DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.9

УДК 517. 9
ББК 22.16

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Файзулло Мамадуллоевич Шамсудинов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа,
Курган-Тюбинский государственный университет
faizullo100@yahoo.com
ул. Айни, 67, 735140 г. Курган-Тюбе, Республика Таджикистан

Аннотация. В данной работе рассматривается система из трех уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, причем эти уравнения связаны в силу неизвестной функции. Для рассматриваемой системы при $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma = \delta = 2$ получены представления многообразия решений при помощи произвольных постоянных и изучены свойства полученных решений.

Ключевые слова: сингулярная точка, прямоугольник, многообразия решений, переопределенная система, неизвестная функция.

Введение

Пусть D — прямоугольник $D = \{(x, y) : 0 < x < \delta_1, \quad 0 < y < \delta_2\}$. Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y = 0,\ 0 < x < \delta_1\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0,\ 0 < y < \delta_2\}.$$

В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{r^\beta}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{a_2(x,y)}{r^\gamma}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{c_2(x,y)}{r^\gamma}u = \dfrac{f_2(x,y)}{r^\gamma}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{b_2(x,y)}{r^\delta}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_3(x,y)}{r^\delta}u = \dfrac{f_3(x,y)}{r^\delta}, \end{cases} \tag{1}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a_i(x, y)$, $b_j(x, y)$, $c_k(x, y)$, $f_k(x, y), j = \overline{1,2}$, $k = \overline{1,3}$ — заданные функции в области D, $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma = \delta = 2$.

Исследованию дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1–8].

Целью настоящей работы явилось получение представления многообразия решений системы уравнений (1) при помощи произвольных постоянных.

В рассматриваемой работе на основе способа, разработанного в [2] и [4] для системы уравнений (1), получены представления многообразия решений при помощи произвольных постоянных.

В дальнейшем под $C_2(D)$ понимаем класс функций, которые имеют непрерывные производные первого порядка в D и такие, что $U_{xy} \in C(D)$.

Пусть $a_1(x,y) \in C_x^1(\overline{D}),\ b_1(x,y),\ c_1(x,y),\ f_1(x,y) \in C(\overline{D})$.

В этом случае уравнение системы (1) представим в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b_1(x,y)}{r^\beta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\right) u = \frac{f_1(x,y) + c_4(x,y)u(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \tag{2}$$

где

$$c_4(x,y) = -c_1(x,y) + r^{\alpha+\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y).$$

Введя новую неизвестную функцию

$$V_1(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a_1(x,y)}{r^\alpha}u, \tag{3}$$

сведем задачу к решению следующего дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{b_1(x,y)}{r^\beta}V_1 = \frac{f_1(x,y) + c_4(x,y)u(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}. \tag{4}$$

Считая в уравнении (4) правую часть известной, находим $V_1(x,y)$ [2]

$$V_1(x,y) = \exp\left[-W_{b_1}^\beta(x,y)\right]\left(\psi_1 + \int_0^x \frac{f_1(t,y) + c_4(t,y)u(t,y)}{(t^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\exp\left[W_{b_1}^\beta(t,y)\right]dt\right), \tag{5}$$

где

$$W_{b_1}^\beta(x,y) = \int_0^x \frac{b_1(t,y)}{(t^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}dt.$$

Теперь, решая уравнение (3), выражаем $u(x,y)$ через $V_1(x,y)$

$$u(x,y) = \exp\left[W_{a_1}^\alpha(x,y)\right]\left(\varphi_1(x) + \int_0^y V_1(x,s)\exp\left[W_{a_1}^\alpha(x,s)\right]ds\right), \tag{6}$$

где

$$W_{a_1}^\alpha(x,y) = \int_0^y \frac{a_1(x,s)}{(x^2+s^2)^{\frac{\alpha}{2}}}dt.$$

В (6), подставляя вместо $V_1(x,s)$ его значение из (5), получим

$$u(x,y) = \exp\left[-W_{a_1}^\alpha(x,y)\right]\left\{\varphi_1(x) + \int_0^y \exp\left[W_{a_1}^\alpha(x,s) - W_{b_1}^\beta(x,s)\right] \times \right.$$
$$\left. \times\left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t,s) + c_4(t,s)u(t,s)}{(t^2+s^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\exp\left[W_{b_1}^\beta(t,s)\right]dt\right)ds\right\}. \tag{7}$$

Обращая интегральное уравнение (7), имеем

$$u(x,y) = \exp\left[-W_{a_1}^{\alpha}(x,y)\right]\left\{F_1(x,y) + \int_0^y ds \int_0^x \Gamma_1(x,y;t,s) F_1(t,s)dt\right\} \equiv \\ \equiv \chi_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)), \tag{8}$$

где

$$F_1(x,y)) = \varphi_1(x) + \int_0^y \exp\left[W_{a_1}^{\alpha}(x,y) - W_{b_1}^{\beta}(x,s)\right] \times \\ \times \left(\psi_1(s) + \int_0^x \frac{f_1(t,s)}{(t^2+s^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \exp\left[W_{b_1}^{\beta}(t,s)\right] dt\right) ds,$$

$\Gamma_1(x,y;t,s)$ — резольвента явно выписанного интегрального уравнения Вольтерра второго рода; $\varphi_1(x), \psi_1(y)$ — произвольная функции точек Γ_1 и Γ_2.

Пусть во втором уравнении системы (1) $a_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D})$, $c_2(x,y), f_2(x,y) \in C(\overline{D})$ и выполнено условие

$$c_4(x,y) = -c_2(x,y) + r^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_2(x,y)}{r^2}\right). \tag{9}$$

Тогда второе уравнение системы (1) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x,y)}{r^2} u\right) = \frac{f_2(x,y) + c_5(x,y)u(x,y)}{r^2}. \tag{10}$$

В равенстве (10), введя новую неизвестную функцию $V_2(x,y)$ по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x,y)}{r^2} u = V_2(x,y), \tag{11}$$

сведем задачу к решению следующего дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{f_2(x,y) + c_5(x,y)u(x,y)}{r^2}. \tag{12}$$

Считая в уравнении (12) правую часть известной, находим

$$V_2(x,y) = \psi_2(y) + \int_0^x \frac{f_2(t,y) + c_5(t,y)u(t,y)}{t^2+y^2} dt, \tag{13}$$

где $\psi_2(y)$ — произвольная функция точек Γ_2.

Теперь уравнение (11) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\exp\left[W_{a_2}^2(x,y) + \frac{a_2(0,0)}{y} \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right] u(x,y)\right\} = \\ = V_2(x,y) \exp\left[W_{a_2}^2(x,y) + \frac{a_2(0,0)}{y} \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right], \tag{14}$$

где
$$W^{2}_{a_2}(x,y)=\int_0^x \frac{a_2(t,y)-a_2(0,0)}{t^2+y^2}dt.$$

Потребовав выполнение условия
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{r^{\alpha}}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{r^2}\right) \text{ в } D, \tag{15}$$

а также продифференцировав равенство (14), после некоторых упрощений получим выражение

$$\begin{gathered}\varphi_1'(x)+\frac{a_2(x,0)}{x}\varphi_1(x)=\exp\left[W^{\alpha}_{a_1}(x,y)\right]\times\\ \times\left(\psi_1(y)+\int_0^x \frac{f_2(t,y)+c_5(t,y)u(t,y)}{t^2+y^2}dt\right)-\frac{a_2(x,0)}{x^2}\int_0^y \exp\left[W^{\alpha}_{a_1}(x,s)-W^{\beta}_{b_1}(x,s)\right]\times\\ \times\left(\psi_1(s)+\int_0^x \frac{f_1(t,s)+c_4(t,s)u(t,s)}{(t^2+s^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\exp\left[W^{\beta}_{b_1}(t,s)\right]dt\right)ds-\\ -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \exp\left[W^{\alpha}_{a_1}(x,s)-W^{\beta}_{b_1}(x,s)\right]\times\\ \times\left(\psi_1(s)+\int_0^x \frac{f_1(t,s)+c_4(t,s)u(t,s)}{(t^2+s^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\exp\left[W^{\beta}_{b_1}(t,s)\right]dt\right)ds.\end{gathered} \tag{16}$$

Из условия независимости левой части равенства (16) от y получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\exp\left[W^{\alpha}_{a_1}(x,y)\right]\left(\psi_2(y)+\int_0^x \frac{f_2(t,y)+c_5(t,y)u(t,y)}{t^2+y^2}dt\right)\right\}-\\ -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\exp\left[W^{\alpha}_{a_1}(x,y)-W^{\beta}_{b_1}(x,y)\right]\times\right.\\ \left.\times\left(\psi_1(y)+\int_0^x \frac{f_1(t,s)+c_4(t,s)u(t,s)}{(t^2+s^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\exp\left[W^{\beta}_{b_1}(t,y)\right]dt\right)\right\}=\\ =\frac{a_2(x,0)}{x}\exp\left[W^{\alpha}_{a_1}(x,y)-W^{\beta}_{b_1}(x,y)\right]\\ \left(\psi_1(y)+\int_0^x \frac{f_1(t,y)+c_4(t,y)u(t,y)}{(t^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\exp\left[W^{\beta}_{b_1}(t,y)\right]dt\right).\end{gathered} \tag{17}$$

Преобразуя последнее слагаемое равенство (17), для определения $\varphi_1(x)$ получим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi_1'(x)+\frac{a_2(x,0)}{x^2}\varphi_1(x)=\psi_2(0)+\int_0^x \frac{f_2(t,0)+c_5(t,0)\varphi_1(t)}{t^2}dt. \tag{18}$$

Для определения $\psi_1(y)$, выполнив операцию дифференцирования в равенстве (17), после упрощения приходим в D к равенству

$$r^{\alpha+\beta}a_1(x,y)\left(\psi_2(y)+\int_0^x \frac{f_2(t,y)+c_5(t,y)u(t,y)}{t^2+y^2}dt\right)+\psi_2'(y)r^{\alpha+2}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x \frac{f_2(t,y)+c_5(t,y)u(t,y)}{t^2+y^2}dt=r^{\alpha+2}(r^{-2}a_2(x,y)-r^{-\beta}b_1(x,y)\exp\left[-W_{b_2}^{\beta}(x,y)\right]\times$$
$$\times\left(\psi_1(y)+\int_0^x \frac{f_2(t,y)+c_5(t,y)u(t,y)}{(t^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\exp\left[W_{b_2}^{\beta}(t,y)\right]dt\right)+r^{\alpha}(f_1(x,y)+c_4(x,y)u(x,y)). \quad (19)$$

Теперь при выполнении условий $b_2(x,y)\in C_y^1(\overline{D})$, $c_3(x,y)$, $f_3(x,y)\in C(\overline{D})$ третье уравнение системы (1) представимо в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{b_2(x,y)}{r^2}u\right)=\frac{f_3(x,y)+c_6(x,y)u(x,y)}{r^2}, \quad (20)$$

где

$$c_6(x,y)=-c_3(x,y)+r^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_2(x,y)}{r^2}\right).$$

Вводя новую неизвестную функцию по формуле

$$V_3(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{b_2(x,y)}{r^2}u, \quad (21)$$

сведем задачу к решению следующего дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial V_3}{\partial y}=\frac{f_3(x,y)+c_6(x,y)u(x,y)}{r^2}. \quad (22)$$

Считая в уравнении (22) правую часть известной, находим

$$V_3(x,y)=\varphi_2(x)+\int_0^y \frac{f_3(x,s)+c_6(x,s)u(x,s)}{x^2+s^2}ds. \quad (23)$$

Теперь уравнение (21) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\exp\left[W_{b_2}^2(x,y)+\frac{b_2(0,0)}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]u(x,y)\right\}=$$
$$=\exp\left[W_{b_2}^2(x,y)+\frac{b_2(0,0)}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]V_3(x,y), \quad (24)$$

где

$$W_{b_2}^2(x,y)=\int_0^y \frac{b_2(x,s)-b_2(0,0)}{x^2+s^2}ds.$$

В равенстве (24) вместо $u(x,y)$ и $V_3(x,y)$, подставляя их значения соответственно из (7) и (23) и затем выполняя операцию дифференцирования, после упрощения получим выражение:

$$\exp\left[-W_{b_1}^{\beta}(x,y)\right]\left(\psi_1(y)+\int_0^x \frac{f_1(t,y)+c_4(t,y)u(t,y)}{(t^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\exp\left[W_{b_1}^{\beta}(t,y)\right]dt\right)= \\ =\varphi_2(x)+\int_0^y \frac{f_3(x,s)+c_6(x,s)u(x,s)}{x^2+s^2}ds \quad (25)$$

при $r^{\alpha}b_2(x,y)=r^2a_1(x,y)$ в D.

Дифференцируя равенство (18), получим

$$\varphi_1''(x)+\frac{a_2(0,0)}{x^2}\varphi_1'(x)+\frac{A(x)}{x^4}\varphi_1(x)=\frac{f_2(x,0)}{x^2}, \quad (26)$$

где

$$A(x)=a_2'(x,0)x^2-2xa_2(0,0)-x^2c_5(x,0).$$

Пусть $A(x)=0$, тогда имеем

$$\varphi_1''(x)+\frac{a_2(0,0)}{x^2}\varphi_1'(x)=\frac{f_2(x,0)}{x^2}. \quad (27)$$

Решение уравнения (27) запишем в виде

$$\varphi_1(x)=c_1\int_0^x \exp\left[-W_{a_2}^2(t,0)+a_2(0,0)w_1(t)\right]dt+\int_0^x \exp\left[-W_{a_2}^2(t,0)+a_2(0,0)W_1(t)\right]\times \\ \times\left(\int_0^t \frac{f_2(t_1,0)}{t_1^2}\exp\left[W_{a_2}^2(t_1,0)-a_2(0,0)W_1(t_1)\right]dt_1\right)dt+c_2, \quad (28)$$

где

$$W_{a_2}^2(x,0)=\int_0^x \frac{a_2(t,0)-a_2(0,0)}{t^2}dt,\quad W_1(x)=\frac{1}{x},$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные.

В равенстве (25) при $x\to 0$, переходя к пределу, определим $\psi_1(y)$ в виде

$$\psi_1(y)=\varphi_0(0)+\int_0^y \frac{f_3(0,s)}{s^2}ds \quad (29)$$

при $r^{\alpha}b_2(x,y)=r^2a_1(x,y)$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям:

1) $a_j(x,y)\in C_x^1(\overline{D}),\ a_2(x,y),b_2(x,y)\in C_y^1(\overline{D}),$
$b_1(x,y)c_k(x,y),\ f_k(x,y)\in C(\overline{D}),\quad k=\overline{1,3};$

2) $c_4(x,y)=-c_1(x,y)+r^{\alpha+\beta}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_1(x,y)}{r^{\alpha}}\right)+a_1(x,y)b_1(x,y),$

$c_5(x,y)=-c_2(x,y)+r^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_2(x,y)}{r^2}\right),$

$c_6(x,y)=-c_3(x,y)+r^2\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{b_2(x,y)}{r^2}\right);$

3) $\mid a_2(x,0) - a_2(0,0) \mid \leq H_1 x^{\gamma_1},\ H_1 = \mathrm{const}\ ,\ \gamma_1 > 1;$

4) $a_2(0,0) < 0;$

5) $a_1(x,y)$ и $a_2(x,y)$, $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ $f_1(x,y)$ и $f_3(x,y)$ соответственно удовлетворяют условиям совместности (15), (19), (25);

6) $f_2(x,0) = o(x^{\lambda_1}), \lambda_1 > 1,$
$f_3(x,0) = o(x^{\lambda_2}), \lambda_2 > 1.$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ представимо в виде (8), (28), (29).

При этом

$$u(0,0) = c_2 = \frac{f_1(0,0)}{c_1(0,0)} = \frac{f_2(0,0)}{c_2(0,0)} = \frac{f_3(0,0)}{c_3(0,0)},$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right\} = \lim_{x\to 0}\varphi_1'(x) = 0.$$

Замечание 1. *В частности, если коэффициенты первого, второго и третьего уравнения системы (1) соответственно удовлетворяют условиям* $c_4(x,y) = 0, c_5(x,y) = 0, c_6(x,y) = 0$ *и всем условиям теоремы 1, кроме условия 4, тогда решение названной системы дается явной формулой при помощи одной произвольной постоянной.*

Замечание 2. *Пусть* $a_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), c_2(x,y), f_2(x,y) \in C(\overline{D})$ *и второе уравнение системы (1) является исходным, тогда решение названной системы найдено при помощи резольвенты одномерного интегрального уравнения Вольтерра со слабой особенностью.*

Замечание 3. *Пусть* $b_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), c_3(x,y), f_3(x,y) \in C(\overline{D})$ *и третье уравнение системы (1) является главным, тогда для названной системы получены решения, подобные замечанию 2.*

Автор выражает глубокую благодарность академику АН Республики Таджикистан Н.Р. Раджабову за обсуждение настоящей работы и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов, Л. Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями / Л. Г. Михайлов. — Душанбе : Дониш, 1986. — 115 с.

2. Раджабов, Н. Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Н. Р. Раджабов. — Душанбе : Изд-во ТГУ, 1992. — 236 с.

3. Раджабов, Н. Р. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения / Н. Р. Раджабов. — Душанбе : Деваштич, 2007. — 221 с.

4. Раджабов, Н. Р. Переопределенная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями / Н. Р. Раджабов, М. Эльсаед Абдель Аал. — Саарбрюккен : Lap Lambert Academic Publishing, 2011. — 234 с.

5. Тасмамбетов, Ж. Н. Нормальные решения специальных систем дифференциальных уравнении в частных производных второго порядка с полиномиальными коэффициентами : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Тасмамбетов Жаксылык Нурадинович. — Алматы, 2004. — 41 с.

6. Шамсудинов, Ф. М. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой / Ф. М. Шамсудинов // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань : Изд-во Казан. мат. о-ва, 2014. — Т. 49. — С. 335–339.

7. Appell, P. Fonctions hypergéométriques et hypersphériques: polynomes d'Hermite / P. Appell, J. Kampé de Fériet. — Paris : Gauthier-Villars, 1926. — 434 p.

8. Wilczynski, E. J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces / E. J. Wilczynski. — Leipzig : B.G. Teubner, 1906. — 324 p.

REFERENCES

1. Mikhaylov L.G. *Nekotorye pereopredelennye sistemy uravneniy v chastnykh proizvodnykh s dvumya neizvestnymi funktsiyami* [Some Partial Differential Systems of Equations and Partial Division of Two Unknown Functions]. Dushanbe, Donish Publ., 1986. 115 p.

2. Radzhabov N.R. *Vvedenie v teoriyu differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh so sverkhsingulyarnymi koeffitsientami* [An Introduction to the Theory of Partial Differential Equations with Super-Singular Coefficients]. Dushanbe, Izd-vo TGU Publ., 1992. 236 p.

3. Radzhabov N.R. *Integralnye uravneniya tipov Volterra s fiksirovannymi granichnymi i vnutrennimi singulyarnymi i sverkhsingulyarnymi yadrami i ikh prilozheniya* [Integral Equations of Voltare Type with Fixed Border and Internal Singular and Super-Singular Kernels and Their Applications]. Dushanbe, Devashtich Publ., 2007. 221 p.

4. Radzhabov N.R., Elsaed Abdel Aal M. *Pereopredelennaya lineynaya sistema vtorogo poryadka s singulyarnymi i sverkhsingulyarnymi liniyami* [Overdetermined Linear System of the Second Order with Singular and Super Singular Lines]. Saarbrücken, Lap Lambert Academic Publishing Publ., 2011. 234 p.

5. Tasmambetov Zh.N. *Normalnye resheniya spetsialnykh sistem differentsialnykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka s polinomialnymi koeffitsientami: avtoref. dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk* [The Normal Solution of Special Systems of the Partial Differential Equations of Second Order with Polynomial Coefficients. Abstract of Diss. Doctor of Physical and Mathematical Sciences]. Almaty, 2004. 41 p.

6. Shamsudinov F.M. Ob odnoy pereopredelennoy sisteme differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka s singulyarnoy tochkoy [On an Overdetermined System of Second Order Differential Equations with Singular Point]. *Tr. mat. tsentra im. N.I. Lobachevskogo*. Kazan, Izd-vo Kazan. mat. o-va Publ., 2014, vol. 49, pp. 335-339.

7. Appell P., Kampé de Fériet J. *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques: polynomes d'Hermite*. Paris, Gauthier-Villars, 1926. 434 p.

8. Wilczynski E.J. *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces*. Leipzig, B.G. Teubner, 1906. 324 p.

ON AN OVERDETERMINED SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR POINT

Fayzullo Mamadulloevich Shamsudinov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis,
Khurghonteppa State University
faizullo100@yahoo.com
Ayni St., 67, 735140 Khurghonteppa, Republic of Tajikistan

Abstract. In this paper we consider the overdetermined system of second order differential equations with a singular point.

The system of equations (1) consists of a hyperbolic equation and two partial differential equations of second order with a singular point. The first equation of the system (1) under certain conditions on the coefficients can be represented as a superposition of two first order differential operators. Solving this equation and substituting its value in the second and third equation to get together conditions on the coefficients and right-hand sides. On the basis of the conditions of independence from the left side of the variable y, to determine the arbitrary function $\varphi_1(x)$ we obtain the ordinary differential equation of the first order. Other arbitrary function $\psi_1(y)$ is determined from the condition that the right side of independence in appropriate, limiting transition.

Thus, we obtained representation of the diversity of solutions using two arbitrary constants and studied properties of the resulting decisions.

Key words: singular point, rectangle, variety of solutions, overdetermined system, unknown function.