DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.7
УДК 514.752.44:514.772:517.548
ББК 22.15

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ НА СКЛЕЙКАХ

Александр Николаевич Кондрашов
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru, kiem@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В статье мы исследуем вопрос о существовании и единственности изотермических координат на склеенной поверхности в $\mathbb{R}^m$. Такие поверхности являются специальным случаем нерегулярных поверхностей. В работе мы установили для такого рода поверхностей аналог известной теоремы В.М. Миклюкова (2004).

Ключевые слова: изотермические координаты, склейки, склеивающие функции, квазисимметрическая функция, $W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma}$-мажорируемая функция, квазипрямая.

1. Теорема В.М. Миклюкова об изотермических координатах на негладкой поверхности

Вопрос о существовании изотермических координат на гладких поверхностях хорошо изучен, а возможность их введения оказывается чрезвычайно полезной во многих случаях. В то же время вопрос о введении изотермических координат на негладких поверхностях оказывается весьма тонким. В основном конформные отображения негладких поверхностей изучались лишь в специальных случаях [5–7; 13; 16; 17]. Один из наиболее общих результатов в этом направлении был получен в работе В.М. Миклюкова [12], которая будет для нас отправной точкой. Следуя этой работе, введем терминологию и обозначения.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область и $\mathcal{X}$ — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^m$, $(m \geq 3)$, заданная посредством непрерывной вектор-функции

$$y = f(x) = (f_1(x_1, x_2), \dots, f_m(x_1, x_2)) : D \to \mathbb{R}^m, \qquad (1)$$

реализующей гомеоморфное отображение области D на множество $f(D)$ с метрикой (и тем самым топологией!), индуцированной из $\mathbb{R}^m$.

Далее всегда предполагаем, что отображение f имеет полный дифференциал df п.в. в D, причем п.в. в D выполнено

$$\mathrm{rank}\,(df) = 2. \tag{2}$$

Символами $f_{x_1}(x)$, $f_{x_2}(x)$ будем обозначать частные производные вектор-функции f:

$$f_{x_1}(x) = (f_{1x_1}(x), \ldots, f_{mx_1}(x)),$$
$$f_{x_2}(x) = (f_{1x_2}(x), \ldots, f_{mx_2}(x)).$$

Пользуясь стандартными обозначениями $E = |f_{x_1}|^2$, $F = \langle f_{x_1}, f_{x_2}\rangle$, $G = |f_{x_2}|^2$, определяем в D метрику (первую квадратичную форму)

$$ds^2 = Edx_1^2 + 2Fdx_1dx_2 + Gdx_2^2 \tag{3}$$

с измеримыми коэффициентами E, F, G.

Определение 1. *Пусть $\mathcal{X}$ — поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbb{R}^2$ посредством вектор-функции* (1), *подчиненной условию* (2). *Переменные x_1, x_2 называются изотермическими координатами на поверхности $\mathcal{X}$, если*

$$E(x) = G(x), \quad F(x) = 0 \tag{4}$$

п.в. в D.

В случае когда x_1, x_2 — изотермические координаты на поверхности $\mathcal{X}$, мы имеем

$$ds^2 = \lambda^2(x)(dx_1^2 + dx_2^2), \quad \text{где} \quad \lambda^2(x) = E(x) = G(x).$$

Первое из условий (4) означает, что растяжения f вдоль линий $x_i = \mathrm{const}$ $(i = 1, 2)$ совпадают в точках, где df существует. Второе условие влечет взаимную ортогональность образов этих линий в соответствующих точках $y = f(x)$. Так что в каждой точке $x \in D$, где существует полный дифференциал df и одновременно выполняются соотношения (2) и (4), отображение $f : D \to \mathcal{X}$ конформно (сохраняет углы между кривыми).

Нам потребуется также понятие $W^{1,2}$-мажорируемой функции.

Определение 2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область. Будем говорить, что функция $P : D \to \mathbb{R}$ является $W^{1,2}$-мажорируемой в D, если найдется функция $K \in W^{1,2}(D)$ такая, что*

$$P(x) \le K(x) \quad \text{для п.в.} \ \ x \in D. \tag{5}$$

Простейшие примеры $W^{1,2}$-мажорируемых функций доставляют ограниченные функции. Пусть $P : D \to \mathbb{R}$ — произвольная ограниченная функция, определенная в области D конечной площади. Здесь мы можем положить $K = \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} P(x)$. Ясно, что $K \in W^{1,2}(D)$ и соотношение (5) выполнено п.в. в D.

Определение 3. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область. В случае когда функция $P : D \to \mathbb{R}$ является $W^{1,2}$-мажорируемой во всякой подобласти $D' \Subset D$, будем говорить, что функция P является $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемой в D.*

$W^{1,2}$-мажорируемость (см. [12, замечание § 6]) означает, что равенство

$$\lim_{\xi \to x} P(\xi) = +\infty$$

может выполняться на очень редком множестве. Можно утверждать, например, что при любом $\alpha > 0$ его α-емкость равна нулю. Из этого, в свою очередь, вытекает, что линейная мера такого множества равна нулю.

Всюду далее будем использовать обозначения: $O = (0,0)$, $\Xi = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, $B(O,R)$ — открытый круг радиуса $R > 0$ в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат O.

В работе [12] была установлена теорема о существовании и единственности изотермических координат на односвязной негладкой поверхности, которую приведем в следующей формулировке, необходимой для последующего применения.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{X}$ — двумерная поверхность, заданная вектор-функцией* (1) *над односвязной ограниченной областью $D \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяющая условию* (2). *Предположим, что функция P, определяемая соотношением*

$$P(x) = \frac{E(x) + G(x)}{\sqrt{E(x)G(x) - F^2(x)}}, \tag{6}$$

является $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемой в области D.

Тогда существует гомеоморфизм $x = \Phi(\xi) : B(O,R) \to D$, где $R > 1$, $\Phi(\xi) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(B(O,R))$, вводящий на $\mathcal{X}$ изотермические координаты ξ_1, ξ_2.

Гомеоморфизм $x = \Phi(\xi)$ определяется единственным образом заданием пары точек $a, b \in D$ таких, что $a = \Phi(O)$, $b = \Phi(\Xi)$.

Целью настоящей работы является вопрос о справедливости аналогов теоремы 1 для поверхностей, склеенных из двух кусков.

Замечание. В дальнейшем поверхности $\mathcal{X} = (D, f)$, заданные над односвязной областью $D \subset \mathbb{R}^2$, у которых отображение $f : D \to f(D)$ взаимно однозначно, дифференцируемо п.в. и выполняется условие (2), будем называть *элементарными*. Так как при доказательстве теоремы 1 в [12] используется только квадратичная форма (3), заданная в области D, и только по этой форме строится подходящее отображение $\Phi(\xi)$, то теорема остается верной и для некоторых случаев неэлементарных поверхностей.

В частности, теорема будет верна и для неэлементарных поверхностей $\mathcal{X} = (D, f)$, если область D можно представить в виде конечного объединения $D = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}_i$, где D_i — односвязные области, а замыкание берется относительно D, причем:

1) $\mathrm{int}(\overline{D}_i \cap \overline{D}_j) = D_i \cap D_j = \emptyset$ для всяких $i \neq j$;

2) $\partial' D_i \cap \partial' D_j = \overline{D}_i \cap \overline{D}_j$ — состоит из конечного числа локально спрямляемых дуг (здесь ∂' означает границу множества относительно D);

3) каждая поверхность $\mathcal{X}_i = (D_i, f)$ является элементарной, причем продолженное отображение $f : \overline{D}_i \to f(\overline{D}_i)$ также взаимно однозначно.

2. Метрические и функциональные аспекты

Пусть $\mathcal{X}_1 = (G_1, f_1)$ и $\mathcal{X}_2 = (G_2, f_2)$ — две элементарные односвязные поверхности в $\mathbb{R}^m$.

Мы будем говорить, что задана склейка $\mathcal{X}_{12}$ этих поверхностей, если:

1) заданы открытые жордановы дуги $\Gamma_1 \subset \partial G_1$ и $\Gamma_2 \subset \partial G_2$, причем отображения f_1 и f_2 продолжаются по непрерывности на них и эти продолжения $f_i : \Gamma_i \to f_i(\Gamma_i) \subset \mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2)$ суть гомеоморфизмы;

2) определено гомеоморфное отображение

$$x^{(2)} = \varphi_{12}(x^{(1)}) : \Gamma_1 \to \Gamma_2 \tag{7}$$

такое, что

$$f_1(x^{(1)}) = f_2(\varphi_{12}(x^{(1)})) \text{ для всякого } x^{(1)} \in \Gamma_1.$$

Данное отображение согласуется с выбранными ориентациями в G_1 и G_2 так, что при обходе $x^{(1)}$ вдоль дуги Γ_1 в положительном направлении точка $x^{(2)} = \varphi_{12}(x^{(1)})$ будет двигаться в отрицательном направлении по дуге Γ_2.

Точки множеств $G_i \cup \Gamma_i$ $(i = 1, 2)$, связанные склеивающим гомеоморфизмом (7), отождествляются.

Таким образом, в нашем случае склейка $\mathcal{X}_{12}$ — это односвязная поверхность, для которой *изначально* не задано единое представление $y = f(x) : D \to \mathbb{R}^m$, а заданы параметрические представления двух ее частей $\mathcal{X}_1 = (G_1, f_1)$ и $\mathcal{X}_2 = (G_2, f_2)$, согласованных по краям.

Как обычно, взаимно однозначные непрерывные образы в $\mathbb{R}^2$ промежутков вида (a, b), $[a, b]$ будем называть соответственно *открытой и замкнутой жордановыми дугами*, а образы промежутков вида $(a, b]$, $[a, b)$ — *полуоткрытыми жордановыми дугами*. При этом $a = -\infty$, $b = +\infty$ в случаях открытых и полуоткрытых дуг допускается. Гомеоморфный образ единичной окружности S_1 будем называть *замкнутой жордановой кривой*.

Вместе с понятием склейки поверхностей введем понятие склейки пары областей (см., например, [3]).

Определение 4. *Область $G \subset \mathbb{R}^2$ будем называть склейкой областей $\{G_i\}$ в соответствии с заданными склеивающими граничными гомеоморфизмами (7), если существует пара гомеоморфизмов $\varphi_i : G_i \cup \Gamma_i \to \varphi_i(G_i \cup \Gamma_i) \subset \mathbb{R}^2$ таких, что*

1) $\varphi_1(x^{(1)}) = \varphi_2(\varphi_{12}(x^{(1)}))$ *для всякого* $x^{(1)} \in \Gamma_1$;

2) $\varphi_1(G_1 \cup \Gamma_1) \cup \varphi_2(G_2 \cup \Gamma_2) = G$;

3) $\varphi_1(G_1) \cap \varphi_2(G_2) = \emptyset$.

Гомеоморфизмы φ_i будем называть осуществляющими склейку или просто склеивающими (без добавления «граничные»).

Наличие склейки областей позволяет параметризовать склейку поверхностей $\mathcal{X}_{12}$, то есть представить ее с помощью вектор-функции $f(x) : G \to \mathbb{R}^m$. Эту вектор-функцию определим по правилу

$$f(x) = f_i(\varphi_i^{-1}(x)), \text{ если } x \in \varphi_i(G_i \cup \Gamma_i).$$

Для дальнейшего дадим следующие определения.

Определение 5. *Монотонно возрастающая функция $h(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию*

$$\frac{1}{c} \le \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \le c,$$

для любых $x, t \in \mathbb{R}$ и некоторой постоянной $c \ge 1$ называется квазисимметрической.

Определение 6. *Открытая дуга (замкнутая кривая) $C \subset \mathbb{R}^2$ с концами в бесконечно удаленной точке называется квазипрямой (квазиокружностью), если она квазиконформно эквивалентна прямой (окружности), то есть существует квазиконформный гомеоморфизм*

$$\varphi(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

такой, что $\varphi(C)$ есть прямая (окружность).

Определение 7. *Если $D \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область, ограниченная квазиокружностью, то такая область называется* квазидиском.

Следующие факты **A1–A3** хорошо известны.

A1 Всякая монотонная функция может быть продолжена до квазиконформного отображения $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда она является квазисимметрической.

A2 Свойство дуги (замкнутой кривой) быть квазипрямой (квазиокружностью) однозначно характеризуется условием Альфорса: для любых трех точек $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in C$, таких, что ζ_3 лежит между ζ_1 и ζ_2, выполняется неравенство

$$\frac{|\zeta_3 - \zeta_1|}{|\zeta_2 - \zeta_1|} \leq K \tag{8}$$

с некоторой постоянной K. При этом в случае замкнутой кривой имеется в виду тот из участков C с концами ζ_1 и ζ_2, который имеет меньший диаметр.

A3 Если D — квазидиск или односвязная область, граница которой представляет собой квазипрямую, то известно, что для любой функции $f(x) \in L^{1,2}(D)$ существует ее продолжение на $\mathbb{R}^2$, такое, что продолжение $f(x) \in L^{1,2}(\mathbb{R}^2)$.

Свойства **A1**, **A2** представляют собой хорошо известные результаты Л. Альфорса [14], а **A3** составляет содержание известного результата С.К. Водопьянова, В.М. Гольдштейна, Т.Г. Латфуллина [1] (см. также [4; 15]).

Лемма 1. *Пусть имеется поверхность $\mathcal{X} = (D, f)$ в $\mathbb{R}^m$, заданная над односвязной областью $D \subset \mathbb{R}^2$ непрерывной, п.в. дифференцируемой вектор-функцией $y = f(x) : D \to \mathbb{R}^m$, для которой п.в. выполнено (2). Предположим,*

$$x = \varphi(u) : G \to D, \quad u = (u_1, u_2), \tag{9}$$

квазиконформное отображение и $g(u) = f(\varphi(u)) : G \to \mathbb{R}^m$ – эквивалентное представление поверхности $\mathcal{X}$, вводящее на ней новые координаты u_1, u_2. Рассмотрим величины $P(x)$ и $\widetilde{P}(u)$, определенные в координатах $x = (x_1, x_2)$ и $u = (u_1, u_2)$ по формуле (6). Тогда для некоторой постоянной $Q > 0$ для п.в. $u \in G$ выполнено неравенство

$$\widetilde{P}(u) \leq QP(\varphi(u)). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u))$, тогда условие квазиконформности этого отображения может быть записано в виде

$$|\nabla\varphi_1(u)|^2 + |\nabla\varphi_2(u)|^2 \leq QJ,$$

где $Q > 0$ — некоторая постоянная, а $J = \varphi_{1u_1}\varphi_{2u_2} - \varphi_{1u_2}\varphi_{2u_1}$ — якобиан отображения (9). Пусть $E = E(x)$, $F = F(x)$, $G = G(x)$ — коэффициенты первой квадратичной формы $\mathcal{X}$ в координатах $x = (x_1, x_2)$, а $\widetilde{E} = \widetilde{E}(u)$, $\widetilde{F} = \widetilde{F}(u)$, $\widetilde{G} = \widetilde{G}(u)$ — в координатах $u = (u_1, u_2)$. Между собой эти величины п.в. связаны формулами

$$\widetilde{E} = E\big(\varphi_{1u_1}\big)^2 + 2F\varphi_{1u_1}\varphi_{2u_1} + G\big(\varphi_{2u_1}\big)^2, \tag{11}$$

$$\widetilde{F} = E\varphi_{1u_1}\varphi_{1u_2} + F\big(\varphi_{1u_1}\varphi_{2u_2} + \varphi_{1u_2}\varphi_{2u_1}\big) + G\varphi_{2u_1}\varphi_{2u_2}, \tag{12}$$

$$\widetilde{G} = E\big(\varphi_{1u_2}\big)^2 + 2F\varphi_{1u_2}\varphi_{2u_2} + G\big(\varphi_{2u_2}\big)^2. \tag{13}$$

Здесь в правой части и всюду ниже $E = E(x)$, $F = F(x)$, $G = G(x)$ вычисляются при $x = \varphi(u)$. В силу известного неравенства для положительно определенных квадратичных форм

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 \le \Lambda(\xi^2 + \eta^2),$$

где $\Lambda = a_{11} + a_{22} \ge 0$ — след квадратичной формы $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$, имеем

$$\widetilde{E} + \widetilde{G} = E\bigg(\big(\varphi_{1u_1}\big)^2 + \big(\varphi_{1u_2}\big)^2\bigg) + 2F\bigg(\varphi_{1u_1}\varphi_{2u_1} + \varphi_{1u_2}\varphi_{2u_2}\bigg) +$$

$$+ G\bigg(\big(\varphi_{2u_1}\big)^2 + \big(\varphi_{2u_2}\big)^2\bigg) \le \big(E + G\big)\big(|\nabla\varphi_1|^2 + |\nabla\varphi_2|^2\big) \le$$

$$\le QJ\big(E + G\big). \tag{14}$$

Кроме того, из (11)–(13), п.в. следует соотношение

$$\widetilde{E}\widetilde{G} - \widetilde{F}^2 = J^2(EG - F^2). \tag{15}$$

Сопоставляя (14), (15) с выражением (6) для вычисления величин $P(x)$, $\tilde{P}(u)$, получаем (10). Лемма доказана.

3. Основной результат

Предварительно дадим несколько определений.

Определение 8. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область и $\Gamma \subset \partial D$ – открытая дуга. Пусть $F \subset D$ подмножество. Будем говорить, что F* компактно примыкает *к Γ, если $\overline{F} \cap \partial D \Subset \Gamma$. Здесь $\overline{F}$ замыкание F в $\mathbb{R}^2$, а отношение «$\Subset$» берется в смысле топологии Γ.*

Будем факт компактного примыкания для краткости записывать в виде «$F \Subset \Gamma|D$».

Для учета поведения поверхности $\mathcal{X}_{12}$ вблизи места склейки нам необходимо дать несколько измененный вариант определения 3.

Определение 9. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$, граница которой ∂D содержит открытую дугу Γ. Будем говорить, что функция $P : D \to \mathbb{R}$ является $W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma}$*-мажорируемой, *если для всякой подобласти $D' \subset D$, предкомпактной в $\mathbb{R}^2$, и такой, что или $D' \Subset D$, или $D' \Subset \Gamma|D$, найдется функция $K \in W^{1,2}(D')$ такая, что*

$$P(x) \le K(x) \quad \text{для п.в.} \;\; x \in D. \tag{16}$$

Определение 10. *Пусть $\mathcal{X}_i = (G_i, f_i)$, $(i = 1, 2)$ — две элементарные поверхности, причем $\Gamma_i = \partial G_i$ — квазипрямые. Пусть $\varphi_{12} : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ — склеивающее отображение, для которого определена склейка областей G_1 и G_2. Будем говорить, что отображение φ_{12} является квазисимметрическим, если оно квазиконформно эквивалентно квазисимметрической функции ψ_{12}, понимаемой в обычном смысле.*

Под квазиконформной эквивалентностью здесь понимается существование пары квазиконформных гомеоморфизмов $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ таких, что $g_i(\Gamma_i) = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, для которых диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1 \arrow[r, "\varphi_{12}"] \arrow[d, "g_1"'] & \Gamma_2 \arrow[d, "g_2"'] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\psi_{12}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Лемма 2. *Если отображение $\varphi_{12} : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ является квазисимметрическим, то его можно квазиконформно продолжить до гомеоморфизма $\widehat{\varphi}_{12} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, причем так, что*

$$\widehat{\varphi}_{12}(G_1) = \mathbb{R}^2 \setminus (G_2 \cup \Gamma_2).$$

Замечание. Очевидно, что упомянутое в лемме продолжение является отображением, меняющим ориентацию.

Доказательство. Пусть g_1, g_2, ψ_{12} те же, что и в диаграмме выше. В силу свойства **А1** п. 2 функция ψ_{12} квазиконформно продолжается с $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$. Пусть $\widehat{\psi}_{12}$ — это продолжение. Тогда в качестве продолжения, о котором говорится в формулировке леммы, можно взять $\widehat{\varphi}_{12}(x^{(1)}) = g_2^{-1} \circ (\widehat{\psi}_{12})^* \circ g_1(x^{(1)})$, где $(\cdot)^*$ — операция отражения относительно оси абсцисс: $(u_1, u_2)^* = (u_1, -u_2)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Предположим, $D \subset \mathbb{R}^2$ — область и ∂D квазипрямая. Пусть $A, B \in \partial D$, $(A \neq B)$ — две произвольные точки и дуга $\gamma_{A,B}$ — часть ∂D, соединяющая A и B. Предположим также, что задано ограниченное множество $F \subset D$ такое, что выполнено одно из двух: или $F \Subset D$, или $F \Subset \gamma_{A,B}|D$. Тогда дугу $\gamma_{A,B}$ можно дополнить до квазиокружности C, подходящей дугой целиком лежащей в D и охватывающей F.*

Доказательство. Пусть $y = \varphi(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — квазиконформное отображение, переводящее D в верхнюю полуплоскость $\{y : y_2 > 0\}$, а границу ∂D в ось Oy_1. Пусть $a = \varphi(A)$, $b = \varphi(B)$ и пусть $F_1 = \varphi(F)$. Дополним отрезок $[a, b]$ до замкнутой ломанной $\widetilde{C}$ с конечным числом звеньев, охватывающей F_1 и целиком расположенной в $\varphi(D)$. При построении этой ломанной будем руководствоваться тем, чтобы углы между двумя соседними звеньями не равнялись $0, \pi$. Ясно, что для такой замкнутой ломанной будет выполнено условие Альфорса (8), а значит она и ее прообраз $C = \varphi^{-1}(\widetilde{C})$ будут квазиокружностями. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть в $\mathbb{R}^2$ имеется $\{G_i\}_{i=1}^2$ пара односвязных областей, граница $\Gamma_i = \partial G_i$ каждой из которых есть квазипрямая.*

Предположим, что существует пара квазиконформных гомеоморфизмов $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, таких что $\mathbb{R}^2 = \varphi_1(G_1 \cup \Gamma_1) \cup \varphi_2(G_2 \cup \Gamma_2)$ и $\varphi_1(G_1) \cap \varphi_2(G_2) = \emptyset$.

Тогда, если имеется пара функций $P_i(x^{(i)})$, $W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma_i}$-мажорируемых в G_i, то функция

$$P(x) = P_i(\varphi_i^{-1}(x)), \text{ если } x \in \varphi(G_i),$$

будет $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемой в $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. Зададим произвольную область $F \Subset \mathbb{R}^2$. Положим

$$\tilde{F}_i = \varphi_i^{-1}(F \cap \varphi_i(G_i \cup \Gamma_i)).$$

Тогда $\tilde{F}_i \Subset \Gamma_i | G_i$. Случай $\tilde{F}_i \cap \partial G_i = \emptyset$ является допустимым и тогда $\tilde{F}_i \Subset G_i$.

По предыдущей лемме для каждого $\tilde{F}_i$ построим квазидиск $D_i \subset G_i$, ограниченный некоторой замкнутой граничной дугой $\gamma_i \subset \partial G_i$ и дополняющей ее дугой $\widetilde{\gamma}_i \subset G_i$. Тогда существует функция $K_i(x^{(i)}) \in W^{1,2}(D_i)$, мажорирующая $P_i(x^{(i)})$ в D_i. Так как квазиконформные отображения сохраняют свойство принадлежности к функциональному классу $L^{1,2}$ (см.: [2; 4]), то $K_i(\varphi_i^{-1}(x)) \in L^{1,2}(\varphi_i(D_i))$. С другой стороны, $\varphi_i(D_i)$ является квазидиском, а значит функции $K_i(\varphi_i^{-1}(x))$ продолжаются на $\mathbb{R}^2$. Сохраняя для этих продолжений те же самые обозначения, определим в $\mathbb{R}^2$ функцию

$$K(x) = \max_i K_i(\varphi_i^{-1}(x)) \in L^{1,2}(\mathbb{R}^2),$$

мажорирующую $P(x)$ на F. Лемма доказана.

Доказанные выше леммы приводят к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть определена склейка $\mathcal{X}_{12}$ пары поверхностей $\mathcal{X}_i = (G_i, f_i)$, $(i = 1, 2)$, причем множества склейки $\Gamma_i = \partial G_i$ — квазипрямые, а склеивающий граничный гомеоморфизм $\varphi_{12} : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ является квазисимметрическим отображением.*

Предположим, что каждая функция

$$P_i(x^{(i)}) = \frac{E_i(x^{(i)}) + G_i(x^{(i)})}{\sqrt{E_i(x^{(i)})G_i(x^{(i)}) - F_i^2(x^{(i)})}}, \ i = 1, 2,$$

$W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma_i}$*-мажорируема в G_i.*

Тогда на поверхности $\mathcal{X}_{12}$ существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in B(O, R)$, $R > 1$. Эти координаты определяются единственным образом выбором соответствия $a \longleftrightarrow O$, $b \longleftrightarrow \Xi$, где либо $a, b \in G_i \cup \Gamma_i (i = 1, 2)$ и $a \neq b$, либо $a \in G_1$, $b \in G_2$ и $a \neq \varphi_{12}(b)$.

Доказательство. Продолжим отображение $\varphi_{12} : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ до квазиконформного гомеоморфизма $\widehat{\varphi}_{12} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в соответствии с леммой 2 и рассмотрим пару гомеоморфизмов

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x^{(1)}) & \stackrel{\text{def}}{=} & \widehat{\varphi}_{12}(x^{(1)}), \quad x^{(1)} \in G_1, \\ x = \varphi_2(x^{(2)}) & \stackrel{\text{def}}{=} & x^{(2)}, \quad x^{(2)} \in G_2. \end{cases} \tag{17}$$

Пара отображений (17) дает склейку областей G_1 и G_2 с заданным граничным гомеоморфизмом $\varphi_{12} : \Gamma_1 \to \Gamma_2$. При этом результатом склейки является

$$\mathbb{R}^2 = \varphi_1(G_1 \cup \Gamma_1) \cup \varphi_1(G_2 \cup \Gamma_2) = \varphi_1(G_1 \cup \Gamma_1) \cup G_2 \cup \Gamma_2.$$

Переменная $x = (x_1, x_2)$ является параметризацией склейки $\mathcal{X}_{12}$. Для функции $P(x)$, определенной в координатах x_1, x_2 по формуле (6), для п.в. $x \in G_2 \cup \Gamma_2$ мы имеем

$$P(x) = P_2(x),$$

а для п.в. $x \in G_1 \cup \Gamma_1$ в силу леммы 1 имеем неравенство

$$P(x) \leq QP_1(x)$$

с некоторой постоянной $Q \geq 1$. Тогда по лемме 4 можно заключить о $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемости функции $P(x)$ в $\mathbb{R}^2$ и по теореме 1 приходим к утверждению теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Заключение

Новейшие исследования классической задачи о существовании изотермических координат на двумерной поверхности в $\mathbb{R}^m$ только на современном этапе негладких или имеющих разного рода патологию в строении были инициированы в [12].

Мы надеемся, что наша работа будет способствовать продвижению этих исследований, а также решению аналогичных задач в псевдоевклидовых пространствах, где вырождение метрики (3) может быть обусловлено не только негладкостью поверхности, но и наличием изотропных направлений объемлющего пространства. Такие исследования планируется провести на основе комбинации методов настоящей работы и методов, применяемых при изучении уравнений Бельтрами переменного типа, имеющихся в [8–11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Водопьянов, С. К. Критерий продолжения функций класса L_2^1 из неограниченных плоских областей / С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, Т. Г. Латфуллин // Сиб. мат. журн. — 1979. — Т. XX, № 2. — С. 416–419.

2. Водопьянов, С. К. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными / С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк // УМН. — 1979. — Т. 34, № 1 (205). — С. 17–65.

3. Волковыский, Л. И. Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности / Л. И. Волковыский // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1950. — Т. XXXIV. — С. 3–171.

4. Гольдштейн, В. М. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения / В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк. — М. : Наука, 1983. — 284 с.

5. Грудский, И. М. Построение внутренних координат на составных Римановых поверхностях / И. М. Грудский // Дифференциальные, интегральные уравнения и комплексный анализ. — Элиста : Изд-во Калмыц. ун-та, 1986. — С. 30–45.

6. Грудский, И. М. Формула Кристоффеля — Шварца для полиэдральных поверхностей / И. М. Грудский // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 307, № 1. — С. 15–17.

7. Каратеодори, К. Конформное отображение / К. Каратеодори. — М. ; Л. : Государственное технико-теоретическое издательство, 1934. — 130 с.

8. Кондрашов, А. Н. К теории вырождающихся уравнений Бельтрами переменного типа / А. Н. Кондрашов // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 6. — С. 1321–1337.

9. Кондрашов, А. Н. К теории уравнения Бельтрами переменного типа со многими складками / А. Н. Кондрашов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 2 (19). — С. 26–35.

10. Кондрашов, А. Н. Уравнения Бельтрами, вырождающиеся на дуге / А. Н. Кондрашов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — № 5 (24). — С. 24–39.

11. Кондрашов, А. Н. Уравнения Бельтрами переменного типа и конформные мультискладки / А. Н. Кондрашов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2015. — № 5 (30). — С. 6–24.

12. Миклюков, В. М. Изотермические координаты на поверхностях с особенностями / В. М. Миклюков // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 1. — С. 69–88.

13. Решетняк, Ю. Г. Двумерные многообразия ограниченной кривизны / Ю. Г. Решетняк // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1989. — Т. 70. — С. 8–189.

14. Ahlfors, L. V. Lectures on quasiconformal mappings / L. V. Ahlfors. — Toronto ; Ont. ; N. Y. ; London : Van Nostrand, 1966. — v+146 p.

15. Maz'ya, V. G. Sobolev Spaces. With Applications to Elliptic Partial Differential Equations / V. G. Maz'ya. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 2011. — xxviii+866 p.

16. Müller, S. On surfaces of finite total curvature / S. Müller, V. Sverák // J. Differential Geom. — 1995. — Vol. 42, № 2. — P. 229–258.

17. Toro, T. Surfaces with generalized second fundamental form in L^2 are Lipschitz manifolds / T. Toro // J. Differential Geom. — 1994. — Vol. 39, № 1. — P. 65–101.

REFERENCES

1. Vodopyanov S.K., Goldshtein V.M., Latfullin T.G. Kriteriy prodolzheniya funktsiy klassa L_2^1 iz neogranichennykh ploskikh oblastey [Criteria for Extension of Functions of the Class L_2^1 From Unbounded Plane Domains]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 1979, vol. XX, no. 2, pp. 416-419.

2. Vodop'yanov S.K., Gol'dshtein V.M., Reshetnyak Yu.G. O geometricheskikh svoystvakh funktsiy s pervymi obobshchennymi proizvodnymi [On Geometric Properties of Functions with Generalized First Derivatives]. *UMN* [Russian Mathematical Surveys], 1979, vol. 34, no. 1 (205), pp. 17-65.

3. Volkovyskiy L.I. Issledovaniya po probleme tipa odnosvyaznoy rimanovoy poverkhnosti [Investigation of the Type Problem for a Simply Connected Riemann Surface]. *Tp. mat. in-ta im. V.A. Steklova AN SSSR*, 1950, vol. XXXIV, pp. 3-171.

4. Gol'dshtein V.M., Reshetnyak Yu.G. *Vvedenie v teoriyu funktsiy s obobshchennymi proizvodnymi i kvazikonformnye otobrazheniya* [Quasiconformal Mappings and Sobolev Spaces]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 284 p.

5. Grudskiy I.M. Postroenie vnutrennikh koordinat na sostavnykh Rimanovykh poverkhnostyakh [Construction of Inner Coordinates on Composite Riemann Surfaces]. *Differentsialnye, integralnye uravneniya i kompleksnyy analiz.* Elista, Izd-vo Kalmyts. un-ta, 1986, pp. 30-45.

6. Grudskiy I.M. Formula Kristoffelya — Shvartsa dlya poliedralnykh poverkhnostey [The Christoffel — Schwarz Formula for Polyhedral Surfaces]. *Dokl. AN SSSR* [Doklady Mathematics], 1989, vol. 307, no. 1, pp. 15-17.

7. Carathéodory C. *Konformnoe otobrazhenie* [Conformal Representation]. Moscow; Leningrad, Gosudarstvennoe tekhniko-teoreticheskoe izdatelstvo Publ., 1934. 130 p.

8. Kondrashov A.N. K teorii vyrozhdayushchikhsya uravneniy Beltrami peremennogo tipa [On the Theory of Degenerate Alternating Beltrami Equations]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2012, vol. 53, no. 6, pp. 1321-1337.

9. Kondrashov A.N. K teorii uravneniya Beltrami peremennogo tipa so mnogimi skladkami [On the Theory of Alternating Beltrami Equation with Many Folds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2013, no. 2 (19), pp. 26-35.

10. Kondrashov A.N. Uravneniya Beltrami, vyrozhdayushchiesya na duge [Beltrami Equations with Degenerate on Arcs]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 5 (24), pp. 24-39.

11. Kondrashov A.N. Uravneniya Beltrami peremennogo tipa i konformnye multiskladki [Alternating Beltrami Equation and Conformal Multifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2015, no. 5 (30), pp. 6-24.

12. Miklyukov V.M. Izotermicheskie koordinaty na poverkhnostyakh s osobennostyami [Isothermic Coordinates on Singular Surfaces]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2004, vol. 195, no. 1, pp. 69-88.

13. Reshetnyak Yu.G. Dvumernye mnogoobraziya ogranichennoy krivizny [Two-Dimensional Manifolds of Bounded Curvature]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya*, 1989, vol. 70, pp. 8-189.

14. Ahlfors L.V. *Lectures on quasiconformal mappings*. Toronto; Ont.; N. Y.; London, Van Nostrand, 1966. v+146 p.

15. Maz'ya V.G. *Sobolev Spaces. With Applications to Elliptic Partial Differential Equations*. Berlin; Heidelberg; New York, Springer-Verlag, 2011. xxviii+866 p.

16. Müller S., Sverák V. On Surfaces of Finite Total Curvature. *J. Differential Geom.*, 1995, vol. 42, no. 2, pp. 229-258.

17. Toro T. Surfaces with Generalized Second Fundamental Form in L^2 are Lipschitz Manifolds. *J. Differential Geom.*, 1994, vol. 39, no. 1, pp. 65-101.

ISOTHERMIC COORDINATES ON SEWING SURFACES

Alexander Nikolaevich Kondrashov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru, kiem@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In the paper we investigated the question about existence and uniqueness of isothermic coordinates on sewing surfaces in $\mathbb{R}^m$. Such surfaces is special case of irregular surfaces. We obtained the analog of the famous theorem of V.M. Miklukov (2004) for such surfaces.

The result of this paper.

Theorem 2. *Let $\mathcal{X}_{12}$ be a pasting together of the pair of the surfaces $\mathcal{X}_i = (G_i, f_i)$, $(i = 1, 2)$ and $\Gamma_i = \partial G_i$ is quasistraight line. Let $\varphi_{12} : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ be a sewing function.*

Assume that φ_{12} is quasimonotone function and that

$$P_i(x^{(i)}) = \frac{E_i(x^{(i)}) + G_i(x^{(i)})}{\sqrt{E_i(x^{(i)})G_i(x^{(i)}) - F_i^2(x^{(i)})}}, \ i = 1, 2,$$

is $W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma_i}$-majorized functions in G_i.

There exist isothermic coordinates $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in B(O, R)$, $R > 1$ on $\mathcal{X}_{12}$. These coordinates are determined uniquely by choice of correspondence $a \longleftrightarrow O$, $b \longleftrightarrow \Xi$, where either the $a, b \in G_i \cup \Gamma_i (i = 1, 2)$ and $a \neq b$, or $a \in G_1$, $b \in G_2$ and $a \neq \varphi_{12}(b)$.

Key words: isothermic coordinates, sewing surfaces, sewing functions, quasisymmetric function, $W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma}$-majorized function, quasistraight line.