www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.1
УДК 517.957+514.752
ББК 32.973.26-018.2

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТИПА МОНЖА — АМПЕРА НА ОСНОВЕ Ф-ТРИАНГУЛЯЦИИ

Владимир Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерных наук
и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru, kiem@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Михаил Игоревич Казанин

Аспирант кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
m1kaz@mail.ru, kiem@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В статье предложен геометрический метод конструкции кусочно-линейных решений дискретного аналога уравнения вида

$$u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - u^2_{x_1x_2} = F(u_{x_1}, u_{x_2})\varphi(x_1, x_2).$$

Идея метода основана на использовании подхода, предложенного А.Д. Александровым для доказательства существования классического решения приведенного выше уравнения. Отметим, что геометрическим аналогом решаемой задачи в статье является задача А.Д. Александрова о существовании многогранника с заданными кривизнами вершин.

Ключевые слова: выпуклая многогранная поверхность, кусочно-линейная функция, триангуляция, выпуклое множество, уравнение Монжа — Ампера.

1. Дискретный аналог уравнения Монжа — Ампера

Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{R}^2$ уравнение Монжа — Ампера вида

$$u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - u^2_{x_1x_2} = F(u_{x_1}, u_{x_2})\varphi(x_1, x_2), \tag{1}$$

где F, φ — положительные непрерывные функции. Область определения функции F есть все пространство $\mathbb{R}^2$, а $\varphi(x_1, x_2)$ определена в D. Поскольку в левой части (1) фактически записано выражение для якобиана отображения градиента функции $u(x_1, x_2)$, то, разделив обе части уравнения (1) на $F(u_{x_1}, u_{x_2})$ и интегрируя по любой подобласти $D_0 \subset\subset D$, получим интегральное равенство

$$\mu_F(D_0) \triangleq \int\limits_{D'_0} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{F(\xi_1, \xi_2)} = \int\limits_{D_0} \varphi(x_1, x_2), \tag{2}$$

где D'_0 — образ отображение градиента функции $u(x_1, x_2)$. Отметим, что в работе [6] даны некоторые параметрические семейства решений уравнения (1).

Следуя [1], запишем уравнение, аналогичное уравнению (1) для кусочно-линейных функций. Для этого предположим, что область D является областью, ограниченной выпуклым многоугольником. Тогда для кусочно-линейной функции $f : D \to \mathbb{R}$ найдется разбиение D на многоугольные области $D_1, ..., D_m$, замыкания которых пересекаются по общим сторонам и вершинам. Пусть $p_1, p_2, ..., p_N \in \bar{D}$ — все вершины этих многоугольников. Для каждой $p_i, i = \overline{1, N}$, обозначим $D_{k_1}, ..., D_{k_{n_i}}$ те многоугольники, которые имеют точку p_i в качестве вершины. В каждой области D_i функция f может быть задана в виде

$$f(x_1, x_2) = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i, \quad i = \overline{1, M}. \tag{3}$$

Построим для каждого $i = \overline{1, N}$ многоугольник M_i с вершинами $q_{k_1}, ..., q_{k_{n_i}}$, где $q_{k_j} = (a_{k_j}, b_{k_j}) j = \overline{1, n_i}$. По аналогии с равенством (2) введем величину

$$\mu_F(p_i) = \int\limits_{M_i} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{F(\xi_1, \xi_2)}. \tag{4}$$

Для заданных чисел $\varphi_{i_1}, ..., \varphi_N > 0$ систему соотношений

$$\mu_F(p_i) = \varphi_i, \quad i = \overline{1, N}, \tag{5}$$

будем называть дискретным аналогом уравнения (1). Решением уравнения (5) будем называть всякую кусочно-линейную функцию $f(x_1, x_2)$, для которой выполнены равенства (5) для точек $p_i, ..., p_N$, соответствующих разбиению области D для кусочно-линейной функции $f(x_1, x_2)$. Отметим, что соответствующая геометрическая задача о существовании выпуклых многогранников с заданными мерами кривизн вершин исследовалась в работе [5].

2. Ф-триангуляция

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ семейство Φ строго выпуклых компактных множеств с не пустой внутренностью. Пусть S — произвольный невырожденный симплекс. Определим *охватывающее* множество $B \in \Phi$ (если оно существует) из данного семейства как множество, чья граница содержит вершины симплекса (а значит, содержит весь симплекс в силу выпуклости). В общем случае таких охватывающих множеств из данного семейства Φ может быть несколько.

Определение 1. *Рассмотрим произвольную триангуляцию конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что эта триангуляция является Φ-триангуляцией, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность любого охватывающего множества B не содержит вершин других симплексов.*

Заметим, что если семейство Φ представляет собой семейство всех шаров в $\mathbb{R}^n$, то вышеприведенное определение совпадает с определением триангуляции Делоне. В работе [4] было доказано существование Φ-триангуляции конечного множества точек при условии, что семейство Φ обладает следующим свойством: для любого невырожденного симплекса S в семействе Φ существует и притом только одно охватывающее множество $B(S)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что это условие на семейство выпуклых множеств является выполненным. В таком случае охватывающее множество будем обозначать через $B(S)$.

Пример 1. Рассмотрим гладкую, строго выпуклую вниз функцию $x_{n+1} = \Psi(x)$, определенную во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и такую, что

$$\frac{\Psi(x)}{|x|} \to +\infty \text{ при } x \to \infty. \tag{6}$$

При выполнении этого условия пересечение графика функции $\Psi(x)$ с произвольной не вертикальной плоскостью Π представляет собой выпуклую компактную $(n-1)$-мерную поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим для любых $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$

$$\Phi_\Psi(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \Psi(y) \leq \Psi(x) + \langle \nabla\Psi(x), y - x\rangle + r^2\}.$$

В силу свойства (6) и выпуклости $\Psi(x)$ множества $\Phi_\Psi(x,r)$ образуют семейство выпуклых компактных множеств. В работе [4] было показано, что для всякого невырожденного симплекса S можно построить единственное охватывающее множество из этого семейства. Геометрически это множество совпадает с проекцией компактной части графика функции $\Psi(x)$, срезаемой подходящей плоскостью. Триангуляции, соответствующие такого рода семействам выпуклых множеств, называются регулярными триангуляциями [2; 3]. Совпадает ли класс всех Φ-триангуляций с классом регулярных триангуляций, автору не известно. Классическая триангуляция Делоне получается, если в качестве функции $\Psi(x)$ взять функцию $\Psi(x) = |x|^2$. Это следует из того, что неравенство

$$|y|^2 \leq |x|^2 + 2\langle x, y - x\rangle + r^2$$

эквивалентно неравенству

$$|y - x|^2 \leq r^2,$$

которое задает шар с центром в точке x и радиуса r.

Пример 2. Для строго выпуклой функции $\Psi(x)$ можно также построить и такое семейство

$$C_\Psi(x,r) = \{y : \Psi(y) + \langle \nabla\Psi(y), x - y\rangle \geq r\}, \tag{7}$$

для всякого $r < \Psi(x)$. Геометрически это множество есть проекция точек графика функции $\Psi(x)$, видимых из точки (x, r). Из строгой выпуклости функции $\Psi(x)$ следует, что $C_\Psi(x, r)$ — выпуклое множество. Как и в примере 1, несложно показать, что для каждого семейства так же выполнено свойство существования и единственности охватывающего множества для всякого треугольника. Заметим, что как и в этом случае, классическая триангуляция Делоне получается, если $\Psi(x) = |x|^2$. Это следует из того, что неравенство

$$|y|^2 + 2\langle y, x - y\rangle \geq r$$

эквивалентно неравенству

$$|y - x|^2 \leq |x|^2 - r, \quad r < |x|^2,$$

которое задает шар с центром в точке x и радиуса $\sqrt{|x|^2 - r}$.

Введем обозначение $x = G(\xi)$ для отображения, обратного к отображению

$$\xi = \nabla\Psi(x).$$

В силу строгой выпуклости функции Ψ это отображение однозначно определено.

3. Основной результат

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть T — триангуляция множества точек $\eta_1, ..., \eta_M \in \mathbb{R}^2$ с треугольниками $\Delta_1, ..., \Delta_N$ такими, что $\mu_F(\Delta_i) = \varphi_i, i = 1, ..., N$. Положим $\xi_i = G(\eta_i)$ и если триангуляция T' множества точек $\{\xi_i\}$, соответствующая триангуляции T, является Φ-триангуляцией для семейства вида (7), то найдется кусочно-линейная функция, удовлетворяющая равенствам (5).*

Доказательство. Построим функцию, как результат преобразования типа преобразования Лежандра

$$f(x) = \min_{i=\overline{1,M}} \{\Psi(\xi_i) + \langle\nabla\Psi(\xi_i), x - \xi_i\rangle\}. \tag{8}$$

Ясно, что $f(x)$ — кусочно-линейная функция. Покажем, что для этой функции выполняется (5). Для каждого треугольника $\Delta_1, ..., \Delta_N$ существует единственное его охватывающее множество $B(\Delta_i) = C_\Psi(p_i, r_i)$ для некоторых $p_i \in \mathbb{R}^2$ и $r_i < \Psi(p_i)$. Поскольку T' является Φ-триангуляцией множества точек $\xi_i, i = 1, ..., M$, то $C_\psi(p_i, r_i)$ не содержит внутри точек $\xi_1, ..., \xi_M$. Это значит, что имеют место неравенства

$$\Psi(\xi_j) + \langle\nabla\Psi(\xi_i), p_i - \xi_i\rangle \leq r_i, \quad i = 1, ..., N. \tag{9}$$

Поскольку каждое $C_\Psi(p_i, r_i)$ на границе содержит вершины треугольника Δ_i, то в (9) для каждой точки p_i для трех векторов ξ_j имеет место равенство. Тогда, учитывая (8), получаем, что $f(p_i) = r_i, \ i = \overline{1, N}$. Определим для каждого $k = \overline{1, N}$ многоугольник

$$M_k = \cap_l \Pi_l^k, \tag{10}$$

где Π_l^k — полуплоскость, определяемая неравенством

$$\Psi(\xi_l) + \langle\nabla\Psi(\xi_l), x - \xi_l\rangle > \Psi(\xi_k) + \langle\nabla\Psi(\xi_k), x - \xi_k\rangle\,,$$

а номера l в (10) берутся только те, которые определяют ребро $\xi_k\xi_l$ триангуляции T'.

Ясно, что по построению M_k — выпуклый многоугольник, причем его вершины — это некоторые точки из набора $p_1, ..., p_N$. Более того, для каждой точки p_i ровно три многоугольника M_k имеют p_i в качестве вершины. Этот многоугольник задает область определения функции вида (3) для кусочно-линейной функции $f(x_1, x_2)$. Несложно видеть, что в каждом этом многоугольнике M_k имеет место равенство

$$\nabla f(x) = \nabla\Psi(\xi_k) = \eta_k.$$

Рассмотрим точку p_i и пусть M_j, M_k, M_l — многоугольники, имеющие p_i в качестве вершины. Этим трем многоугольникам соответствуют точки η_j, η_k, η_l, образующие треугольник Δ_i триангуляции T. Это значит, что

$$\mu_F(p_i) = \mu_F(\Delta_i) = \varphi_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Тем самым теорема доказана.

Как следствие доказанной теоремы, мы получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть T — классическая триангуляция Делоне множества точек $\eta_1, ..., \eta_M \in \mathbb{R}^2$ с треугольниками $\Delta_1, ..., \Delta_N$ такими, что $\mu_F(\Delta_i) = \varphi_i, i = 1, ..., N$. Тогда найдется кусочно-линейная функция, удовлетворяющая равенствам (5). При этом требуемое решение $f(x)$ определяется равенством*

$$f(x) = \min_{i=\overline{1,M}} \left\{ \frac{1}{4}|\eta_i|^2 + \left\langle \eta_i, x - \frac{1}{2}\eta_i \right\rangle \right\}.$$

Доказательство. Как было указано выше, классическая триангуляция для множеств вида (7) соответствует случаю $\Psi(x) = |x|^2$. Поэтому $\nabla\Psi(x) = 2x$ и $G(\xi) = \frac{1}{2}\xi$. Подставляя эти значения в (8), приходим к требуемому.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А. Д. Задача Дирихле для уравнения $Det||z_{ij}|| = \varphi(z_1, ..., z_n, z, x_1, ..., x_n)$. I / А. Д. Александров // Вестн. ЛГУ. Сер.: Математика, механика и астрономия. — 1958. — Т. 1, № 1. — С. 5–24.

2. Гельфанд, И. М. Дискриминанты многочленов от многих переменных и триангуляции многогранников Ньютона / И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов // Алгебра и анализ. — 1990. — Т. 2, № 3. — С. 1–62.

3. Гельфанд, И.М. Уравнения гипергеометрического типа и торические многообразия / И.М. Гельфанд, А.В. Зелевинский, М.М. Капранов // Функцион. анализ и его прил. — 1989. — Т. 23, № 2. — С. 12–26.

4. Клячин, В.А. Алгоритм триангуляции, основанный на условии пустого выпуклого множества / В. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2015. — Т. 28, № 3. — С. 27–33.

5. Клячин, В.А. О разрешимости дискретного аналога многомерной задачи Минковского — Александрова / В.А. Клячин // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, № 3. — С. 281–288.

6. Шабловский, О. Н. Параметрические решения уравнения Монжа — Ампера и течения газа с переменной энтропией / О.Н. Шабловский // Вестн. Том. гос. ун-та. Мат. и механика. — 2015. — Т. 1, № 33. — С. 105–118.

REFERENCES

1. Aleksandrov A.D. Zadacha Dirikhle dlya uravneniya $Det||z_{ij}|| = \varphi(z_1, ..., z_n, z, x_1, ..., x_n)$. I [The Dirichlet Problem for the Equation $Det||z_ij|| = \varphi(Z_1, ..., z_n, z, x_1, ..., x_n)$. I]. *Vestn. LGU. Ser.: Matematika, mekhanika i astronomiya*, 1958, vol. 1, no. 1, pp. 5-24.

2. Gelfand I.M., Zelevinskiy A.V., Kapranov M.M. Diskriminanty mnogochlenov ot mnogikh peremennykh i triangulyatsii mnogogrannikov Nyutona [Discriminants of Polynomials in Several Variables and Triangulations of Newton Polyhedra]. *Algebra i analiz* [Leningrad Mathematical Journal], 1990, vol. 2, no. 3, pp. 1-62.

3. Gelfand I.M., Zelevinskiy A.V., Kapranov M.M. Uravneniya gipergeometricheskogo tipa i toricheskie mnogoobraziya [Hypergeometric Functions and Toral Manifolds]. *Funktsion. analiz i ego pril.* [Functional Analysis and Its Applications], 1989, vol. 23, no. 2, pp. 12-26.

4. Klyachin V.A. Algoritm triangulyatsii, osnovannyy na uslovii pustogo vypuklogo mnozhestva [Triangulation Algorithm Based on Empty Convex Set Condition]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2015, vol. 28, no. 3, pp. 27-33.

5. Klyachin V.A. O razreshimosti diskretnogo analoga mnogomernoy zadachi Minkovskogo — Alexanderova [On the Solvability of the Discrete Analogue of the Minkowski — Alexandrov Problem]. *Izv. Sarat. un-ta. Novaya ser. Ser.: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 281-288.

6. Shablovskiy O.N. Parametricheskie resheniya uravneniya Monzha — Ampera i techeniya gaza s peremennoy entropiey [Parametric Solutions for the Monge — Ampere Equation and Gas Flow with Variable Entropy]. *Vestn. Tom. gos. un-ta. Mat. i mekhanika*, 2015, vol. 1, no. 33, pp. 105-118.

CONSTRUCTION OF THE SOLUTIONS OF THE MONGE — AMPERE TYPE EQUATION BASED ON Ф-TRIANGULATION

Vladimir Aleksandrovich Klyachin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Computer Science and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru, kiem@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Mikhail Igorevich Kazanin

Postgraduate Student, Department of Computer Science
and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
m1kaz@mail.ru, kiem@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In the article we considered the method of geometric construction of piecewise linear analog solutions discrete form of the equation

$$u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - u^2_{x_1x_2} = F(u_{x_1}, u_{x_2})\varphi(x_1, x_2).$$

The idea of the method is based on the approach suggested by A.D. Aleksandrov to prove the existence of a classical solution of the above equation. Note that the

geometric analog of the problem being solved in this article is the problem of A.D. Aleksandrov on the existence of a polyhedron with prescribed curvatures of vertices. For piecewise linear convex function we defined curvature mesuare $\mu(p_i)$ of vertex p_i in terms of function $F(\xi_1, \xi_2)$. The solution is defined as piecewise linear convex function with prescribed values $\mu(p_i) = \varphi_i, i = 1, ..., N$. The relation Φ-triangulations of given set of points $\xi_i, i = 1, ..., M$ with piecewise linear solutions is obtained. The construction of solution is based on analog of Legendre transformation of kind

$$f(x) = \min_{i=\overline{1,M}} \{\Psi(\xi_i) + \langle \nabla\Psi(\xi_i), x - \xi_i \rangle\}.$$

As a corollary we proved the following result.

Theorem 2. *Let T — classical Delaunay triangulation of a set of points $\eta_1, ..., \eta_M \in \mathbb{R}^2$ with triangles $\Delta_1, ..., \Delta_N$ such that $\mu_F(\Delta_i) = \varphi_i, i = 1, ..., N$. Then there is a piecewise linear function satisfying the equations*

$$\mu(p_i) = \varphi_i, i = 1, ..., N.$$

Morever, the required solution $f(x)$ defined by

$$f(x) = \min_{i=\overline{1,M}} \left\{ \frac{1}{4}|\eta_i|^2 + \left\langle \eta_i, x - \frac{1}{2}\eta_i \right\rangle \right\}.$$

Key words: convex polygonal surface, piecewise linear function, triangulation, convex set, Monge — Ampere equation.