DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.3

УДК 517.9
ББК 22.161

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Анна Александровна Рыжкова

Аспирант кафедры нелинейных колебаний,
Воронежский государственный университет
a.r.ryzhkova@gmail.com
Университетская площадь, 1, 394036 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. Введен в рассмотрение класс почти периодических на бесконечности последовательностей. Необходимость рассмотрения таких последовательностей связана с тем, что они возникают при рассмотрении разностных уравнений. Основные результаты статьи связаны с доказательством почти периодичности на бесконечности решений разностных уравнений.

Ключевые слова: периодические на бесконечности последовательности, разностные уравнения, собственные значения, спектральное разложение, проекторы.

Введение

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел и X — комплексное банахово пространство. Символом $\operatorname{End} X$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в X. Через $l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}, X)$ обозначим банахово пространство ограниченных последовательностей $x : \mathbb{Z} \to X$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|$.

Через $c_0 = c_0(\mathbb{Z}, X)$ обозначим (замкнутое) подпространство последовательностей из $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, убывающих на бесконечности, то есть выполняется равенство $\lim\limits_{|n|\to\infty} \|x(n)\| = 0$.

В пространстве $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$ рассмотрим операторы сдвига $S(n) : l^\infty \to l^\infty$, $(Sx)(k) = x(k+n)$, $k \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l^\infty$.

Используемая далее терминология для равномерно непрерывных последовательностей, определенных на $\mathbb{Z}$, имеется в статьях [2–5; 8; 9].

Определение 1. *Последовательность $x \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если $S(1)x - x \in c_0(\mathbb{Z}, X)$, то есть $\lim\limits_{|n|\to\infty} \|x(n+1) - x(n))\| = 0$.*

Определение 2. *Последовательность x из $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$ называется периодической на бесконечности периода $N \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$, если $S(N)x - x \in c_0$.*

Примером медленно меняющейся на бесконечности последовательности является последовательность $x(n) = \sin(\ln(\alpha + n))$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\alpha > 0$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности последовательностей образуют замкнутое подпространство из $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, которое обозначим символом $l^\infty_{sl,\infty}$. Множество периодических на бесконечности последовательностей периода N образуют замкнутое подпространство из l^∞, которое обозначается через $l^\infty_{N,\infty}(\mathbb{Z}, X)$. Отметим, что $c_0 \subset l^\infty_{sl,\infty}(\mathbb{Z}, X) \subset l^\infty_{N,\infty}(\mathbb{Z}, X)$ при любом $N \geq 1$.

Пусть $\gamma_k = e^{\frac{i2\pi k}{N}}$, $0 \leq k \leq N-1$, — корни из единицы. Отметим, что они образуют группу, обозначаемую далее через G_N.

В статье доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Каждая периодическая на бесконечности последовательность $x \in \in l^\infty_{N,\infty}(\mathbb{Z}, X)$ периода $N \geq 1$ допускает представление вида*

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(n)\gamma_k^n, n \in \mathbb{Z}, \qquad x_k \in l^\infty_{sl,\infty}.$$

В банаховом пространстве $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, где X — конечномерное банахово пространство, рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+N) = Bx(n) + y(n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $y \in c_0(\mathbb{Z}, X), B \in \operatorname{End} X$ со свойством $\sigma_0 = \sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2 ..., \gamma_m\}$ — совокупность простых собственных значений, где $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ и $\sigma(B)$ обозначает спектр оператора B.

Теорема 2. *Каждое ограниченное решение $x : \mathbb{Z} \to X$ уравнения (1) является периодической на бесконечности последовательностью, которая допускает представление вида*

$$x(n) = \sum_{k=1}^{N} x_k(n)\gamma_k^n,$$

где $x_k \in l^\infty_{sl,\infty}$, $\gamma_k \in \mathbb{T}$, $0 \leq k \leq N-1$.

1. О спектральном разложении оператора S

Рассмотрим оператор $S \in \operatorname{End} X$, удовлетворяющий условию $S^N = I$.

Отметим некоторые свойства спектра таких операторов.

Лемма 1. *Оператор S обратим и $r(S) = r(S^{-1}) = 1$, где $r(S)$, $r(S^{-1})$ — спектральный радиус оператора S и S^{-1} соответственно. Кроме того, $S^{-N} = I$.*

Доказательство. Из равенств $S^N = S^{N-1}S = SS^{N-1} = I$ следует, что оператор S обратим и S^{N-1} является обратным для S.

Из формулы Гельфанда [1; 6; 7] для спектрального радиуса оператора следует, что $r(S) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| S^n \|} = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[mN]{\| S^{mN} \|} = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[mN]{\| I \|} = 1.$

Поскольку $S^{-N}S^N = S^{-N} = I$, то, по доказанному, $r(S^{-1}) = 1$.

Лемма 2. *Имеет место включение*

$$\sigma(S) \subset \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda| > 1$. Тогда $S - \lambda I = \lambda(I - \frac{1}{\lambda}S)$. Поскольку $\|\frac{1}{\lambda}S\| = \frac{1}{|\lambda|}\|S\| = \frac{1}{|\lambda|} < 1$, то оператор $I - \frac{1}{\lambda}S$ обратим, и тогда

$$(S - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^n}S^n.$$

Сходимость ряда вытекает из критерия Коши сходимости рядов, леммы 1 и равенства: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|\lambda|^n}\|S^n\|} = \frac{1}{|\lambda|} < 1$.

Представим число $n \in \mathbb{N}$ в виде $n = kN + p$, где $0 \le p \le N - 1$. Тогда

$$(S - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{N-1}\frac{1}{\lambda^{kN+p}}S^{kN+p} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{kN}}\sum_{p=0}^{N-1}\frac{1}{\lambda^p}S^p = \varphi(\lambda)S_N,$$

где $\varphi : \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\} \to \mathbb{C}$, $\varphi(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{kN}} = -\frac{\lambda^{N-1}}{\lambda^N - 1}$ — функция, не зависящая от p, и оператор S_N, определяющийся равенством $S_N = \sum\limits_{p=0}^{N-1}\frac{1}{\lambda^p}S^p$.

Итак, $\lambda \notin \sigma(S)$.

Пусть теперь $|\lambda| > 1$. Из представления

$$S - \lambda I = S(I - \lambda S^{-1}) = \lambda S(\frac{1}{\lambda}I - S^{-1})$$

следует, что оператор $S - \lambda I$ является произведением обратимого оператора S и оператора $\frac{1}{\lambda}I - S^{-1}$, который обратим. Свойство обратимости следует из доказанного, если вместо оператора S рассмотреть оператор S^{-1}. При этом учитывается, что $(S^{-1})^N = (S^N)^{-1} = I$.

Лемма 3. *Имеет место включение* $\sigma(S) \subset G_N = \sqrt[n]{1}$.

Доказательство. Пусть вначале $\lambda_0 \in \sigma(S)$ — собственное значение оператора S и пусть $x_0 \ne 0$ — соответствующий ему собственный вектор, то есть $Sx_0 = \lambda_0 x_0$. Следовательно, верны равенства

$$S^N S x_0 = \lambda_0 S^N x_0 = \lambda_0 x_0,$$
$$\lambda_0^{N+1}x_0 = \lambda_0 x_0 \Rightarrow \lambda_0^N = 1.$$

В общем случае используем равенство $\sigma(S^N) = \{\lambda^N : \lambda \in \sigma(S)\} = \{1\}$. Следовательно, $\lambda^N = 1$ для любого $\lambda \in \sigma(S)$, то есть $\sigma(S) \subset G_N$.

Рассмотрим теперь вопрос о спектральном разложении оператора $S \in \operatorname{End} X$, удовлетворяющего условию $S^N = I$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Пусть для оператора $S \in \operatorname{End} X$, где X — банахово пространство, выполнено равенство $S^N = I$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда оператор S можно представить в следующем виде*

$$S = P_0 + e^{i\frac{2\pi}{N}} P_1 + e^{i\frac{4\pi}{N}} P_2 + \ldots + e^{i\frac{2\pi(N-1)}{N}} P_{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi k}{N}} P_k,$$

где $P_0 = \frac{I+S+S^2+\ldots+S^{N-1}}{N}$, $P_m = \frac{I+(e^{\frac{2\pi m}{N}})^{-1}S+\ldots+(e^{\frac{2\pi m}{N}})^{-(N-1)}S^{N-1}}{N} = \frac{1}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1}(e^{\frac{2\pi m}{N}})^{-j}S^j$, $1 \leq$ $\leq m \leq N-1$. *При этом имеют место следующие свойства:*

(1) $I = P_0 + P_1 + \ldots + P_{N-1}$ *(разложение единицы);*

(2) $P_i^2 = P_i$, $0 \leq m \leq N-1$ *(то есть P_i — проекторы);*

(3) $P_i P_j = 0$ *для* $i \neq j$ *(то есть проекторы дизъюнктны);*

(4) $SP_k = P_k S = \gamma_k P_k$ *(образ $\operatorname{Im} P_k$ каждого проектора P_k, $0 \leq k \leq N-1$, есть собственное подпространство оператора S, отвечающего собственному значению γ_k.*

Доказательство. Представление проекторов в условии теоремы можно получить из интерполяционной формулы Лагранжа. Из этой формулы мы получим, что $P_0 = \frac{I+S+S^2+\ldots+S^{N-1}}{N}$. Чтобы получить разложение проектора P_1, рассмотрим оператор $S_1 = \gamma_1^{-1}S$. Тогда оператору S_1 будут отвечать следующие корни из единицы γ_1^{-1}, 1, γ_1, ... , γ_{N-2}. Тогда из интерполяционной формулы Лагранжа мы получим, что $P_1 = \frac{I+S_1+S_1^2+\ldots+S_1^{N-1}}{N} = \frac{I+\gamma_1^{-1}S+\gamma_1^{-2}S^2+\ldots+\gamma_1^{-(N-1)}S^{N-1}}{N}$. Аналогичным образом строятся проекторы P_2, ..., P_{N-1}.

Покажем, что операторы P_k, $0 \leq k \leq N-1$, — искомые операторы. Справедливы равенства:

$$P_k P_k = \frac{NI + N(e^{\frac{2\pi k}{N}})^{-1}S + \ldots + N(e^{\frac{2\pi k}{N}})^{-(N-1)}S^{N-1}}{N^2} = \\ = \frac{I + (e^{\frac{2\pi k}{N}})^{-1}S + \ldots + (e^{\frac{2\pi k}{N}})^{-(N-1)}S^{N-1}}{N} = P_k,$$

то есть операторы P_k являются проекторами, и

$$SP_k = P_k S = \frac{S + (e^{\frac{2\pi k}{N}})^{-1}S^2 + \ldots + (e^{\frac{2\pi k}{N}})^{-(N-2)}S^{N-1} + (e^{\frac{2\pi k}{N}})^{-(N-1)}I}{N} = e^{\frac{2\pi k}{N}} P_k,$$

то есть оператор S и проекторы P_k перестановочны.

Теперь докажем, что $P_k P_m = 0$, $k \neq m$. Воспользуемся перестановочностью оператора S с проекторами P_k и P_m и свойством ассоциативности суперпозиции:

$$(SP_k)P_m = P_k(SP_m),$$

$$e^{\frac{2\pi k}{N}} P_k P_m = P_k(e^{\frac{2\pi m}{N}} P_m),$$

$$(e^{\frac{2\pi k}{N}} - e^{\frac{2\pi m}{N}}) P_k P_m = 0.$$

В силу того, что $e^{\frac{2\pi k}{N}}$ и $e^{\frac{2\pi m}{N}}$ — различные корни из единицы, то $P_k P_m = 0$.

Рассмотрим теперь сумму

$$P_0 + P_1 + P_2 + ... + P_{N-1} = \frac{NI + (\sum\limits_{k=0}^{N-1}\gamma_k^{-1})S + (\sum\limits_{k=0}^{N-1}\gamma_k^{-2})S^2 + ... + (\sum\limits_{k=0}^{N-1}\gamma_k^{-(N-1)})S^{N-1}}{N}.$$

Каждая сумма $\sum\limits_{k=0}^{N-1}\gamma_k^p$ равна нулю, $-(N-1) \le p \le -1$, так как представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом прогрессии $b_1 = 1$ и знаменателем прогрессии $q = e^{i\frac{2\pi p}{N}}$. Поэтому верно равенство $\sum\limits_{k=0}^{N-1}\gamma_k^p = \frac{1-(e^{i\frac{2\pi p}{N}})^N}{1-e^{i\frac{2\pi p}{N}}} = 0$. Таким образом, $I = \sum\limits_{k=0}^{N-1} P_k$.

Применим к этому равенству оператор S. Получим требуемое спектральное разложение

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} SP_k = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi k}{N}} P_k.$$

2. Доказательство теоремы 1

Последовательность $x : \mathbb{Z} \to X$ называется периодической периода $N \in \mathbb{N}$, если имеют место равенства $x(n+N) = x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что множество периодических периода N последовательностей образуют замкнутое подмножество из $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, которое обозначим символом $l_N^\infty(\mathbb{Z}, X)$. Непосредственно из определения следует, что оператор сдвига $S(1) \in Endl_N^\infty$ обладает свойством $S(1)^N = S(N) = I$. Тогда для элементов множества $l_N^\infty(\mathbb{Z}, X)$ будет иметь место следующая лемма.

Лемма 4. *Каждая периодическая последовательность $x \in l_N^\infty$ периода $N \ge 2$ допускает представление вида $x(n) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} x_k\gamma_k^n$, где $n \in \mathbb{Z}$, $x_k \in X$ и определяются равенством $x_k = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=0}^{N-1}\gamma_k^{-i}x(i)$, $0 \le k \le N-1$.*

Доказательство. В силу теоремы 3 оператор левого сдвига $S(1)$ можно представить в следующем виде $S(1) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\gamma_k P_k$, где $P_k = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=0}^{N-1}\gamma_k^{-i}S^i$ — проекторы. Также будут верными следующие равенства $S^n(1) = S(n) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\gamma_k^n P_k$, для любого $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому для любых m, $n \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$x(n+m) = (S^n(1)x)(m) = (S(n)x)(m) = (\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k^n P_k x)(m) = \sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k^n (P_k x)(m).$$

Чтобы получить искомое разложение, нужно взять $m = 0$. Таким образом,

$$x_k = (P_k x)(0) = (\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\gamma_k^{-i}S^i(1)x)(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\gamma_k^{-i}(S^i(1)x)(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\gamma_k^{-i}x(i).$$

Пусть X_0 — замкнутое подпространство из банахова пространства X. Для элементов пространства X определим следующее отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in X_0$.

Обозначим через $\widetilde{x}$ (или $x + X_0$) множество $\{y \in X : y - x \in X_0\}$. Его называют *классом эквивалентности*, содержащим x: Классы эквивалентности являются элементами векторного пространства X/X_0, называемого *фактор-пространством* пространства X по подпространству X_0. В данном пространстве сложение элементов и умножение их на скаляры определяются следующими формулами

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x + y}, \quad \alpha\widetilde{x} = \widetilde{\alpha x}.$$

Фактор-пространство X/X_0 является банаховым пространством с нормой

$$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y \in X_0} \|x + y\|, \quad x, y \in X, \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Введем фактор-отображение, то есть отображение, действующее по правилу $x \mapsto x + X_0 : X \to X/X_0$. Введем норму на X/X_0 таким образом, чтобы данное отображение было ограничено. Так как по определению X_0 замкнуто в X, то на X/X_0 для каждого $x \in X$ положим

$$\|\widetilde{x}\| = \|x + X_0\| = \inf_{y \in X_0} \|x + y\| = \inf_{z \in \widetilde{x}} \|z\|.$$

Заменяя в формуле y на $-y$, видим, что величина $\|x + X_0\|$ равна расстоянию от x до X_0.

Пусть I — замкнутый идеал из банаховой алгебры A. Тогда фактор-пространство $A = I$ является банаховой алгеброй, если в ней операцию умножения ввести следующим образом

$$\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy}, \quad x, y \in A.$$

В этом случае алгебра $A = I$ называется фактор-алгеброй.

Приступим к доказательству теоремы 1.

Непосредственно из определения ограниченной на бесконечности последовательности периода N следует, что $c_0 \subset l^\infty_{N,\infty} = l^\infty_{N,\infty}(\mathbb{Z}, X)$.

Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X}_N = l^\infty_{N,\infty}(\mathbb{Z}, X)/c_0(\mathbb{Z}, X)$ и фактор-оператор $\widetilde{S(1)} \in \operatorname{End} \mathcal{X}_N$, определенный равенством $\widetilde{S(1)}\widetilde{x} = \widetilde{S(1)x} = S(1)x + c_0$. Непосредственно из определения $\widetilde{S(1)}$ следует, что

$$\widetilde{S(1)}^N \widetilde{x} = \widetilde{S(N)x} = \widetilde{x},$$

для любого $\widetilde{x} \in l^\infty_{N,\infty}$. А также

$$\widetilde{S}(k)\widetilde{x} = \widetilde{S(k)x} = S(k)x + c_0 = S(1)^k x + c_0,$$

где $x \in l^\infty$.

Таким образом, $\widetilde{S(1)}^N = \widetilde{I}$ — тождественный оператор в банаховом пространстве $l^\infty_{N,\infty}(\mathbb{Z}, X)/c_0(\mathbb{Z}, X)$. Поэтому к нему применимы результаты раздела 1.

Представим оператор $\widetilde{I}$ в виде

$$\tilde{I} = \widetilde{P}_0 + \widetilde{P}_1 + ... + \widetilde{P}_{N-1} = \sum_{j=0}^{N-1} \widetilde{P}_j,$$

где $\widetilde{P}_j = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=0}^{N-1} \gamma_j^{-i} \widetilde{S(1)}^i$, $0 \le j \le N-1$ являются проекторами. Однако $\widetilde{P_j}\widetilde{x} = \widetilde{P_j x}$, $j = 0, ..., N-1$

Также введем в рассмотрение операторы $P_j = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=0}^{N-1} \gamma_j^{-i} S(1)^i$, $0 \le j \le N-1$. Отметим, что так построенные операторы P_j не обязательно являются проекторами.

Справедливы следующие равенства

$$\widetilde{x} = \widetilde{I}\widetilde{x} = (\sum_{j=0}^{N-1} \widetilde{P}_j)\widetilde{x} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_j^{-i} \widetilde{S(1)}^i \widetilde{x} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_j^{-i} S(1)^i x + c_0 = \sum_{j=0}^{N-1} P_j x + c_0,$$

для любого $x \in l^{\infty}_{N,\infty}$.

Значит, существует такая последовательность $y_0 \in c_0$, что $x = \sum\limits_{j=0}^{N-1} P_j x + y_0$. Представим последовательность x в виде $x(n) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} \gamma_j^n (\gamma_j^{-n} (P_j x)(n)) + y_0(n)$. Положим $x_j(n) = \gamma_j^{-n} (P_j x)(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Покажем, что $x_j \in l^{\infty}_{sl,\infty}$, $0 \le j \le N-1$, то есть нужно доказать, что $(S(1)x_j - x_j) \in c_0$. Верны равенства

$$(S(1)x_j - x_j)(n) = x_j(n+1) - x_j(n) = \gamma_j^{-n-1} (\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_j^{-i} (S(1)^i x)(n+1)) -$$

$$- \gamma_j^{-n} (\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_j^{-i} (S(1)^i x)(n)) = \frac{1}{N} \gamma_j^{-n} (\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_j^{-(i+1)} x(n+i+1) - \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_j^{-i} x(n+i)) =$$

$$= \frac{1}{N} \gamma_j^{-n} (\gamma_j^{-N} x(n+N) - x(n)) = \frac{1}{N} \gamma_j^{-n} (x(n+N) - x(n)).$$

Последняя часть равенства стремится к нулю при $n \to \infty$ для любого j, так как $x \in$ $\in l^{\infty}_{N,\infty}$.

Таким образом, получили следующее представление последовательности $x \in l^{\infty}_{N,\infty}$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(n) \gamma_k^n,$$

где $x_k \in l^{\infty}_{sl,\infty}$, $0 \le k \le N-1$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Спектр оператора B представим в виде:

$$\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{in} \cup \sigma_{out},$$

где $\sigma_0 = \sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m\}$ — совокупность собственных значений, лежащих на окружности; $\sigma_{in} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda_j| < 1\}$ — совокупность собственных значений, лежащих внутри окружности $\mathbb{T}$; $\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\mu_j| > 1\}$ — совокупность собственных значений, лежащих вне окружности. В соответствии с этим разбиением спектра рассмотрим проекторы $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_{in}$, $\mathcal{P}_{out}$, которые соответственно построены по спектральным множествам $\sigma_0, \sigma_{in}, \sigma_{out}$. Таким образом, $I = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{in} + \mathcal{P}_{out}$. Эти проекторы индуцируют разложение $X = X_0 \oplus X_{in} \oplus X_{out}$ пространства X, где $X_0 = \operatorname{Im}\mathcal{P}_0, X_{in} = \operatorname{Im}\mathcal{P}_{in}, X_{out} = \operatorname{Im}\mathcal{P}_{out}$. Эти подпространства являются инвариантными для оператора B, и пусть $B_0 = B|X_0, B_{in} = B|X_{in}, B_{out} = B|X_{out}$. Таким образом, $B = B_0 \oplus B_{in} \oplus B_{out}$ относительно построенного разложения пространства X. К обеим частям уравнения (1) применим проектор $\mathcal{P}_{in}$, и тогда получим последовательность $x_{in} = \mathcal{P}_{in}x$, удовлетворяющую равенству

$$S(N)x_{in}(n) = B_{in}x_{in}(n) + y_{in}(n), \tag{2}$$

$y_{in} = \mathcal{P}_{in}y \in c_0$.

Из (2) следует, что

$$(I - B_{in}S(-N))x_{in} = S(-N)y_{in}. \tag{3}$$

Поскольку $\|S(-N)\| = 1$, $B_{in}S(-N)x_{in}(n) = S(-N)B_{in}x_{in}$, $n \in \mathbb{Z}$, и спектральный радиус $r(B_{in})$ оператора B_{in} меньше единицы, то оператор $I - B_{in}S(-N)$ обратим и из (3) получаем, что $x_{in} = (I - B_{in}S(-N))^{-1}S(-N)y_{in} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_{in}^n S(-N(n+1))y_{in}$. Ясно, что $x_{in} \in c_0(\mathbb{Z}, X)$. Аналогичный результат получим при применении проектора $\mathcal{P}_{out}$ к уравнению (1):

$$(S(N)x_{out})(n) = B_{out}x_{out}(n) + y_{out}(n), \quad y_{out} = \mathcal{P}_{out}y \in c_0. \tag{4}$$

Оператор B_{out} обратим, и $\sigma(B_{out}^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda_j}, \lambda_j \in \sigma_{out}\}$, то есть его спектральный радиус меньше единицы. Используя перестановочность оператора S_N с B_{out} из (4), получим равенства

$$S(N)B_{out}^{-1}x_{out}(n) = x_{out}(n) + B_{out}^{-1}y_{out}(n)n \in \mathbb{Z},$$

или

$$(I - S(N)B_{out}^{-1})x_{out}(n) = -B_{out}^{-1}y_{out}(n), n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$x_{out}(n) = -(I - S(N)B_{out}^{-1})^{-1}B_{out}^{-1}y_{out}(n) = -\sum_{n=0}^{\infty}(B_{out}^{-1}S(N))^k B_{out}^{-1}y_{out}, y_{out} \in c_0.$$

Из этой формулы следует, что $x_{out} \in c_0(\mathbb{Z}, X)$. Проектор P_0 можно представить в виде

$$P_0 = P_1 + ... + P_N,$$

где P_k — проектор, и $AP_k = \gamma_k P_k$, где $\mid \gamma_k \mid= 1$, $1 \leq k \leq N$. Ввиду предполагаемой простоты собственных значений число γ_k представимо в виде $\gamma_k = e^{i\lambda_k}$, $1 \leq k \leq N$. Применим проектор P_0 к разностному уравнению (1) и далее применим проектор P_k

$$P_k x_0(n+1) = P_k B_0 x_0(n) + P_k y_0(n),$$

где $x_0 = P_0 x_n$, $x_k(n) = P_k x_0(n), k = \overline{1,N}$.

Следовательно, $x_k(n+1) = \gamma_k x_k(n) + y_k(n)$, где $x_k(n) = P_k x_0(n)$, $k = \overline{1,N}, n \in \mathbb{Z}$. Сделав замену $x_k(n) = \gamma_k^{-n} x_k(n), n \in \mathbb{Z}$, получим

$$\widetilde{x}_k(n+1) = \widetilde{x_k}(n) + \widetilde{y}_k(n),\ n \in \mathbb{Z},$$

где $\widetilde{x_k}$ — медленно меняющаяся последовательность, а $x_k(n)$ отличается от $\widetilde{x_k}(n)$ по формуле (1) на множитель γ_k^n, где γ_k — корень из единицы. Поскольку $\widetilde{y_k} \in c_0$ и $S(1)\widetilde{x_k} - \widetilde{x_k} \in c_0$, следовательно $\widetilde{x_k}$, где $1 \leq k \leq m$ — медленно меняющаяся на бесконечности последовательность. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

2. Баскаков, А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве / А. Г. Баскаков // Мат. заметки. — 2015. — № 97:2. — С. 174–190. — DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm10285.

3. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // Успехи мат. наук. — 2013. — Т. 409, № 68:1. — С. 77–128. — DOI: http://dx.doi.org/10.4213/rm9505.

4. Баскаков, А. Г. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов / А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина, Д. М. Поляков // Изв. вузов. Математика. — 2014. — № 7. — С. 3–14. — DOI: http://dx.doi.org/10.3103/S1066369X14070019.

5. Баскаков, А. Г. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений / А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина // Мат. заметки. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 643–661. — DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm8963.

6. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 143 с.

7. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М. : Мир, 1975. — 444 с.

8. Рыжкова, А. А. О периодических на бесконечности функциях / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Серия: Математика. Физика. — 2014. — № 36. — С. 71–75.

9. Рыжкова, А. А. О почти периодических на бесконечности решениях разностных уравнений / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — № 15:1. — С. 45–49. — DOI: http://dx.doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-45-49.

REFERENCES

1. Baskakov A.G. *Garmonicheskiy analiz lineynykh operatorov* [Harmonic Analysis of Linear Operators]. Voronezh, Izd-vo VGU, 1987. 165 p.

2. Baskakov A.G. Garmonicheskiy i spektralnyy analiz operatorov s ogranichennymi stepenyami i ogranichennykh polugrupp operatorov na banakhovom prostranstve [Harmonic and Spectral Analysis of Operators with Limited Powers and Limited Semigroups of Operators on a Banach Space]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2015, no. 97:2, pp. 174-190. DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm10285.

3. Baskakov A.G. Issledovanie lineynykh differentsialnykh uravneniy metodami spektralnoy teorii raznostnykh operatorov i lineynykh otnosheniy [The Study of Linear Differential Equations by Methods of Spectral Theory of Differential Operators and Linear Relations]. *Uspekhi mat. nauk* [Russian Mathematical Surveys], 2013, vol. 409, no. 68:1, pp. 77-128. DOI: http://dx.doi.org/10.4213/rm9505.

4. Baskakov A.G., Kaluzhina N.S., Polyakov D.M. Medlenno menyayushchiesya na beskonechnosti polugruppy operatorov [Slowly Changing at Infinity Semigroups of Operators]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2014, no. 7, pp. 3-14. DOI: http://dx.doi.org/10.3103/S1066369X14070019.

5. Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. Teorema Berlinga dlya funktsiy s sushchestvennym spektrom iz odnorodnykh prostranstv i stabilizatsiya resheniy parabolicheskikh uravneniy [Beurling's Theorem for Functions with a Significant Range of Homogeneous Spaces and the Stabilization of Solutions of Parabolic Equations]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2012, vol. 92, no. 5, pp. 643-661. DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm8963.

6. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 143 p.

7. Rudin U. *Funktsionalnyy analiz* [Function Analysis]. Moscow, Mir Publ., 1975. 444 p.

8. Ryzhkova A.A., Trishina I.A. O periodicheskikh na beskonechnosti funktsiyakh [Periodic Functions at Infinity]. *Nauch. vedomosti Belgorod. gos. un-ta. Seriya: Matematika. Fizika*, 2014, no. 36, pp. 71-75.

9. Ryzhkova A.A., Trishina I.A. O pochti periodicheskikh na beskonechnosti resheniyakh raznostnykh uravneniy [On Almost Periodic at Infinity of Solutions of Difference Equations]. *Izv. Sarat. un-ta. Novaya ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2015, no. 15:1, pp. 45-49. DOI: http://dx.doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-45-49.

HARMONIC ANALYSIS OF PERIODIC SEQUENCES AT INFINITY

Anna Aleksandrovna Ryzhkova

Postgraduate Student, Department of Nonlinear Oscillations,
Voronezh State University
a.r.ryzhkova@gmail.com
Universitetskaya Sq., 1, 394036 Voronezh, Russian Federation

Abstract. Let X be a complex Banach space and $\operatorname{End} X$ be a Banach algebra. By $l^\infty = l^\infty(Z, X)$ we denote the Banach space of two-sided sequences of vectors in X with the norm

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|,\ X : \mathbb{Z} \to X,\ x \in l^\infty.$$

By c_0 we denote the (closed) subspace of sequences of l^∞, decreasing at infinity, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \|x(n)\| = 0$.

In the space l^∞, let us consider the group of operators $S(n) : l^\infty \to l^\infty$, $n \in \mathbb{Z}$ where $(S(n)x)(k) = x(k+n)$, $k \in \mathbb{Z}, x \in l^\infty$.

The sequence $x \in\ l^\infty$ is called *slowly varying at infinity* if $S(1)x - x \in c_0$, i.e.

$$\lim_{N\to\infty}\|x(n+1)-x(n)\|=0.$$

The sequence x of l^∞ is called *periodic at infinity period* $N\geq 1$, $N\in\mathbb{N}$, if $S(N)x-x\in c_0$.

An example of a sequence slowly varying at infinity is sequence $x(n) = \sin(\ln(\alpha+n))$, $n\in\mathbb{Z}$, where $\alpha>0$.

The set of slowly varying at infinity sequences form a closed subspace of l^∞ which is denoted by $l^\infty_{sl,\infty}$.

The set of periodic at infinity period N form a closed subspace of l^∞, which is denoted by $l^\infty_{N,\infty}$. Note that $c_0\subset l^\infty_{sl,\infty}\subset l^\infty_{N,\infty}$ for any $N\geq 1$.

Suppose that $\gamma_k = e^{\frac{i2\pi k}{N}}$, $0\leq k\leq N-1$, — the roots of unity. Note that they form a group, denoted further by G_N.

One of the main results is

Theorem 1. Each periodic at infinity sequence $x\in l^\infty$ period $N\geq 1$ representation of the form

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x_k(n)\gamma_k^n,$$

where $x_k\in l^\infty_{sl,\infty}, 0\leq k\leq N-1$.

In a Banach space $l^\infty(\mathbb{Z},X)$, where X — finite-dimensional Banach space, consider the difference equation

$$X(n+N)=Bx(n)+y(n),\ n\in\mathbb{Z}, \tag{1}$$

where $y\in c_0(\mathbb{Z},X), B\in \operatorname{End}X$ with the property $\Sigma_0=\sigma(B)\cap\mathbb{T}=\{\gamma_1,\gamma_2...,\gamma_m\}$ — set of simple eigenvalues, where $\mathbb{T}=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$ and $\sigma(B)$ denotes the spectrum of the operator B.

Theorem 2. Each bounded solution $x:\mathbb{Z}\to X$ of the equation (1) is a periodic sequence at infinity, which is a representation of the form

$$X(n)=\sum_{k=1}^{N}x_k(n)\gamma_k^n,$$

where $x_k\in l^\infty_{sl,\infty}$, $\gamma_k\in\mathbb{T}$, $0\leq k\leq$ N-1.

Key words: periodic sequences at infinity , difference equations, eigenvalues, spectral decomposition, projectors.