2/3$ и при $\sigma \in [1/3, 2/3)$. Семейство (2) непрерывно по совокупности переменных в $\mathbb{D} \times (-1/|a|, 1/|a|)$, семейство (4) — в $\mathbb{D}_{1/r_c} \times \mathbb{R}$. Что же касается семейства (3), то его непрерывность основана на непрерывности по совокупности переменных (ζ, r) семейства линий уровня $\tilde{f}_r(\zeta) = f(r\zeta)/r$ на $\mathbb{D}_{\bar{r}} \times (-1/\bar{r}, 1/\bar{r})$ с $\bar{r} \in (r_N, r_{N+1})$ (чтобы доказать (7) при $\sigma = 2/3$) и на $\mathbb{D}_{1/\bar{r}} \times (-\bar{r}, \bar{r})$ с $\bar{r} \in (r_c, 1)$ (для получения (7) при $\sigma \in [1/3, 2/3)$). Здесь $\mathbb{D}_R = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < R\}$ при $R > 0$.

Итак, обоснование неравенства (6) при $t \in [0,1] \cap (\sigma - \delta, \sigma + \delta)$ сведено к использованию конкретных форм построения f_t, $t \in [0,1]$, которые позволяют установить существование $\delta > 0$, обеспечивающее содержательность всех отмеченных выше редукций, составляющих доказательство теоремы 1, которое, таким образом, завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксентьев, Л. А. О единственности решения внешней обратной краевой задачи / Л. А. Аксентьев, А. В. Казанцев, А. В. Киселев // Изв. вузов. Математика. — 1984. — № 10. — С. 8–18.
2. Аксентьев, Л. А. О единственности решения внешней обратной краевой задачи / Л. А. Аксентьев, Ю. Е. Хохлов, Е. А. Широкова // Мат. заметки. — 1978. — Т. 24. — С. 319–333.
3. Аксентьев, Л. А. Разрешимость внешней обратной краевой задачи в случае многосвязной области / Л. А. Аксентьев, М. И. Киндер, С. Б. Сагитова // Труды семинара по краевым задачам. — Казань : Изд-во КГУ, 1983. — Вып. 20. — С. 22–34.
4. Аксентьев, Л. А. Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области / Л. А. Аксентьев // Изв. вузов. Математика. — 1984. — № 2. — С. 3–11.
5. Гахов, Ф. Д. Об обратных краевых задачах / Ф. Д. Гахов // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 86, № 4. — С. 649–652.
6. Жаркова, Т. В. Множество Гахова в теореме Меркеса о выпуклых комбинациях / Т. В. Жаркова, А. В. Казанцев // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2014. — Т. 156, № 2. — С. 34–42.
7. Казанцев, А. В. Бифуркации и новые условия единственности критических точек гиперболических производных / А. В. Казанцев // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2011. — Т. 153, № 1. — С. 180–194.
8. Казанцев, А. В. Неравенство Эпштейна как условие линейной выпуклости некоторой области Хартогса / А. В. Казанцев // Геометрический анализ и его приложения : материалы III Междунар. шк.-конф. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2016. — С. 91–93.
9. Казанцев, А. В. Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова / А. В. Казанцев. — Йошкар-Ола : Изд-во МарГУ, 2012. — 64 с.
10. Полиа, Г. Задачи и теоремы из анализа / Г. Полиа, Г. Сеге. — М. : Наука, 1978. — Т. 2. — 432 с.
11. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1969. — 576 с.
12. Haegi, H. R. Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen / H. R. Haegi // Compositio Math. — 1950. — Vol. 8, № 2. — P. 81–111.
13. Schober, G. Univalent functions — selected topics / G. Schober. — Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer-Verlag, 1975. — v+200 p.

REFERENCES

1. Aksent’ev L.A., Kazantsev A.V., Kiselev A.V. O edinstvennosti resheniya vneshney obratnoy kraevoy zadachi [Uniqueness of the Solution of an Exterior Inverse Boundary Value Problem]. *Izv. vuzov. Matematika.* [Soviet Mathematics], 1984, no. 10, pp. 8-18.
2. Aksent’ev L.A., Hohlov Yu.E., Shirokova E.A. O edinstvennosti resheniya vneshney obratnoy kraevoy zadachi [Uniqueness of Solution of the Exterior Inverse Boundary-Value Problem]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 1978, vol. 24, pp. 319-333.

3. Aksent'ev L.A., Kinder M.I., Sagitova S.B. Razreshimost vneshney obratnoy kraevoy zadachi v sluchae mnogosvyaznoy oblasti [Solvability of the Exterior Inverse Boundary Value Problem in the Case of a Multiply Connected Domain]. *Trudy seminara po kraevym zadacham.* Kazan, KGU Publ., 1983, iss. 20, pp. 22-34.

4. Aksent'ev L.A. Svyaz vneshney obratnoy kraevoy zadachi s vnutrennim radiusom oblasti [The Connection of the Exterior Inverse Boundary Value Problem with the Inner Radius of the Domain]. *Izv. vuzov. Matematika.* [Soviet Mathematics], 1984, no. 2, pp. 3-11.

5. Gakhov F.D. Ob obratnykh kraevykh zadachakh [On Inverse Boundary-Value Problems]. *Dokl. AN SSSR* [Doklady Mathematics], 1952, vol. 86, no. 4, pp. 649-652.

6. Zharkova T.V., Kazantsev A.V. Mnozhestvo Gakhova v teoreme Merkesa o vypuklykh kombinatsiyakh [Gakhov Set in the Merkes Theorem on Convex Combinations]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser.: Fiz.-mat. nauki*, 2014, vol. 156, no. 2, pp. 34-42.

7. Kazantsev A.V. Bifurkatsii i novye usloviya edinstvennosti kriticheskikh tochek giperbolicheskikh proizvodnykh [Bifurcations and New Uniqueness Criteria for the Critical Points of Hyperbolic Derivatives]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser.: Fiz.-mat. nauki*, 2011, vol. 153, no. 1, pp. 180-194.

8. Kazantsev A.V. Neravenstvo Epshteyna kak uslovie lineynoy vypuklosti nekotoroy oblasti Khartogsa [Convexity of Some Hartogs Domain Is Epsteinian]. *Geometricheskiy analiz i ego prilozheniya: materialy III Mezhdunar. shk.-konf.* Volgograd, Izd-vo VolGU, 2016, pp. 91-93.

9. Kazantsev A.V. *Chetyre etyuda na temu F.D. Gakhova* [Four Etudes on a Theme of F.D. Gakhov]. Yoshkar-Ola, Izd-vo MarGU, 2012. 64 p.

10. Pólya G., Szegö G. *Zadachi i teoremy iz analiza* [Aufgaben und Lehrsátze aus der Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1978, vol. 2. 432 p.

11. Shabat B.V. *Vvedenie v kompleksnyy analiz* [Introduction to Complex Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 576 p.

12. Haegi H.R. Extremalprobleme und Ungleichungen Konformer Gebietsgrößen. *Compositio Math.*, 1950, vol. 8, no. 2, pp. 81-111.

13. Schober G. *Univalent functions — selected topics*. Berlin; Heidelberg; N. Y., Springer-Verlag, 1975. v+200 p.

ON THE LINEAR CONNECTIVITY OF THE REGULAR PART OF GAKHOV SET

Andrei Vitalievich Kazantsev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematical Statistics,
Kazan (Volga) Federal University
avkazantsev@gmail.com
Kremlevskaya St., 35, 400008 Kazan, Russian Federation

Abstract. The study of extrema of the inner mapping (conformal) radii of the plane domains has been initiated by G. Pólya and G. Szegö in connection with the isoperimetrical inequalities and by F.D. Gakhov in concern with construction of the correction classes for the exterior boundary value problems. Both traditions have been unified in the works of L.A. Aksent'ev and his successors. These works also were seminal for the systematic accumulation of the uniqueness criteria for the critical points of the conformal radii. The process of such an accumulation has led to the introduction of the Gakhov set.

Let H be the class of functions holomorphic in the unit disk $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, and let H_0 be the subclass of H consisting of functions f locally univalent in $\mathbb{D}$ (i.e. $f'(\zeta) \neq 0$ for all $\zeta \in \mathbb{D}$), normalized by the conditions

$f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$. We denote by M_f the set of all critical points of the hyperbolic derivative (inner mapping radius) $h_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)|f'(\zeta)|$ of the function $f \in H_0$.

The geometry of the surface $h = h_f$ over the elements $a \in M_f$ is determined by the values of the index $\gamma_f(a)$ of the vector field $\nabla h_f(\zeta)$. It is well-known that if $f \in H_0$ and $a \in M_f$, then $\gamma_f(a) \in \{+1, 0, -1\}$; in particular, the equality $\gamma_f(a) = +1$ means that $\zeta = a$ is the local maximum point for the above mentioned surface.

Let k_f be the number of points in M_f. The class $\mathcal{G} = \{f \in H_0 : k_f \leq 1\}$ is said to be the Gakhov set, and the class $\mathcal{G}_1 = \{f \in H_0 : k_f = 1, \gamma_f(M_f) = +1\}$ is called the regular part of the Gakhov set. The following question was the stimulus for our study in the present note.

F.G. Avkhadiev's question. Whether the class $\mathcal{G}_1$ is a linear connected set or not?

Variant of an answer is contained in the following theorem.

Theorem 1. *The regular part $\mathcal{G}_1$ of the Gakhov set $\mathcal{G}$ is a linear connected subset of the class H endowed with the topology of uniform convergence on compact sets in $\mathbb{D}$.*

Proof of the above assertion is the “cascade” of reductions to the following

Theorem 2. *For any function $f \in \mathcal{G}_1$ there exists a family $f_t \in \mathcal{G}_1$, $t \in [0, 1]$, such that f_0 carries out the identity mapping, and $f_1 = f$.*

The family $\{f_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ is constructed on the base of three subfamilies. First subfamily is formed by the linear-invariant actions on f by Möbius automorphisms. This subfamily connects f and the function w with $M_w = \{0\}$. Second subfamily is produced by the level lines of the function w and connects the latter with convex function v. Third subfamily is convex combination of v and f_0.

Key words: Gakhov set, Gakhov class, linear connectivity, inner mapping radius, hyperbolic derivative, critical points.