DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.2.2

УДК 517.951, 519.632
ББК 22.161, 22.19

ПОСТРОЕНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ МЕТОДОМ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ [1]

Алексей Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой
математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
klyachin-aa@yandex.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В настоящее время метод триангуляции широко применяется в различных вычислительных задачах. Причиной этого является то, что треугольники являются простейшими плоскими фигурами, геометрические характеристики которых достаточно легко вычисляются, и в то же время любая область и даже поверхность аппроксимируются треугольниками с необходимой точностью. Поэтому востребованной задачей является разработка алгоритмов триангуляции областей, не требующих много времени на выполнение и не затрачивающих большой объем компьютерных ресурсов. В настоящей работе мы описываем один подход к построению триангуляций произвольных плоских областей и даем оценку минимального угла треугольников при выполнении определенных геометрических условий.

Ключевые слова: триангуляция, треугольник, минимальный угол триангуляции, разбиение области, условие Липшица.

1. Алгоритм измельчения триангуляции области

Пусть задан конечный набор точек $\{P_i\}_{i=1}^m$ на плоскости $\mathbf{R}^2$. *Триангуляцией данного набора точек* называется совокупность невырожденных треугольников $\mathcal{T} = \{T_j\}_{j=1}^N$, удовлетворяющих условиям:

1) любая точка P_i является вершиной хотя бы одного треугольника T_j;

2) каждый треугольник T_j содержит только три точки из данного набора, являющиеся вершинами этого треугольника.

Через $\alpha(\mathcal{T})$ обозначим минимальный угол всех треугольников триангуляции $\mathcal{T}$. Объединение всех треугольников образует многоугольник $\Omega^* = \bigcup_{k=1}^N T_k$.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^2$. *Триангуляцией области* Ω называется триангуляция произвольного конечного набора точек, лежащего в замыкании области

Ω. Треугольник T_j будем называть граничным, если хотя бы две его вершины лежат на границе $\partial\Omega$. Остальные треугольники будем называть внутренними.

Для построения расчетной треугольной сетки нужно взять конечное число точек, лежащих в $\overline{\Omega}$, и сформировать на их основе триангуляцию. Существует немалое количество различных алгоритмов решения этой задачи. При этом сложность этих алгоритмов в лучшем случае составляет величину $O(m\ln m)$. Существуют и другие способы построения треугольных сеток в ограниченных плоских областях. В качестве примера мы можем привести работы [1] и [10]. Мы также предлагаем несколько иной подход, предусматривающий только один проход по набору вершин. Заключается он в следующем. Вначале мы рассматриваем небольшое количество точек из $\overline{\Omega}$ и одним из алгоритмов строим по ним начальную триангуляцию. Для получения более качественной триангуляции мы можем потребовать выполнения, например, условия Делоне или его обобщения (см., например, [4; 11; 12]). Далее построенная триангуляция подвергается процессу измельчения с целью уменьшения мелкости разбиения и, соответственно, повышению точности вычислений на ней. Отметим, что в роли числовой характеристики, отвечающей за качество триангуляции, мы рассматриваем минимальный синус углов треугольников триангуляции. Нужно отметить, что синусы углов треугольника существенно влияют на степень погрешности вычисления функции и ее производных при их приближении кусочно-полиномиальными функциями в этом треугольнике (см. работы [2; 3; 5–9; 13–15]).

Далее будем предполагать, что граница области $\partial\Omega$ состоит из конечного числа простых замкнутых кривых. Будем считать, что задана некоторая начальная триангуляция $\mathcal{T} = \{T_k\}_{k=1}^N$ области Ω. Рассмотрим следующий способ измельчения триангуляции с целью получить триангуляцию, которая будет приближать границу области с большей точностью.

Зафиксируем произвольное натуральное число q.

1) Для каждого внутреннего треугольника T_k исходной триангуляции будем строить разбиение следующим образом. Выберем произвольно вершину треугольника и каждую сторону, выходящую из этой вершины, разобьем дополнительными точками на q равных отрезков. Далее проведем через выделенные точки прямые, параллельные второй стороне, которая также выходит из данной вершины. Если теперь провести прямые, параллельные третьей стороне через полученные точки, то образуется разбиение треугольника T_k на q^2 подобных треугольников (см. рис. 1). При этом величина минимального угла полученной триангуляции совпадает с $\alpha(\mathcal{T})$.

2) Рассмотрим произвольный треугольник T_k с вершинами A, B и C, у которого сторона AB является граничной. Тогда вершины $A, B \in \partial\Omega$. Будем предполагать, что $AC \cup CB \subset \overline{\Omega}$. На AC рассмотрим точки $C = S_{00}, S_{10}, ..., S_{q0} = A$, делящие отрезок AC на q равных отрезков. Проведем выходящие из них лучи в сторону треугольника и параллельные стороне CB: $L_0, L_1, ..., L_q$.

Обозначим через r_i длину максимального отрезка вида $S_{i0}M$, лежащего в пересечении $\Omega \cap L_i$, $i = 0, ..., q$. Мы будем предполагать, что $0 < r_i < +\infty$. Обозначим через l_i отрезок луча L_i с началом в точке S_{i0} длины r_i. Разобьем l_i на $q - i$ одинаковых отрезков точками $S_{i0}, S_{i1}, ..., S_{i,q-i}$ (см. рис. 2). Образуем для получившихся точек такой набор треугольников. Для $i = 0, ..., q-1$ получаем $\Delta S_{ij}S_{i,j+1}S_{i+1,j}$, $j = 0, ..., q-i-1$ и $\Delta S_{ij}S_{i+1,j-1}S_{i+1,j}$, где $j = 1, ..., q-i-1$.

В итоге, как не трудно видеть, полученный набор треугольников также образует триангуляцию.

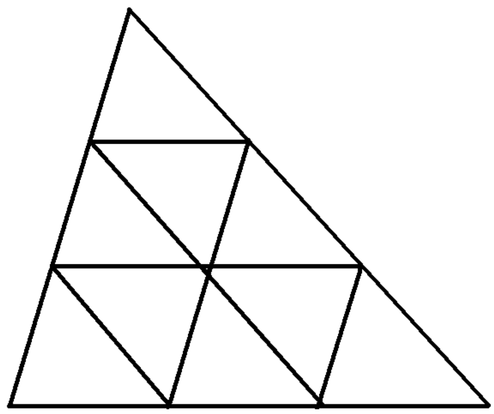

Рис. 1. Разбиение треугольника на 9 подобных треугольников ($q = 3$)

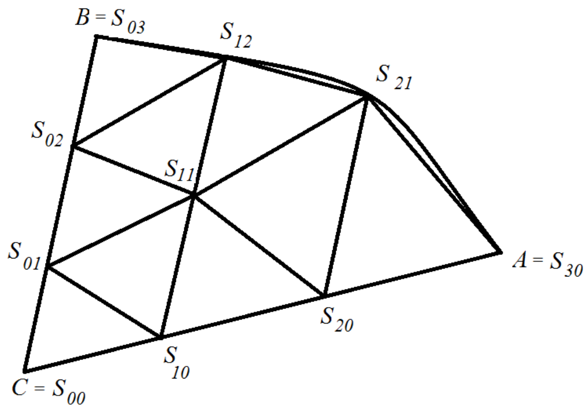

Рис. 2. Измельчение для граничного треугольника ($q = 3$)

2. Оценка качества триангуляции

В этом разделе статьи мы будем рассматривать область Ω специального вида. Для начала дадим определение криволинейного треугольника (см. рис. 3). Пусть задана произвольная точка $O = (x_0, y_0)$ на плоскости и два неколлинеарных единичных вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ и $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$. Криволинейным треугольником назовем область вида

$$\tilde{T} = \{M : \overrightarrow{OM} = u\vec{\xi} + v\vec{\eta},\ 0 \le u \le a, 0 \le v \le \lambda(u)\}$$

или вида

$$\tilde{T} = \{M : \overrightarrow{OM} = u\vec{\xi} + v\vec{\eta},\ 0 \le v \le a, 0 \le u \le \lambda(v)\},$$

где λ — некоторая непрерывная неотрицательная функция, определенная на отрезке $[0, a]$.

Понятно, что достаточно ограничиться первым видом криволинейного треугольника, так как треугольник второго вида приводится к первому заменой $\vec{\xi}$ на $\vec{\eta}$, а $\vec{\eta}$ на $\vec{\xi}$. Вершинами криволинейного треугольника назовем точки O, $M_1 = O + a\vec{\xi}$ и $M_2 = O + \lambda(0)\vec{\eta}$.

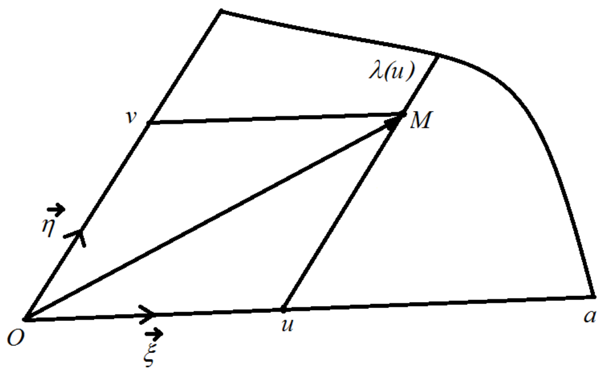

Рис. 3. Криволинейный треугольник

Пусть область Ω представляет собой объединение

$$\Omega = \left(\bigcup_{k=1}^{N_1} T_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{N_2} \tilde{T}_k\right),$$

где T_k — обычные (прямолинейные) треугольники, а $\tilde{T}_k$ — криволинейные треугольники. Будем предполагать, что все эти треугольники не пересекаются по внутренним точкам. Также мы будем считать, что вершины каждого треугольника (криволинейного треугольника) могут принадлежать другому треугольнику, прямолинейному или криволинейному, только в качестве его вершины (рис. 4).

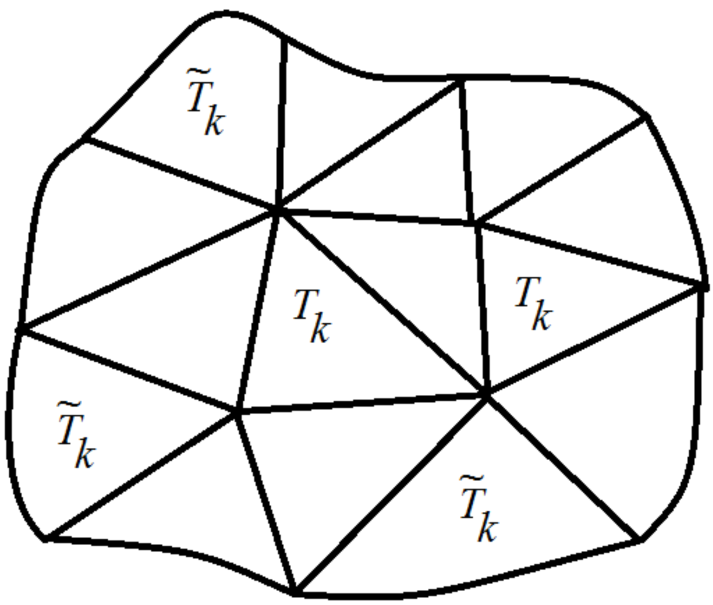

Рис. 4. Область, как объединение треугольников

Далее дадим нижнюю оценку минимального угла треугольников, получающихся описанным выше методом. Ясно, что при измельчении треугольников T_k углы получающихся новых треугольников будут теми же, так как эти треугольники подобны треугольнику T_k. Поэтому будем оценивать углы при измельчении криволинейных треугольников

$\tilde{T}_k$. Для начала рассмотрим криволинейный треугольник (индекс k опустим, чтобы не загромождать формулы)

$$\tilde{T} = \{M : \overrightarrow{OM} = u\vec{\xi} + v\vec{\eta},\ 0 \le u \le a, 0 \le v \le \lambda(u)\}.$$

Будем предполагать, что найдутся положительные числа $L \ge l$ такие, что для любых $u_1, u_2 \in [0, a]$, $u_1 < u_2$, выполнены неравенства

$$l(u_2 - u_1) \le \lambda(u_1) - \lambda(u_2) \le L(u_2 - u_1) \tag{1}$$

и $\lambda(a) = 0$. Проведем процедуру измельчения этого треугольника, описанную в предыдущем разделе статьи. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, a]$ точками $u_i = ih$, где $h = \frac{a}{q}$, $i = 0, ..., q$. Зафиксируем i и рассмотрим точки $v_{ij} = \frac{j\lambda(u_i)}{q-i}$, $j = 0, ..., q - i$. Обозначим через A_{ij} точку с координатами (x_{ij}, y_{ij}), где

$$x_{ij} = x_0 + u_i\xi_1 + v_{ij}\eta_1,\ y_{ij} = y_0 + u_i\xi_2 + v_{ij}\eta_2.$$

Отметим, что справедливы следующие неравенства

$$(q - i)lh \le \lambda(u_i) \le (q - i)Lh,\ i = 0, ..., q. \tag{2}$$

Триангуляция криволинейного треугольника $\tilde{T}$ состоит из следующих треугольников. Для $i = 0, ..., q-1$ получаем $\Delta A_{ij}A_{i,j+1}A_{i+1,j}$, $j = 0, ..., q-i-1$ и $\Delta A_{ij}A_{i+1,j-1}A_{i+1,j}$, где $j = 1, ..., q - i - 1$. Получим оценку снизу синуса углов этих треугольников.

Рассмотрим первый треугольник. Ему в координатах u, v соответствует некоторый треугольник, площадь которого в плоскости (u, v), очевидно, равна

$$S' = \frac{h\lambda(u_i)}{2(q - i)} \ge \frac{1}{2}lh^2.$$

Тогда, используя переход к декартовым координатам (x, y):

$$x = x_0 + u\xi_1 + v\eta_1,\ y = y_0 + u\xi_2 + v\eta_2,$$

площадь S треугольника $\Delta A_{ij}A_{i,j+1}A_{i+1,j}$ будет равна

$$S = S' \sin\theta = \frac{h\lambda(u_i)}{2(q - i)} \sin\theta \ge \frac{1}{2}lh^2 \sin\theta,$$

где θ — угол между векторами $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$. Далее

$$\sin(\angle A_{i+1,j}) = \frac{2S}{|A_{ij}A_{i+1,j}||A_{i,j+1}A_{i+1,j}|}.$$

Воспользуемся следующими неравенствами. Пусть $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ — произвольные точки на плоскости. Пусть $(u_A, v_A), (u_B, v_B)$ таковы, что

$$x_A = x_0 + u_A\xi_1 + v_A\eta_1,\ y_A = y_0 + u_A\xi_2 + v_A\eta_2$$

и

$$x_B = x_0 + u_B\xi_1 + v_B\eta_1,\ y_B = y_0 + u_B\xi_2 + v_B\eta_2.$$

Тогда

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \geq (1 - |\cos\theta|)((u_A - u_B)^2 + (v_A - v_B)^2), \tag{3}$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \leq (1 + |\cos\theta|)((u_A - u_B)^2 + (v_A - v_B)^2). \tag{4}$$

Поэтому

$$|A_{ij}A_{i+1,j}|^2 \leq (1 + |\cos\theta|)\left(h^2 + \left(\frac{j\lambda(u_i)}{q-i} - \frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i-1}\right)^2\right)$$

и

$$|A_{i,j+1}A_{i+1,j}|^2 \leq (1 + |\cos\theta|)\left(h^2 + \left(\frac{(j+1)\lambda(u_i)}{q-i} - \frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i-1}\right)^2\right).$$

Следовательно,

$$\sin(\angle A_{i+1,j}) \geq \frac{\sin\theta}{1 + |\cos\theta|}\frac{h\lambda(u_i)/(q-i)}{\sqrt{h^2 + (\frac{j\lambda(u_i)}{q-i} - \frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i-1})^2}\sqrt{h^2 + (\frac{(j+1)\lambda(u_i)}{q-i} - \frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i-1})^2}}.$$

Используя условия на функцию $\lambda(u)$, имеем

$$\left|\frac{j\lambda(u_i)}{q-i} - \frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i-1}\right| \leq \left|\frac{j\lambda(u_i)}{q-i} - \frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i}\right| + \left|\frac{\lambda(u_{i+1})}{(q-i)(q-i-1)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{Lhj}{q-i} + \frac{Lhj}{q-i} \leq 2Lh$$

и

$$\left|\frac{(j+1)\lambda(u_i)}{q-i} - \frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i-1}\right| \leq \left|\frac{j\lambda(u_i)}{q-i} - \frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i}\right| + \left|\frac{\lambda(u_i)}{q-i}\right| +$$

$$+ \left|\frac{j\lambda(u_{i+1})}{(q-i)(q-i-1)}\right| \leq 3Lh.$$

Таким образом,

$$\sin(\angle A_{i+1,j}) \geq \frac{\sin\theta}{1 + |\cos\theta|}\frac{lh^2}{\sqrt{h^2 + 4L^2h^2}\sqrt{h^2 + 9L^2h^2}} =$$

$$= \frac{\sin\theta}{1 + |\cos\theta|}\frac{l}{\sqrt{1 + 4L^2}\sqrt{1 + 9L^2}}. \tag{5}$$

Аналогично имеем

$$\sin(\angle A_{ij}) \geq \frac{\sin\theta}{1 + |\cos\theta|}\frac{h\lambda(u_i)/(q-i)}{\sqrt{h^2 + (\frac{j\lambda(u_i)}{q-i} - \frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i-1})^2}\lambda(u_i)/(q-i)} =$$

$$= \frac{\sin\theta}{1 + |\cos\theta|}\frac{h}{\sqrt{h^2 + (\frac{j\lambda(u_i)}{q-i} - \frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i-1})^2}}.$$

Поэтому,

$$\sin(\angle A_{ij}) \geq \frac{\sin\theta}{1 + |\cos\theta|}\frac{l}{\sqrt{1 + 4L^2}}. \tag{6}$$

И для третьего угла данного треугольника

$$\sin(\angle A_{i+1,j}) \geq \frac{\sin\theta}{1+|\cos\theta|} \frac{h\lambda(u_i)/(q-i)}{\lambda(u_i)/(q-i)\sqrt{h^2+(\frac{(j+1)\lambda(u_i)}{q-i}-\frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i-1})^2}} =$$

$$= \frac{\sin\theta}{1+|\cos\theta|} \frac{h}{\sqrt{h^2+(\frac{(j+1)\lambda(u_i)}{q-i}-\frac{j\lambda(u_{i+1})}{q-i-1})^2}}.$$

Тогда

$$\sin(\angle A_{i,j+1}) \geq \frac{\sin\theta}{1+|\cos\theta|} \frac{l}{\sqrt{1+9L^2}}. \quad (7)$$

Аналогичные неравенства (5)–(7) справедливы и для углов треугольника $\Delta A_{ij}A_{i+1,j-1}A_{i+1,j}$. На рисунке 5 показан результат измельчения исходной триангуляции.

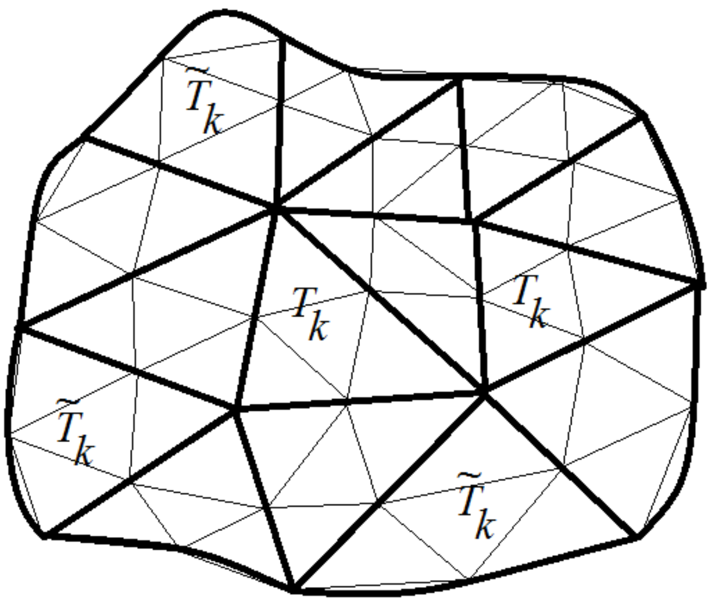

Рис. 5. Триангуляция области после измельчения для $q = 2$

Обозначим теперь через θ минимальный угол всех треугольников $\tilde{T}_k$. Далее для каждого треугольника определены соответствующие постоянные l_k, L_k. Полагаем

$$l = \min_{1\leq k\leq N_2} l_k, \quad L = \max_{1\leq k\leq N_2} L_k.$$

Теорема 1. *Минимальный угол α_q построенной триангуляции для любого натурального числа q удовлетворяет неравенству*

$$\sin\alpha_q \geq \frac{\sin\theta}{1+|\cos\theta|} \frac{l}{\sqrt{1+4L^2}\sqrt{1+9L^2}}.$$

Таким образом, как бы мы не измельчали исходную триангуляцию, у получающихся треугольников углы не будут стремиться к нулю, то есть треугольники не будут вырождаться. Как было отмечено ранее, данное свойство очень важно, так как при его выполнении на триангуляцию достигается необходимая степень аппроксимации функции и ее производных в различных вычислительных задачах.

Замечание 1. Условия (1) существенно влияют на качество триангуляции. Убедимся в этом на следующем примере. Пусть Ω — круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=R^2$. Разобьем его на четыре криволинейных треугольника координатными линиями. Пусть первый из них имеет вид

$$\tilde{T}=\{(x,y):0\leq x\leq R, 0\leq y\leq \sqrt{R^2-x^2}\}.$$

Ясно, что функция $\lambda(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ не удовлетворяет условиям (1). Теперь рассмотрим соответствующее измельчение и самый крайний справа треугольник $\Delta A_{0,q-1}A_{1,q-1}A_{0,q}$. Не сложно видеть, что

$$A_{0,q-1}=\left(R\frac{q-1}{q},0\right),\ A_{1,q-1}=\left(R\frac{q-1}{q},R\frac{\sqrt{2q-1}}{q}\right),\ A_{0,q}=(R,0)\,.$$

Тогда

$$\sin(\angle A_{0,q-1}A_{1,q-1}A_{0,q})=\frac{R/q}{R\sqrt{2/q}}=\frac{1}{\sqrt{2q}}\to 0$$

при $q\to\infty$.

Замечание 2. Дадим некоторые пояснения по поводу вычисления величин $r_i=\lambda(u_i)$. Предположим вначале, что область задана неравенством

$$F(x,y)<0,$$

где $F(x,y)$ — непрерывная функция на плоскости. В таком случае вычисление значений r_i, а значит и вершин триангуляции, может быть осуществлено так. Пусть фиксирована точка A_{i0}, $i=0,..,q$. Рассмотрим функцию

$$f(t)=F(x_{i0}+t\eta_1,y_{i0}+t\eta_2)$$

при $t\in[0,+\infty)$. Так как точка $A_{i0}\in\overline{\Omega}$, то либо $f(0)=0$, либо $f(0)<0$. Если $f(0)=0$, то полагаем $r_i=0$. Если же $f(0)<0$, то, учитывая, что $f(t)>0$ при всех достаточно больших $t>0$, из непрерывности функции $f(t)$ следует существование такого минимального $t^*>0$, что $f(t^*)=0$. Тогда полагаем $r_i=t^*$. Величину t^* можно приближенно определить одним из методов численного решения нелинейных уравнений.

Предположим теперь, что граница области $\partial\Omega$ задана в виде параметрических уравнений

$$x=x(t),\quad y=y(t),\ t\in[0,T]. \tag{8}$$

Рассмотрим криволинейный треугольник

$$\tilde{T}=\{M:\overrightarrow{OM}=u\vec{\xi}+v\vec{\eta},\ 0\leq u\leq a, 0\leq v\leq\lambda(u)\},$$

в котором функция $\lambda(u)$ задана параметрически уравнениями (8) при $t\in[t_1,t_2]\subset[0,T]$. Тогда для поиска точки пересечения L_i с $\partial\Omega$ надо решить уравнение

$$(y(t)-y_0-u_i\xi_2)\eta_1=(x(t)-x_0-u_i\xi_1)\eta_2. \tag{9}$$

Учитывая, что $x(t_1) = x_0 + \lambda(0)\eta_1, y(t_1) = y_0 + \lambda(0)\eta_2$ и $x(t_2) = x_0 + a\xi_1, y(t_2) = = y_0 + a\xi_2$ и непрерывность функций $x(t), y(t)$, найдется $t^* \in [t_1, t_2]$ такое, при котором выполняется равенство (9). Тогда полагаем

$$r_i = \sqrt{(x_{i0} - x(t^*))^2 - (y_{i0} - y(t^*)^2}.$$

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области, проект № 15-41-02517-р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алейников, С. М. Алгоритм генерации сетки в методе граничных элементов для плоских областей / С. М. Алейников, А. А. Седаев // Математическое моделирование. — 1995. — № 7 (7). — С. 81–93.

2. Байдакова, Н. В. Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях / Н. В. Байдакова // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 3. — С. 83–97.

3. Байдакова, Н. В. Новые оценки величин погрешности аппроксимации производных при интерполяции функции многочленами третьей степени на треугольнике / Н. В. Байдакова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13:1, № 2. — С. 15–19.

4. Клячин, В. А. Алгоритм триангуляции, основанный на условии пустого выпуклого множества / В. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2015. — Т. 28, № 3. — С. 27–33.

5. Клячин, В. А. Коэффициент изопериметричности симплекса в задаче аппроксимации производных / В. А. Клячин, Д. В. Шуркаева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 151–160.

6. Клячин, В. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей / В. А. Клячин, А. А. Широкий // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2010. — Т. 78, № 4. — С. 51–55.

7. Клячин, В. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства / В. А. Клячин, А. А. Широкий // Изв. вузов. Математика. — 2012. — № 1. — С. 31–39.

8. Латыпова, Н. В. Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике / Н. В. Латыпова // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. — 2003. — С. 3–10.

9. Матвеева, Ю. В. Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных / Ю. В. Матвеева // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2007. — Т. 7, № 1. — С. 23–27.

10. Немировский, Ю. В. Автоматизированная триангуляция многосвязных областей со сгущением и разрежением узлов / Ю. В. Немировский, С. Ф. Пятаев // Вычислительные технологии. — 2000. — № 5 (2). — С. 82–91.

11. Скворцов, А. В. Алгоритмы построения триангуляции с ограничениями / А. В. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. — 2002. — № 3. — С. 82–92.

12. Скворцов, А. В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне / А. В. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. — 2002. — № 3. — С. 14–39.

13. Субботин, Ю. Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника / Ю. Н. Субботин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 1992. — Т. 2. — С. 110–119.

14. Субботин, Ю. Н. Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции / Ю. Н. Субботин // Тр. МИАН. — 1989. — Т. 189. — С. 117–137.

15. Babuska, I. On the angle condition in the finite element method / I. Babuska, A. K. Aziz // SIAM J. Numer. Anal. — 1976. — Vol. 13, № 2. — P. 214–226.

REFERENCES

1. Aleynikov S.M., Sedaev A.A. Algoritm generatsii setki v metode granichnykh elementov dlya ploskikh oblastey [Algorithm of Mesh Formation in the Boundary Element Method for Plane Regions]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 1995, no. 7 (7), pp. 81-93.

2. Baydakova N.V. Vliyanie gladkosti na pogreshnost approksimatsii proizvodnykh pri lokalnoy interpolyatsii na triangulyatsiyakh [Influence of Smoothness on the Error of Approximation of Derivatives under Local Interpolation on Triangulations]. *Tr. IMM UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 83-97.

3. Baydakova N.V. Novye otsenki velichin pogreshnosti approksimatsii proizvodnykh pri interpolyatsii funktsii mnogochlenami tretyey stepeni na treugolnike [New Estimates of the Error of Approximation of Derivatives of the Interpolation Functions of Polynomials of the Third Degree on a Triangle]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2013, vol. 13:1, no. 2, pp. 15-19.

4. Klyachin V.A. Algoritm triangulyatsii, osnovannyy na uslovii pustogo vypuklogo mnozhestva [Triangulation Algorithm Based on Empty Convex Set Condition]. *Vestnik Volgoradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2015, vol. 28, no. 3, pp. 27-33.

5. Klyachin V.A., Shurkaeva D.V. Koeffitsient izoperimetrichnosti simpleksa v zadache approksimatsii proizvodnykh [Simplex Isoperimetricity Factor in the Problem of Approximation of Derivatives]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 151-160.

6. Klyachin V.A., Shirokiy A.A. Triangulyatsiya Delone mnogomernykh poverkhnostey [The Delaunay Triangulation for Multidimensional Surfaces]. *Vestn. SamGU. Estestvennonauch. ser.*, 2010, vol. 78, no. 4, pp. 51-55.

7. Klyachin V.A., Shirokiy A.A. Triangulyatsiya Delone mnogomernykh poverkhnostey i ee approksimatsionnye svoystva [The Delaunay Triangulation for Multidimensional Surfaces and Its Approximative Properties]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2012, no. 1, pp. 31-39.

8. Latypova N.V. Pogreshnost kusochno-kubicheskoy interpolyatsii na treugolnike [The Error of Interpolation Polynomials of the Sixth Degree on a Triangle]. *Vestn. Udmurt. un-ta. Matematika*, 2003, pp. 3-10.

9. Matveeva Yu.V. Ob ermitovoy interpolyatsii mnogochlenami tretyey stepeni na treugolnike s ispolzovaniem smeshannykh proizvodnykh [On Hermite Interpolation Third-Degree Polynomials on a Triangle Using Mixed Derivatives]. *Izv. Sarat. un-ta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2007, vol. 7, no. 1, pp. 23-27.

10. Nemirovskiy Yu.V., Pyataev S.F. Avtomatizirovannaya triangulyatsiya mnogosvyaznykh oblastey so sgushcheniem i razrezheniem uzlov [Automated Triangulation of Multiply Connected Domains with Concentration and Rarefaction of Nodes]. *Vychislitelnye tekhnologii* [Computational Technologies], 2000, no. 5 (2), pp. 82-91.

11. Skvortsov A.V. Algoritmy postroeniya triangulyatsii s ogranicheniyami [Algorithms for Constructing a Triangulation with Restrictions]. *Vychislitelnye metody i programmirovanie* [Numerical Methods and Programming], 2002, no. 3, pp. 82-92.

12. Skvortsov A.V. Obzor algoritmov postroeniya triangulyatsii Delone [Review Algorithms for Constructing Delaunay Triangulation]. *Vychislitelnye metody i programmirovanie* [Numerical Methods and Programming], 2002, no. 3, pp. 14-39.

13. Subbotin Yu.N. Zavisimost otsenok approksimatsii interpolyatsionnymi polinomami pyatoy stepeni ot geometricheskikh kharakteristik treugolnika [Dependence of the Estimates

of Approximation by Interpolation Polynomials of the Fifth Degree of the Geometrical Characteristics of the Triangle]. *Tr. In-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 1992, vol. 2, pp. 110-119.

14. Subbotin Yu.N. Zavisimost otsenok mnogomernoy kusochno-polinomialnoy approksimatsii ot geometricheskikh kharakteristik triangulyatsii [The Dependence of Estimates of a Multidimensional Piecewise Polynomial Approximation on the Geometric Characteristics of a Triangulation]. *Tr. MIAN*, 1989, vol. 189, pp. 117-137.

15. Babuska I., Aziz A.K. On the Angle Condition in the Finite Element Method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1976, vol. 13, no. 2, pp. 214-226.

THE CONSTRUCTION OF THE TRIANGULATION OF PLANE DOMAINS BY GRINDING METHOD

Aleksey Aleksandrovich Klyachin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Head of Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
klyachin-aa@yandex.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Currently triangulation method is widely used in a variety of computational problems. The reason for this is that the triangles are the simplest flat shapes, geometric characteristics of which are easy enough to calculate, and at the same time, any domain and even the surface approximated by triangles with the required accuracy. Therefore, the demanded problem is to develop triangulation algorithms areas which do not require a lot of time to perform and not expend a large amount of computer resources. In this paper we describe one approach to constructing a triangulation of arbitrary planar domains and give an assessment of the minimum angle triangles under certain geometric conditions.

First, we consider the small number of points of $\overline{\Omega}$ and one of the algorithms build on them start triangulation. Further constructed triangulation undergoes grinding to reduce the fineness of the partition and hence improve the accuracy of calculations on it. Note that as the numerical characteristics responsible for the quality of the triangulation, we consider the minimum sine triangulation angles of triangles. Each triangle is divided into q^2 triangles.

We now denote by θ minimum angle of all triangles $\tilde{T}_k$. Further, for each of the triangle defined by the respective permanent l_k, L_k. These values define the boundaries of the domain Ω. We introduce the notation

$$l = \min_{1 \le k \le N_2} l_k, \quad L = \max_{1 \le k \le N_2} L_k$$

Theorem 1. *Minimum angle α_q, built triangulation for any natural number q, satisfies*

$$\sin \alpha_q \ge \frac{\sin \theta}{1 + |\cos \theta|} \frac{l}{\sqrt{1+4L^2}\sqrt{1+9L^2}}.$$

Key words: triangulation, the triangle, the minimum angle of triangulation, splitting domain, Lipschitz condition.