www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.2.1

УДК 514.76
ББК 22.151

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ КВАЗИ-САСАКИЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

Сергей Васильевич Галаев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии,
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского
sgalaev@mail.ru
ул. Астраханская, 83, 410012 г. Саратов, Российская Федерация

Аннотация. Вводится понятие почти контактной метрической структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ первого рода. На многообразии M определяется внутренняя связность. Тензор кривизны внутренней связности получает название тензора Схоутена. Изучаются свойства тензора Схоутена. В частности, доказывается, что обращение в нуль тензора Схоутена эквивалентно существованию такого атласа, состоящего из адаптированных карт, в котором коэффициенты внутренней связности равны нулю. Определяется ассоциированная с внутренней связностью ∇ связность ∇^A. Доказывается существование и единственность ассоциированной связности. Распределение почти контактной метрической структуры с нулевым тензором Схоутена названо в работе распределением нулевой кривизны. Квази-сасакиева структура первого рода получает в работе название специальной квази-сасакиевой структуры (SQS-структуры). На распределении D многообразия M с контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ определяется почти контактная метрическая структура $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, являющаяся структурой первого рода и называемая в работе продолженной почти контактной метрической структурой. Доказывается, что продолженная структура является SQS-структурой в случае, когда в качестве исходного многообразия выбирается сасакиево многообразие с распределением нулевой кривизны.

Ключевые слова: квази-сасакиевы многообразия, внутренняя связность, ассоциированная связность, тензор кривизны Схоутена, распределение нулевой кривизны.

Введение

Основы теории квази-сасакиевых многообразий заложены в работах Блэра [11]. Значительное внимание квази-сасакиевым многообразиям уделено в работах В.Ф. Кириченко и его учеников [9]. Среди квази-сасакиевых структур $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, таких что $rkd\eta = 2p$, $2p < 2m$, $2p \neq 0$, наиболее близко примыкают к сасакиевым структурам структуры (SQS-структуры), определяемые в настоящей статье. Интересным примером SQS-структур являются структуры (продолженные почти контактные метрические структуры), естественным образом возникающие на распределениях нулевой кривизны сасакиевых многообразий. Продолженные почти контактные метрические структуры введены автором настоящей статьи в работах [5; 8]. Наиболее интересными продолженными структурами являются структуры, задаваемые на распределениях нулевой кривизны, то есть на распределениях почти контактных метрических структур с нулевым тензором кривизны Схоутена. Понятие тензора кривизны оснащенного неголономного многообразия введено Схоутеном и ван Кампеном [13]. Впоследствии заданный Схоутеном и ван Кампеном тензор был назван В.В. Вагнером [3] тензором Схоутена. Существуют два основных способа введения тензора Схоутена в геометрию почти контактных метрических многообразий. Тензор Схоутена может быть определен как тензор кривизны внутренней связности (связности в неголономном многообразии) [3; 4]. Альтернативным способом задания тензора Схоутена является выделение трансверсальной составляющей у тензора кривизны некоторой связности (отличной от связности Леви — Чивита), возникающей на многообразии с почти контактной метрической структурой. При этом термин «тензор Схоутена» не употребляется [12; 14].

Тензор Схоутена мы называем тензором кривизны распределения D многообразия M с почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Существуют и другие способы определения тензора кривизны распределения почти контактного метрического многообразия. В [10] под тензором кривизны распределения понимается тензор кривизны некоторой связности в векторном расслоении (M, π, D). В работе [3] Вагнер вводит понятие тензора кривизны (тензора кривизны Вагнера) оснащенного неголономного многообразия коразмерности 1. В случае контактного метрического многообразия тензор кривизны Вагнера также может быть описан как тензор кривизны связности (отличной от связности, изучаемой в работе [10]) в векторном расслоении (M, π, D). Задание связности Вагнера сводится к продолжению внутренней связности до связности (N-продолженной связности) в векторном расслоении с помощью эндоморфизма $N : D \to D$, имеющего специальное строение.

Предлагаемая работа устроена следующим образом. Во втором разделе на почти контактном метрическом многообразии M вводится понятие внутренней связности, определяется тензор кривизны Схоутена и изучаются его свойства. В третьем разделе определяется SQS-структура, изучаются простейшие свойства многообразий с SQS-структурой. На распределении D многообразия M с контактной метрической структурой определяется продолженная почти контактная метрическая структура. Доказывается, что продолженная структура является SQS-структурой, если исходное многообразие — сасакиево многообразие с распределением нулевой кривизны.

1. Тензор кривизны Схоутена и его свойства

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на M. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Предположим, что на M задана почти контактная метрическая структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, где φ — тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом или допустимой почти комплексной структурой, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. При этом выполняются следующие условия: 1) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$; 2) $\eta(\vec{\xi}) = 1$; 3) $g(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$; 4) $d\eta(\vec{\xi}, \vec{x}) = 0$, где $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$.

Гладкое распределение $D = \ker\eta$ называется распределением почти контактной структуры.

В качестве следствия условий 1)–4) получаем:

5) $\varphi(\vec{\xi}) = \vec{0}$; 6) $\eta \circ \varphi = 0$; 7) $\eta(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{\xi})$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Если $rk\omega = 2m$, где $\omega = d\eta$, вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = Span(\vec{\xi})$.

Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^\perp = Span(\vec{\xi})$, ортогональное распределению D, называется оснащением распределения D. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$.

Многообразие Сасаки — контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}]$ — тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Выполнение условия $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством.

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n; a, b, c = 1, ..., n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [6]. Пусть $P : TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = Span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Имеет место равенство $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a(x^{a'}),\ x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'}).$$

Тензорное поле t типа (p, q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'},\ \text{где}\ A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}.$$

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t_b^a$ компонент допустимого тензорного поля являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t_b^a$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Внутренней линейной связностью ∇ [4] на многообразии с почти контактной метрической структурой называется отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1)$\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$;

2)$\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$,

3)$\nabla_{\vec{x}}(\vec{y}+\vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$, где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Внутренняя связность определяет дифференцирования допустимых тензорных полей. Так, например, для допустимой почти комплексной структуры выполняется равенство $(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}(\varphi\vec{y}) - \varphi(\nabla_{\vec{x}}\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_b.$$

Кручением внутренней связности назовем допустимое тензорное поле

$$S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}], \vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D).$$

Внутреннюю связность будем называть симметричной, если ее кручение равно нулю. В случае симметричности внутренней связности в адаптированных координатах получаем:

$$S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} = 0, \text{ или, } \Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}.$$

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}],$$

где $Q = I - P$, названо Вагнером [3] тензором кривизны Схоутена. Тензор Схоутена будем называть тензором кривизны внутренней связности. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}$.

Тензор кривизны внутренней связности возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных: $2\nabla_{[a}\nabla_{b]}v^c = R^c_{abe}v^e + 4\omega_{ba}\partial_n v^c$.

Назовем тензор кривизны внутренней связности тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны.

Аналогом связности Леви — Чивита является внутренняя симметричная связность ∇ такая, что $\nabla g = 0$, где g — допустимое тензорное поле, определяемое метрическим тензором исходной почти контактной метрической структуры. Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Известно [3], что внутренняя симметричная метрическая связность существует и определена единственным образом. Ее коэффициенты задаются равенствами

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}). \tag{1}$$

Введем в рассмотрение допустимые тензорные поля, определяемые равенствами $h\vec{x} = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}\varphi)(\vec{x})$, $C(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(\vec{x},\vec{y})$, $g(C\vec{x},\vec{y}) = C(\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах получаем:

$$h_b^a = \frac{1}{2}\partial_n \varphi_b^a,\ C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ C_b^a = g^{da}C_{db}.$$

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви — Чивита тензора $g : \widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви — Чивита контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:* $\widetilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}$, $\widetilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}$, $\widetilde{\Gamma}^b_{an} = \widetilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a - \varphi^b_a$, $\widetilde{\Gamma}^n_{na} = \widetilde{\Gamma}^a_{nn} = 0$, *где* $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

Пусть $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ — тензор кривизны связности Леви — Чивита контактного метрического пространства. Используя результаты предложения 1 и проводя вычисления в адаптированных координатах, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 2. *Тензор кривизны* $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ *связности Леви — Чивита* $\tilde{\nabla}$ *связан с тензором кривизны Схоутена* $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ *следующим соотношением:*

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})P(\vec{y},\vec{z}) - \eta(\vec{y})P(\vec{x},\vec{z}) + g(\vec{z},\varphi\vec{x})\varphi\vec{y} -$$

$$- g(\vec{z},\varphi\vec{y})\varphi\vec{x} - 2g(\vec{x},\varphi\vec{y})\varphi\vec{z} + \eta(\vec{z})\eta(\vec{y})\vec{x} - \eta(\vec{z})\eta(\vec{x})\vec{y} + \eta(\vec{x})g(\vec{y},\vec{z})\vec{\xi} - \eta(\vec{y})g(\vec{x},\vec{z})\vec{\xi}. \quad (2)$$

Здесь $P(\vec{x},\vec{y})$ *— допустимое тензорное поле с компонентами* $P^a_{bc} = \partial_n \Gamma^a_{bc}$.

Прежде чем переходить к обсуждению свойств тензора Схоутена, введем понятия N-связности ∇^N [1; 8] и ассоциированной связности ∇^A, естественным образом связанных с данной внутренней связностью.

Пусть на многообразии M с почти контактной структурой и внутренней линейной связностью ∇ задан эндоморфизм $N : D \to D$.

N-связность ∇^N определим как единственную связность на многообразии M, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} \in \Gamma(D), \quad (3)$$

$$\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi} = \vec{0}, \quad (4)$$

$$\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} = [\vec{\xi},\vec{y}] + N\vec{y}, \quad (5)$$

$$\nabla^N_{\vec{y}}\vec{z} = \nabla_{\vec{y}}\vec{z}, \quad (6)$$

$\vec{x} \in \Gamma(TM), \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

Корректность определения N-связности связности подтверждается следующей теоремой.

Теорема 1. *На почти контактном метрическом многообразии* M *с заданной на нем внутренней связностью* ∇ *и эндоморфизмом* $N : D \to D$ *существует и притом единственная связность* $\nabla^N_{\vec{x}}$, *удовлетворяющая условиям (3)–(6).*

Доказательство. 1. Единственность. Предположим, что связность $\nabla^N_{\vec{x}}$, удовлетворяющая условиям (3)–(6), существует. Введем следующее обозначение для ее коэффициентов: $\Gamma^{N\alpha}_{\beta\gamma}$. Из выполнения условий (3)–(6) следует, что в адаптированных координатах отличными от нуля коэффициентами $\Gamma^{A\alpha}_{\beta\gamma}$ являются коэффициенты $\Gamma^{Na}_{bc} = \Gamma^c_{ab}$ и $\Gamma^{Na}_{bc} = N^a_c$.

2. Существование. Определяя в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты $\Gamma^{N\alpha}_{\beta\gamma}$ с помощью равенств $\Gamma^{Aa}_{bc} = \Gamma^c_{ab}$, $\Gamma^{Na}_{bc} = N^a_c$, получаем искомую связность. Теорема доказана.

Кручение $S(\vec{x},\vec{y})$ и кривизна $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ N-связности определяются соответственно следующим образом:

$$S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x},$$

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x},\vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})(P(\vec{y},\vec{z}) - (\nabla^N_{P\vec{y}}N)\vec{z}) - \eta(\vec{y})(P(\vec{x},\vec{z}) - (\nabla^N_{P\vec{x}}N)\vec{z}),$$

$\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(TM)$.

N-связность с нулевым эндоморфизмом N будем называть ассоциированной связностью с внутренней связностью ∇ и обозначать ∇^A. Для кривизны и кручения ассоциированной связности имеем следующие равенства:

$$S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}, \tag{7}$$

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})P(\vec{y},\vec{z}) - \eta(\vec{y})P(\vec{x},\vec{z}),\ \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(TM). \tag{8}$$

Таким образом, из равенства (8) следует, что

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = R(\vec{x},\vec{y})\vec{z},\ \text{если } \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D). \tag{9}$$

Пусть $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$ — тензор кривизны распределения почти контактной метрической структуры. Допустимое тензорное поле $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u}) = g(R(\vec{x},\vec{y}),\vec{u},\vec{z})$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u} \in \Gamma(D)$, также будем называть тензором кривизны распределения почти контактной метрической структуры. Тензор кривизны Схоутена K-контактных пространств наделен теми же формальными свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае препятствием к этому выступает наличие производных $\partial_n g_{bc}$ в равенстве $\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}$. Тем не менее имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Тензор $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u})$ кривизны распределения почти контактной метрической структуры удовлетворяет следующим условиям:*

$$R(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u}) + R(\vec{y},\vec{x},\vec{z},\vec{u}) = 0, \tag{10}$$

$$\sum_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \{R(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u})\} = 0, \tag{11}$$

где $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u} \in \Gamma(D)$.

Доказательство. Справедливость равенства (10) подтверждается известным свойством тензора кривизны произвольной связности и равенством (9).

Для доказательства (11) воспользуемся тождеством Бьянки, координатная запись которого имеет вид:

$$K^i_{[kjl]} = 2\nabla_{[k}S^i_{jl]} - 4S^h_{[kj}S^i_{l]h}. \tag{12}$$

Из (7) следует, что отличными от нуля компонентами тензора кручения ассоциированной связности являются

$$S^n_{ab} = 2\omega_{ab}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получаем

$$K^n_{[cab]} = 4\nabla_{[c}\omega_{ab]}.$$

В адаптированных координатах компоненты $d\omega$ имеют вид:

$$d\omega_{abc} = \frac{1}{3}\left(\vec{e}_a\omega_{bc} + \vec{e}_b\omega_{ca} + \vec{e}_c\omega_{ab}\right),\ d\omega_{nab} = \frac{1}{3}\partial_n\omega_{ab}.$$

Таким образом, учитывая симметричность внутренней связности, убеждаемся в том, что равенство $d\omega_{\alpha\beta\gamma} = 0$ влечет равенство $\nabla_{[c}\omega_{ab]} = 0$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 3. *Контактное метрическое многообразие размерности с распределением нулевой кривизны является K-контактным пространством.*

Доказательство. Пусть ∇ — внутренняя метрическая связность: $\vec{z}g(\vec{x},\vec{y}) = g(\nabla_{\vec{z}}\vec{x},\vec{y}) + g(\vec{x},\nabla_{\vec{z}}\vec{y}) = 0$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$. Дифференцируя последнее равенство повторно и альтернируя полученный результат, имеем: $2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac} = 0$. Учитывая невырожденность формы ω, заключаем, что равенство $R^d_{eac} = 0$ влечет равенство $\partial_n g_{bc} = 0$. Что и доказывает теорему.

В качестве следствия теоремы 3 с учетом равенства (1) получаем:

Предложение 3. *Пусть M — многообразие, наделенное контактной метрической структурой, тогда обращение в нуль тензора кривизны Схоутена влечет равенство $P^a_{bc} = 0$.*

Теорема 4. *Пусть $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда обращение в нуль тензора Схоутена эквивалентно существованию такого атласа, состоящего из адаптированных карт, для которого выполняются равенства $\Gamma^a_{bc} = 0$.*

Доказательство. Достаточность утверждения непосредственно подтверждается координатным представлением тензора Схоутена в адаптированных координатах. Докажем необходимость. Обращение в нуль тензора Схоутена влечет независимость коэффициентов связности Γ^a_{bc} от последней координаты: $\partial_n\Gamma^a_{bc} = P^a_{bc} = 0$. Покажем, что на многообразии M можно построить атлас адаптированных карт, в которых коэффициенты связности равны нулю. Составим систему уравнений в полных дифференциалах.

$$\partial_n f^{b'} = A^{b'}_a,\ \partial_n A^{c'}_b = \Gamma^c_{ab}A^{c'}_c. \tag{14}$$

Условия интегрируемости полученной системы сводятся к следующим соотношениям:

$$S^c_{ab}A^{c'}_c = 0,\ R^d_{abc}A^{d'}_d = 0,$$

которые выполняются тождественно. Следовательно, система (14) вполне интегрируема и имеет решение с произвольными начальными условиями, что и завершает доказательство теоремы.

2. SQS-структура

На многообразии M с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, в случае выполнения условия $rk\, d\eta = 2p$, $2p < 2m$, $2p \neq 0$, может быть определено интегрируемое распределение K, равное ядру формы $\omega = d\eta$. В этом случае, помимо разложения $TM = D \oplus D^{\perp}$, на многообразии M возникает разложение $TM = L \oplus L^{\perp} \oplus D^{\perp}$, где $L^{\perp} = K \cap D$, а L — ортогональное ему распределение в D. Тем самым, наряду с проекторами $P : TM \to D$, $Q : TM \to D^{\perp}$, на многообразии M естественным образом вводятся проекторы $h : TM \to L$, $v : TM \to L^{\perp}$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Распределение $L^{\perp}$ интегрируемо.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(L^{\perp})$. Покажем, что $[\vec{x}, \vec{y}] \in \Gamma(L^{\perp})$. Имеем $2d\eta(\vec{x}, \vec{y}) = -\eta([\vec{x}, \vec{y}]) = 0$. Отсюда следует $[\vec{x}, \vec{y}] \in \Gamma(D)$. Далее, для произвольного $\vec{z} \in \Gamma(TM)$ получаем: $0 = 3d\omega(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = -\omega([\vec{x}, \vec{y}], \vec{z})$, что и доказывает лемму.

Почти контактную метрическую структуру назовем структурой первого рода, если распределение L инвариантно относительно действия эндоморфизма φ.

Квази-сасакиеву структуру назовем специальной квази-сасакиевой структурой (SQS-структурой), если выполняются следующие условия:

1) распределение L инвариантно относительно действия эндоморфизма φ;

2) имеет место равенство

$$d\eta(\vec{x}, \vec{y}) = \Omega(\vec{x}, \vec{y}),\ \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(L).$$

Введем на распределении D почти контактного метрического многообразия структуру гладкого многообразия следующим образом. Поставим в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^{\alpha})$ многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^{\alpha}, x^{n+a})$ на распределении D, полагая, что $\tilde{K}(\vec{x}) = (x^{\alpha},\, x^{n+a})$, где x^{n+a} — координаты допустимого вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n : \vec{x} = x^{n+a}\vec{e}_a$. Задание внутренней связности ∇ влечет разложение распределения $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to M$ — естественная проекция, в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D, HD — горизонтальное распределение, порождаемое векторными полями $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b}$, где $G^a_b(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a) x^{n+c}$, Γ^a_{bc} — коэффициенты внутренней связности.

Пусть, далее, $N : D \to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1). N-продолженной связностью [1; 5; 7; 8] назовем связность в векторном расслоении (D, π, M), определяемую разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $\widetilde{HD} = HD \oplus span(\vec{u})$, $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$ $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ — вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}$. Если не оговорено противное, будем считать, что $N = 0$. В этом случае $\widetilde{HD} = HD \oplus span(\partial_n)$.

Формы $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b)$ определяют поле кобазисов, сопряженное к полю базисов $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a})$.

Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a,\ \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d} R^c_{bad} \partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+d} \partial_n \Gamma^c_{ad} \partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab}\partial_{n+c}.$$

Всякому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, заданному на многообразии M, обычным образом соответствует его горизонтальный лифт $\vec{x}^h$, при этом $\vec{x}^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда $\vec{x}$ — допустимое векторное поле: $\vec{x} \in \Gamma(D)$.

Справедливость следующего предложения вытекает из полученных выше структурных уравнений.

Предложение 4. *Пусть ∇ — внутренняя симметричная связность с тензором кривизны Схоутена $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$. Тогда для всех $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$ и $\vec{p} \in D$ имеют место следующие равенства:*

$$[\vec{x}^h,\vec{y}^h] = [\vec{x},\vec{y}]^h - \{R(\vec{x},\vec{y})\vec{p}\}^v\,, \tag{15}$$

$$[\vec{x}^h,\vec{\xi}^h] = [\vec{x},\vec{\xi}]^h + \{P(\vec{x},\vec{p})\}^v\,, \tag{16}$$

$$[\vec{x}^h,\vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}}\vec{y})^v, \tag{17}$$

$$[\vec{x}^v,\vec{\xi}^h] = [\vec{x},\vec{\xi}]^v. \tag{18}$$

Определим на распределении D многообразия Сасаки M продолженную почти контактную метрическую структуру $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, полагая

$$\tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v,\vec{y}^v) = g(\vec{x},\vec{y}),$$

$$\tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^v,\vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^h,\ \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{x}^v,\vec{u}) = 0,$$

$$J\vec{x}^h = (\varphi\vec{x})^h,\ J\vec{x}^v = (\varphi\vec{x})^v,\ J(\vec{u}) = \vec{0},\ \vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D),\ \vec{u} = \partial_n = \vec{\xi}^h.$$

Легко проверить, что построенная выше почти структура является почти контактной метрической структурой первого рода. Разные аспекты геометрии продолженных почти контактных метрических структур освещались в работах [1; 2; 4–8].

Теорема 5. *Почти контактная метрическая структура $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, определяемая на распределении нулевой кривизны сасакиева многообразия, является SQS-структурой.*

Доказательство. Используя (15)–(18), нетрудно убедиться, что $d\lambda(\vec{x}^h,\vec{y}^h) = d\eta(\vec{x},\vec{y})$, $d\lambda(\vec{x}^v,\vec{y}^h) = 0$, $d\lambda(\vec{x}^v,\vec{y}^v) = 0$, $d\lambda = (\vec{z},\vec{\xi}^h)$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$, $\vec{z} \in \Gamma(TD)$.

Найдем условия, при которых

$$\tilde{N}_J = N_J + 2d\lambda \otimes \vec{u} = 0.$$

Воспользовавшись структурными уравнениями, для $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$ получаем:

$$\tilde{N}_J(\vec{x}^h,\vec{y}^h) = \left\{\tilde{N}_\varphi(\vec{x},\vec{y})\right\}^h + \{R(\vec{x},\vec{y})\vec{p} - R(\varphi\vec{x},\varphi\vec{y})\vec{p} + \varphi R(\varphi\vec{x},\vec{y})\vec{p} + \varphi R(\vec{x},\varphi\vec{y})\vec{p}\}^v\,,$$

$$\tilde{N}_J(\vec{x}^h,\vec{\xi}^h) = \{-P(\vec{x},\vec{p}) - \varphi P(\varphi\vec{x},\vec{p})\}^v\,,$$

$$\tilde{N}_J(\vec{x}^h,\vec{y}^v) = \tilde{N}_J(\vec{x}^v,\vec{\xi}^h) = 0.$$

Учитывая, что обращение в нуль тензора Схоутена влечет равенство $P(\vec{x},\vec{y}) = 0$ (Предложение 6), убеждаемся в том, что продолженная структура является нормальной почти контактной метрической структурой.

Непосредственно проверяется замкнутость фундаментальной формы продолженной структуры. Тем самым теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букушева, А. В. О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью / А. В. Букушева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2015. — Вып. 40. — № 17 (214). — С. 20–24.

2. Букушева, А. В. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой / А. В. Букушева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 3. — С. 247–251.

3. Вагнер, В. В. Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве / В. В. Вагнер // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. — Вып. 5. — С. 173–255.

4. Галаев, С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий / С. В. Галаев // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, вып. 1. — С. 16–22.

5. Галаев, С. В. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой / С. В. Галаев // Сибирский математический журнал. — 2016. — Т. 57, вып. 3. — С. 632–640. — DOI: 10.1134/S0037446616030101.

6. Галаев, С. В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны / С. В. Галаев // Изв. вузов. Математика. — 2014. — № 8. — С. 42–52. — DOI: 10.3103/S1066369X14080040.

7. Галаев, С. В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью / С. В. Галаев // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, вып. 3. — С. 258–264. — DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.

8. Галаев, С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью / С. В. Галаев // Математические заметки СВФУ. — 2015. — Вып. 1. — С. 25–34.

9. Кириченко, В. Ф. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий / В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов // Мат. сб. — 2002. — Т. 193, № 8. — С. 71–100.

10. Соловьев, А. Ф. Контактные метрические многообразия и классы Чжэня / А. Ф. Соловьев // Изв. вузов. Математика. — 1987. — № 1 (296). — С. 33–41.

11. Blair, D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry / D. E. Blair. — Berlin ; New York : Springer-Verlag, 1976. — 148 p.

12. Boyer, C. P. On eta-Einstein Sasakian geometry / C. P. Boyer, K. Galicki, P. Matzeu // Comm. Math. Phys. — 2006. — Vol. 262, № 1. — P. 177–208.

13. Schouten, J. Zur Einbettungs-und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde / J. Schouten, E. van Kampen // Math. Ann. — 1930. — Vol. 103. — P. 752–783.

14. Vezzoni, L. Connections on contact manifolds and contact twistor spaces / L. Vezzoni // Israel J. Math. — 2010. — № 178. — P. 253–267.

REFERENCES

1. Bukusheva A.V. O geometrii kontaktnykh metricheskikh prostranstv s φ-svyaznostyu [The Geometry of the Contact Metric Spaces with φ-Connection]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika*, 2015, iss. 40, no. 17 (214), pp. 20-24.

2. Bukusheva A.V. Sloeniya na raspredeleniyakh s finslerovoy metrikoy [Foliation on Distribution with Finslerian Metric]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 247-251.

3. Vagner V.V. Geometriya $(n-1)$-mernogo negolonomnogo mnogoobraziya v n-mernom prostranstve [The Geometry of a $(N-1)$-Dimensional Nonholonomic Manifold in a n-Dimensional Space]. *Tr. seminara po vektornomu i tenzornomu analizu.* Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 173-255.

4. Galaev S.V. Vnutrennyaya geometriya metricheskikh pochti kontaktnykh mnogoobraziy [The Intrinsic Geometry of Almost Contact Metric Manifolds]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 16-22.

5. Galaev S.V. Geometricheskaya interpretatsiya tenzora krivizny Vagnera dlya sluchaya mnogoobraziya s kontaktnoy metricheskoy strukturoy [Geometric Interpretation of the Wagner Curvature Tensor in the Case of a Manifold with Contact Metric Structure]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 2016, vol. 57, iss. 3, pp. 632-640. DOI: 10.1134/S0037446616030101.

6. Galaev S.V. Pochti kontaktnye kelerovy mnogoobraziya postoyannoy golomorfnoy sektsionnoy krivizny [Almost Contact Kählerian Manifolds of Constant Holomorphic Sectional Curvature]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2014, no. 8, pp. 42-52. DOI: 10.3103/S1066369X14080040.

7. Galaev S.V. Pochti kontaktnye metricheskie prostranstva s N-svyaznostyu [Almost Contact Metric Spaces with N-Connection]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 258-264. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.

8. Galaev S.V. Pochti kontaktnye metricheskie struktury, opredelyaemye N-prodolzhennoy svyaznostyu [Almost Contact Metric Structures Defined by N-Prolonged Connection]. *Matematicheskie zametki SVFU* [Mathematical Notes of NEFU], 2015, iss. 1, pp. 25-34.

9. Kirichenko V.F., Rustanov A.R. Differentsialnaya geometriya kvazi-sasakievykh mnogoobraziy [Differential Geometry of Quasi-Sasakian Manifolds]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2002, vol. 193, no. 8, pp. 71-100.

10. Solov'ev A.F. Kontaktnye metricheskie mnogoobraziya i klassy Chzhenya [Contact Metric Manifolds and Chern Classes]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1987, no. 1 (296), pp. 33-41.

11. Blair D.E. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1976. 148 p.

12. Boyer C.P., Galicki K., Matzeu P. On Eta-Einstein Sasakian Geometry. *Comm. Math. Phys.*, 2006, vol. 262, no. 1, pp. 177-208.

13. Schouten J., Kampen E. van. Zur Einbettungs-Und Krümmungstheorie Nichtholonomer Gebilde. *Math. Ann.*, 1930, vol. 103, pp. 752-783.

14. Vezzoni L. Connections on Contact Manifolds and Contact Twistor Spaces. *Israel J. Math.*, 2010, no. 178, pp. 253-267.

ON DISTRIBUTIONS WITH SPECIAL QUASI-SASAKIAN STRUCTURE

Sergei Vasilyevich Galaev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Geometry,
Saratov State University
sgalaev@mail.ru
Astrakhanskaya St., 83, 410012 Saratov, Russian Federation

Abstract. In the paper, the notion of an almost contact metric structure $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$ of the first order is introduced. On an almost contact metric manifold M satisfying the condition $rkd\eta = 2p$, $2p < 2m$, $2p \neq 0$, is defined the integrable distribution K that is equal to the kernel of the form $\omega = d\eta$. In this case, on the manifold M appears the decomposition $TM = L \oplus L^{\perp} \oplus D^{\perp}$, where $L^{\perp} = K \cap D$, and L is its orthogonal distribution in D. An almost contac metric structure is called in the paper the structure of the first order, if the distribution L is invariant under the action of the endomorphism φ. If an almost contact metric structure of the first order is a quasi-Sasakian structure and it holds $d\eta(\vec{x},\vec{y}) = \Omega(\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(L)$, where $\Omega(\vec{x},\vec{y})$ is the fundamental form of the structure, then such a structure is called a special quasi-Sasakian structure (SQS-structure), and the manifold M is called a SQS-manifold. On the manifold M, an interior connection ∇ and the corresponding associated connection ∇^A are defined. The curvature tensor of the interior connection is called the Schouten tensor. The properties of the Schouten tensor are studied. In particular, it is shown that the Schouten tensor is zero if and only if there exists an atlas consisting of adapted charts with respect to that the Christoffel components of the interior connection are zero. The distribution of an almost contact metric structure with zero Schouten tensor is called in the paper the distribution of zero curvature. On the distribution D of a manifold M with a contact metric structure $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$, an almost contact metric structure $(D,J,\vec{u},\lambda = \eta\circ\pi_*,\tilde{g},\tilde{D})$, is defined, which is a structure of the first order, and it is called an extended almost contact metric structure. It is shown that an extended structure is a SQS-structure, if the initial manifold M is a Sasakian manifold with a distribution of zero curvature.

Key words: quasi-Sasakian manifolds, interior connection, associated connection, Schouten curvature tensor, distribution of zero curvature.