DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.6
УДК 517.512
ББК 22.161.5

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СТЕПАНОВА СРЕДНИМИ МАРЦИНКЕВИЧА

Юсуфали Хасанович Хасанов
Доктор физико-математических наук, ВНС отдела теории функций,
Институт математики АН Республики Таджикистан
yukhas60@mail.ru
ул. Айни, 299/1, 734063 г. Душанбе, Республика Таджикистан

Эшмат Сафарзода
Аспирант кафедры математического анализа,
Таджикский государственный педагогический университет
ashmat.90@mail.ru
просп. Рудаки, 121, 734003 г. Душанбе, Республика Таджикистан

Аннотация. В работе изучаются некоторые вопросы приближения почти-периодических функций Степанова от частичных сумм ряда Фурье и средними Марцинкевича, когда показатели Фурье рассматриваемых функций имеют предельную точку в бесконечности. Исследуется вопрос об отклонении заданной функции $f(x)$ от ее частичных сумм ряда Фурье, в зависимости от скорости стремления к нулю величины наилучшего приближения тригонометрическим полиномом ограниченной степени. Здесь, при определении коэффициентов Фурье вместо рассматриваемой функции принимается некоторая произвольная, вещественная, непрерывная функция $\Phi_\sigma(t)$ $(\sigma > 0)$, которая в заданном интервале равна единице, а в остальных случаях — равна нулю. Далее аналогично устанавливается оценка сверху величины отклонения почти-периодической в смысле Степанова функции средними Марцинкевича.

Ключевые слова: почти-периодические функции Степанова, ряды Фурье, показатели Фурье, предельная точка в бесконечности, средние Марцинкевича, тригонометрический полином, наилучшее приближение.

Введение

Как известно [1], величина

$$D_{S_p}\{f(x)\} = \sup_{-\infty<x<\infty} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(x) - g(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

называется S — расстоянием порядка p $(p \geq 1)$, соответствующим длинам почти-периодов l. Под S_p-пространством, или пространством почти-периодических функций Степанова, понимается совокупность функций, для которых можно указать последовательность тригонометрических сумм $\{P_n(x)\}$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k exp(i\lambda_k x)$$

таких, что

$$\lim_{n\to\infty} D_{S_p}\{f(x) - P_n(x)\} = 0.$$

Пусть $f(x) \in S_p$ с рядом Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}, \tag{1}$$

где $\{\lambda_n\}$ — показатели Фурье, которые имеют единственную предельную точку в бесконечности, то есть

$$\lambda_0 = 0,\ \ \lambda_{-n} = -\lambda_n,\ \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty,\ \ \lambda_n < \lambda_{n+1}\ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как (см. [1, теорема 5.2.5]) при всяком λ_n функция $f(x)e^{-i\lambda_n x}$ есть S_p-почти-периодическая функция, то существует средние значения

$$A_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_n x} dx\ \ -$$

коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Через

$$S_\sigma(f; x) = \sum_{|\lambda_n| \leq \sigma} A_n e^{i\lambda_n x}\ \ (\sigma > 0)$$

обозначим частичную сумма ряда (1).

Пусть $\Phi_\sigma(t)$ — произвольная, вещественная непрерывная четная функция, и такая, что

$$\begin{gathered} 1)\ \Phi_\sigma(0) = 1; \\ 2)\ \Phi_\sigma(t) = 0,\ \text{при}\ |t| \leq \sigma; \\ 3)\ \Psi_\sigma(t) \in L(-\infty; \infty), \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\Psi_\sigma(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\sigma(t) e^{-iut} dt.$$

Тогда положим

$$U_\sigma(f; \varphi; x) = \sum_{|\lambda_m| \leq \sigma} A_m \Phi_\sigma(\lambda_m) e^{i\lambda_m x}.$$

В дальнейшем нам понадобиться следующее вспомогательное предложение.

Лемма 1. *Если* $f(x) \in S_p$ $(p \geq 1)$*, то*

$$U_\sigma(f;\varphi;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\Phi_\sigma(t)dt.$$

Доказательство. Положим

$$f_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\Phi_\sigma(t)dt.$$

Пусть x_0 — произвольное действительное число и $l = 1$. Тогда в силу (2), используя неравенство Гельдера, имеем

$$\int_{x_0}^{x_0+1} |f_\sigma(x+\tau) - f_\sigma(x)|dx \leq \left\{\int_{x_0}^{x_0+1} |f_\sigma(x+\tau) - f_\sigma(x)|^p dx\right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \left\{\int_{x_0}^{x_0+1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t+\tau) - f(x+t)| \cdot |\psi_\sigma(t)|dt\right)^p dx\right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \left\{\sup_x \int_{x_0}^{x_0+1} |f(x+\tau) - f(x)|^p dx\right\}^{1/p} \cdot \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\sigma(t)|^p dt\right\}^{1/p}.$$

Отсюда следует, что функция $f_\sigma(x)$ является S_p-почти-периодической.

Пусть B_m — коэффициент Фурье функций $f_\sigma(x)$, соответствующий показателям λ_m. Имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_\sigma(x)e^{-i\lambda_m x}dx = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\Psi_\sigma(t)dt\right]e^{-i\lambda_m x}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\sigma(t)\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+t)e^{-i\lambda_m x}dx\right]dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_\sigma(t)\left[\frac{1}{2T}\int_{-T+t}^{T+t} f(x)e^{-i\lambda_m(x+t)}dx\right]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\sigma(t)e^{-i\lambda_m t}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T+t}^{T+t} f(x)e^{-i\lambda_m x}dx\right]dt.$$

Внутренний интеграл является допредельным выражением для коэффициентов Фурье функции $f(x) \in S_p$, а по формуле обращения Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\sigma(t)e^{-i\lambda_m t}dt = \Phi_\sigma(\lambda_m).$$

Отсюда получим, что

$$B_m = A_m \cdot \Phi_\sigma(\lambda_m).$$

Таким образом,

$$f_\sigma(x) = \sum_{|\lambda_m| \leq \sigma} A_m \Phi_\sigma(\lambda_m)e^{i\lambda_m x}.$$

Так как $f_\sigma(x)$ является S_p-почти-периодической функцией, то лемма доказана.

Основные результаты

Пусть $S_p(R)$ — пространство всех ограниченных функций $f(x) \in S_p$ $(p \geq 1)$ с нормой

$$\|f(x)\|_{S_p} = \sup_{-\infty<x<\infty} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Рассмотрим величину

$$R(f;x) = \|U_\sigma(f;\varphi;x) - f(x)\|_{S_p}, \tag{3}$$

в которой

$$U_\sigma(f;\varphi;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\Phi_\sigma(t)dt, \tag{4}$$

$$\Phi_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \varphi_\sigma(u)K_u(t)du, \;\; K_u(t) = 2\frac{sin(ut)}{t},$$

$\varphi_\sigma(u)$ — некоторая четная функция, абсолютно интегрируемая на интервале $(0;\infty)$ при каждом фиксированном $\sigma > 0$ и такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\sigma(t)|dt < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\sigma(t)dt = 1. \tag{5}$$

Исследуется вопрос о поведении величины (3) в зависимости от скорости стремления к нулю $E_\sigma(f)$ (при $\sigma \to 0$) для случаев, когда в качестве $\varphi_\sigma(u)$ выбраны функции

$$\varphi_\sigma(u) = \varphi_{\sigma,a}(u) = \begin{cases} 1, & |u| \leq a(0<a<\sigma); \\ \frac{\sigma-|u|}{\sigma-a}, & a<|u|<\sigma; \\ 0, & |u| \geq \sigma. \end{cases} \tag{6}$$

В силу [2, теорема 1] существует оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\sigma,a}(t)|\,dt \leq M\frac{\sigma+a}{\sigma-a}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Если $f(x) \in S_p(R)$ и функция $\varphi_\sigma(u) = \varphi_{\sigma,a}(u)$ определена равенством* (6)*, то при любом Λ $(0<\Lambda<a<\sigma)$ справедлива оценка*

$$R(f;\varphi_{\sigma,a}) \leq M\frac{\sigma+a}{\sigma-a}E_\Lambda(f)_{S_p} \tag{8}$$

где M — абсолютная константа и

$$E_\Lambda(f)_{S_p} = \inf_{A_m}\left\| f(x) - \sum_{|\lambda_m|\leq\Lambda} A_m e^{i\lambda_m x}\right\|_{S_p} -$$

наилучшее приближение функций $f(x) \in S_p$ тригонометрическими полиномами степени не выше Λ.

Доказательство. В силу (5) имеем

$$2\int_0^\infty \Phi_{\sigma,a}(t)dt = 1.$$

Умножив обе части последнего на $f(x)$ и вычтя полученное равенство из (4) при $\Phi_\sigma =$ $= \Phi_{\sigma,a}$, получим

$$\Delta_{\sigma,a}(f;x) = U_\sigma(f;\varphi;x) - f(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x+t)\Phi_{\sigma,a}(t)dt -$$

$$-\int_{-\infty}^\infty f(x)\Phi_{\sigma,a}(t)dt = \int_0^\infty \left[f(x+t)+f(x-t)\right]\Phi_{\sigma,a}(t)dt -$$

$$-2\int_{-\infty}^\infty f(x)\Phi_{\sigma,a}(t)dt = \int_0^\infty \left[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right]\Phi_{\sigma,a}(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty \Omega_x(f;t)\Phi_{\sigma,a}(t)dt,$$

где

$$\Omega_x(f;t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x).$$

Пусть теперь

$$T_\Lambda(x) = \sum_{|\lambda_n|\le\Lambda} A_m e^{i\lambda_m x}$$

произвольный тригонометрический полином и $0 < \Lambda < a < \sigma$. Тогда (см. [3, лемма 3]) справедливо равенство

$$T_\Lambda(x) = \int_{-\infty}^\infty T_\Lambda f(x+t)\Phi_{\sigma,a}(t)dt.$$

Покажем, что для полинома $T_\Lambda(x)$ имеет место соотношение

$$\int_0^\infty \Omega_x(T_\Lambda;t)\Phi_{\sigma,a}(t)dt = 0.$$

Действительно,

$$\int_0^\infty \Omega_x(T_\Lambda;t)\Phi_{\sigma,a}(t)dt = \int_0^\infty \left[T_\Lambda(x+t)+T_\Lambda(x-t)-2T_\Lambda(x)\right]\Phi_{\sigma,a}(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty T_\Lambda(x+t)\Phi_{\sigma,a}(t)dt - \int_{-\infty}^\infty T_\Lambda(x)\Phi_{\sigma,a}(t)dt =$$

$$= T_\Lambda(x) - T_\Lambda(x)\int_{-\infty}^\infty \Phi_{\sigma,a}(t)dt = 0.$$

Поэтому

$$\Delta_{\sigma,a}(f;x) = \int_0^\infty \Omega_x[(f-T_\Lambda);t]\Phi_{\sigma,a}(t)dt. \tag{9}$$

Пусть теперь $T_\Lambda(x)$ — полином, осуществляющий наилучшее приближение порядка Λ, то есть

$$\|f(x)-T_\Lambda(x)\|_{S_p} = E_\Lambda(f)_{S_p}.$$

Тогда

$$\|\Omega_x\left[(f-T_\Lambda);t\right]\|_{S_p} \le 4E_\Lambda(f)_{S_p}. \tag{10}$$

Из (7), (10) и (9) получаем оценку (8). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in S_p$ $(p \geq 1)$, показатели Фурье которой не имеют предельных точек на конечном расстоянии, то есть $\lambda_m \to \infty$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| f(x) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f;x) \right\|_{S_p} \leq \frac{M}{n+1} \sum_{k=0}^{n} E_k(f)_{S_p},$$

где M — абсолютная константа, а величина $E_\Lambda(f)_{S_p}$ определена в формулировке теоремы 1.

Доказательство. Пусть $2^m \leq n \leq 2^{m+1}$. Тогда

$$R_n(f)_{S_p} = \left\| f(x) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f;x) \right\|_{S_p} = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} [f(x) - S_k(f;x)] \right\|_{S_p} =$$

$$= \left\| \frac{1}{n+1} \left[\sum_{v=0}^{m-1} \sum_{k=2^v}^{2^{v+1}-1} [f(x) - S_k(f;x)] + f(x) - S_0(f;x) + \sum_{k=2^m}^{n} [f(x) - S_k(f;x)] \right] \right\|_{S_p} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{v=0}^{m-1} 2^v \frac{1}{2^v} \sum_{k=2^v}^{2^{v+1}-1} [f(x) - S_k(f;x)] \right\|_{S_p} +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \|f(x) - S_0(f;x)\|_B + \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{k=2^m}^{n} [f(x) - S_k(f;x)] \right\|_{S_p}. \tag{11}$$

Согласно теореме 1 имеем

$$\left\| \frac{1}{2^v} \sum_{k=2^v}^{2^{v+1}-1} [f(x) - S_k(f;x)] \right\|_{S_p} \leq M \cdot E_{2^v-1}(f)_{S_p}, \tag{12}$$

$$\left\| \sum_{k=2^v}^{n} [f(x) - S_k(f;x)] \right\|_{S_p} \leq M(n - 2^m) \cdot E_{2^m-1}(f)_{S_p}. \tag{13}$$

Из соотношения (12), (13) и (11) получим

$$R_n(f)_{S_p} \leq \frac{M}{n+1} \sum_{v=0}^{m-1} 2^v \cdot E_{2^v-1}(f)_{S_p} + \frac{1}{n+1} E_0(f)_{S_p} +$$

$$+ M \frac{n - 2^m}{n+1} E_{2^m-1}(f)_{S_p} \leq \frac{M}{n+1} \sum_{v=0}^{m-1} 2^v \cdot E_{2^v-1}(f)_{S_p} +$$

$$+ \frac{1}{n+1} E_0(f)_{S_p} + \frac{M}{n+1} E_{2^m-1}(f)_{S_p} \leq \frac{M_1}{n+1} \sum_{k=1}^{2^m} E_k(f)_{S_p} +$$

$$+ \frac{1}{n+1} E_0(f)_{S_p} \leq \frac{M_1}{n+1} \sum_{k=0}^{2^m} E_k(f)_{S_p} \leq \frac{M_1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} E_k(f)_{S_p}.$$

Теорема 2 доказана.

Заметим, что аналогичные результаты для периодических функций рассмотрены в работе [2], а для класса равномерных почти-периодических функций в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левитан, Б. М. Почти-периодические функции / Б. М. Левитан. — М. ; Л. : Гостехиздат, 1953. — 396 с.

2. Тиман, М. Ф. О приближении периодических функций двух переменных суммами типа Марцинкевича / М. Ф. Тиман, В. Г. Пономаренко // Изв. вузов. Математика. — 1975. — № 9. — С. 59–67.

3. Пономаренко, В. Г. О приближении функций, равномерно непрерывных на всей вещественной плоскости / В. Г. Пономаренко // Сиб. мат. журнал. — 1975. — Т. 16, № 1. — С. 86–97.

4. Хасанов, Ю. Х. О приближении почти-периодических функций двух переменных / Ю. Х. Хасанов // Изв. вузов. Математика. — 2010. — № 12. — С. 82–86.

REFERENCES

1. Levitan B.M. *Pochti-periodicheskie funktsii* [Almost-Periodic Functions]. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1953. 396 p.

2. Timan M.F., Ponomarenko V.G. O priblizhenii periodicheskikh funktsiy dvukh peremennykh summami tipa Martsinkevicha [On Approximation of Periodic Functions of Two Variables by Sums of Marcinkiewicz Type]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1975, no. 9, pp. 59-67.

3. Ponomarenko V.G. O priblizhenii funktsiy, ravnomerno nepreryvnykh na vsey veshchestvennoy ploskosti [On Approximation of Functions of Two Uniformly Continuous on the Whole Real Plane]. *Sib. mat. zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1975, vol. 16, no. 1, pp. 86-97.

4. Khasanov Yu.Kh. O priblizhenii pochti-periodicheskikh funktsiy dvukh peremennykh [Approximation of Almost Periodic Functions of Two Variables]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2010, no. 12, pp. 82-86.

ON APPROXIMATION OF STEPANOV'S ALMOST PERIODIC FUNCTIONS BY MEANS OF MARCINKIEWICZ

Yusufali Khasanovich Khasanov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Lead Researcher,
Department of Function Theory,
Mathematical Institute of Academy of Science Republic of Tajikistan
yukhas60@mail.ru
Ainy St., 299/1, 734063 Dushanbe, Republic of Tajikistan

Eshmat Safarzoda

Postgraduate Student, Department of Mathematical Analysis,
Tajik State Pedagogical University
ashmat.90@mail.ru
Prosp. Rudaki, 121, 734003 Dushanbe, Republic of Tajikistan

Abstract. We study some questions of approximation of Stepanov's almost-periodic functions of partial Fourier sums and means of Marcinkiewicz, when the Fourier exponents of functions under consideration have a limit point in infinity.

Let S_p ($p \geq 1$ denote the class of Stepanov's almost-periodic functions, whose Fourier exponents take the following form:

$$\lambda_0 = 0,\ \ \lambda_{-n} = -\lambda_n,\ \ \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty,\ \ \lambda_n < \lambda_{n+1}\ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Consider the Fourier series for a function $f(x) \in S_p$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x},$$

where

$$A_n = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{-i\lambda_n x}dx$$

are Fourier coefficients of the function $f(x) \in S_p$ and

$$S_\sigma(f;x) = \sum_{|\lambda_n|\leq\sigma} A_n e^{i\lambda_n x}\ \ (\sigma > 0)$$

is a partial sum of Fourier series.

Let $\Phi_\sigma(t)$ is an arbitrary real continuous even function such that

$$1)\Phi_\sigma(0) = 1;\ \ 2)\Phi_\sigma(t) = 0\ \ (|t| \leq \sigma).$$

We set

$$U_\sigma(f;\varphi;x) = \sum_{|\lambda_m|\leq\sigma} A_m\Phi_\sigma(\lambda_m)e^{i\lambda_m x}.$$

Let $S_p(R)$ stand for the space of bounded functions $f(x) \in S_p$ $(p \geq 1)$ with the norm

$$\|f(x)\|_{S_p} = \sup_{-\infty<x<\infty}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Consider the value

$$R(f;x) = \|U_\sigma(f;\varphi;x) - f(x)\|_{S_p},$$

where

$$U_\sigma(f;\varphi;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\Phi_\sigma(t)dt,$$

$$\Phi_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \varphi_\sigma(u)K_u(t)du,\ \ K_u(t) = 2\frac{\sin(ut)}{t},$$

$\varphi_\sigma(u)$ is some even function absolutely integrable on the interval $(0;\infty)$ with each fixed $\sigma > 0$.

Theorem. If $f(x) \in S_p$, where Fourier exponents have no limit points at a finite distance, i.e. $\lambda_n \to \infty$, then the following bound is valid

$$R(f;\varphi_{\sigma,a}) \leq M\frac{\sigma + a}{\sigma - a}E_\Lambda(f)_{S_p},$$

and
$$\left\| f(x) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f;x) \right\|_{S_p} \le \frac{M}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_k(f)_{S_p},$$
where M — constant and
$$E_{\Lambda}(f)_{S_p} = \inf_{A_m} \left\| f(x) - \sum_{|\lambda_m| \le \Lambda} A_m e^{i\lambda_m x} \right\|_{S_p}.$$

Key words: Stepanov's almost periodic functions, Fourier series, Fourier exponents, limiting point in infinity, means of Marcinkievicz, trigonometric polynomial, best approximation.