



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.1>

УДК 514.142.2+514.174.6

ББК 32.973.26-018.2

ОЦЕНКИ РАДИУСА ПРОСВЕТА КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ЕДИНИЧНОГО ШАРА В \mathbb{R}^n

Анна Владимировна Болучевская

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
a.v.boluch@gmail.com, a.v.boluch@volsu.ru, kiem@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Владимир Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
klchnv@mail.ru, kiem@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Михаил Евгеньевич Сапралиев

Магистрант кафедры алгебры и анализа,
Калмыцкий государственный университет
13bit57@gmail.com
ул. Пушкина, 11, 358000 г. Элиста, Республика Калмыкия, Российская Федерация

Аннотация. Кусочно-линейная аппроксимация гладких функций, заданных на триангуляциях, не обеспечивает сходимости производных, что подтверждается классическим примером Шварца. Тем не менее в плоском случае, если триангуляция является триангуляцией Делоне (то есть выполнено условие пустой сферы), сходимость производных имеет место. В то же время в многомерном случае условия пустой сферы уже недостаточно, поэтому в [1] было сформулировано модифицированное условие пустой сферы, обеспечивающее необходимую аппроксимацию. В этом условии участвует величина $\eta_{k,n}$, исследованию которой посвящена статья.

Ключевые слова: триангуляция, условие пустой сферы, триангуляция Делоне, выпуклое множество, выпуклая функция, выпуклая оболочка.

Введение

Пусть в \mathbb{R}^n задан конечный набор точек $P = \{P_i\}$, $i = 1, \dots, N$.

Широко известна классическая задача: для функции $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ приближенно вычислить ее производные по известным значениям функции в точках P_i . Один из методов решения такой задачи основан на построении триангуляции T множества точек P .

Если симплекс S триангуляции T имеет вершины $p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_n} \in P$, то можно найти функцию вида

$$f_S(x) = \langle a, x \rangle + b$$

такую, что

$$f(p_{i_k}) = f_S(p_{i_k}), \quad k = 0, \dots, n.$$

Тогда приближенным значением градиента $\nabla f(x)$ для точек $x \in S$ можно считать значение градиента этой линейной функции $\nabla f_S(x)$.

Введем обозначение

$$\delta_S(f) = \max_{x \in S} |\nabla f(x) - \nabla f_S(x)|$$

для абсолютной погрешности вычисления градиента. Традиционно получают оценки этой величины для произвольных триангуляций с использованием интерполяционных многочленов в терминах геометрии треугольников. Однако поведение погрешности $\delta_S(f)$ при уменьшении диаметров симплексов тесно связано не только со структурой симплекса, определяющей степень его невырожденности, но и с геометрией триангуляции в целом.

Напомним, что триангуляция T называется триангуляцией Делоне, если выполнено условие пустоты сферы: для всякого симплекса $S \in T$ его описанная сфера не содержит внутри себя точек набора P [4; 5].

В работе [3] и частично в работе [6] было доказано, что при $n = 2$ для триангуляции Делоне набора точек P , образующих ε -сеть, справедлива оценка

$$\max_{S \in T} \delta_S(f) \leq C(f)\varepsilon,$$

где константа $C(f)$ зависит от класса функции.

В.А. Клячиным были предприняты попытки получить аналогичный результат для пространств размерности больше 3. Однако, как показано в [2], в многомерном случае для существования подобной оценки недостаточно одного условия пустой сферы. Поэтому в [1] было сформулировано модифицированное условие пустой сферы.

При выполнении этого условия для погрешности вычисления градиента справедливо неравенство вида

$$\max_{S \in T} \delta_S(f) \leq C(f) \cdot \varepsilon / \eta_{k,n},$$

где $C(f)$ — константа, зависящая от класса функции, а $\eta_{k,n}$ определяется следующим образом.

Пусть $B(x, t)$ обозначает открытый шар радиуса $t > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\eta_{k,n} = \inf_{q_1, \dots, q_k \in B(0,1)} \sup_{y_0 \in B(0,1)} \{ \rho : B(y_0, \rho) \subset B(0,1) \setminus \{q_1, \dots, q_k\} \}.$$

Геометрический смысл величины $\eta_{k,n}$ состоит в том, что какие бы k точек из $B(0,1)$ ни взять, найдется открытый шар радиуса $\eta_{k,n}$, лежащий внутри шара $B(0,1)$ и не содержащий заданных k точек. Ясно, что для всех k, n выполнено $\eta_{k,n} > 0$.

Данная статья посвящена результатам исследования величины $\eta_{k,n}$.

1. Основные свойства $\eta_{k,n}$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Величина $\eta_{k,n}$ монотонно стремится к 0 при увеличении количества точек, то есть

$$\eta_{k,n} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty.$$

Доказательство. Пусть для всякого k имеем единственный шар максимального радиуса r , который лежит внутри $B(0,1)$ и не содержит заданных k точек. Следовательно, добавление $(k+1)$ -й точки не может увеличить радиус r (только уменьшить или оставить прежним). Предположим, что для произвольной $(k+1)$ -й точки существует шар максимального радиуса r_1 , не содержащий заданных $k+1$ точек, такой, что $r_1 > r$. Получаем противоречие. Таким образом, $r_1 \leq r$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. Величина $\eta_{k,n}$ не убывает с ростом размерности пространства, то есть при $n > 1$ имеет место оценка

$$\eta_{k,n} \geq \eta_{k,n-1}.$$

Доказательство. Пусть

$$B_n(0,1) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1 \right\},$$

$$B_{n-1}(0,1) = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 1 \right\}.$$

Рассмотрим точки $p_1, \dots, p_k \in B_n(0,1)$. Пусть p'_1, \dots, p'_k — их проекции на плоскость $x_n = 0$. Тогда найдется шар $B_{n-1}(p_0, r) \subset B_{n-1}(0,1) \setminus \{p'_1, \dots, p'_k\}$ и $r \geq \eta_{k,n-1}$. Поскольку $B_n(p_0, r)$ лежит внутри цилиндра

$$\left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 1 \right\},$$

то

$$B_n(p_0, r) \subset B_n(0,1) \setminus \{p_1, \dots, p_k\}.$$

Отсюда $\eta_{k,n} \geq r \geq \eta_{k,n-1}$. Теорема доказана.

Кроме того, нами получена следующая оценка.

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$\eta_{k,n} > \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt[n]{k+1} + 1)}.$$

Доказательство. Рассмотрим целое число q такое, что

$$\sqrt[n]{k+1} \leq q \leq \sqrt[n]{k+1} + 1.$$

Впишем в шар $B_n(0, 1)$ куб со стороной $\frac{2}{\sqrt[n]{n}}$. Разделим его стороны на q частей. В результате получим более мелкие кубы со стороной $a = \frac{2}{q\sqrt[n]{n}}$. При этом число таких кубов будет $q^n \geq k+1$. Хотя бы один из этих кубов не будет содержать точек p_1, \dots, p_k . Шар, вписанный в такой куб, также не содержит точек p_1, \dots, p_k . Его радиус равен

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{\sqrt[n]{n}q} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n}(\sqrt[n]{k+1} + 1)}.$$

Таким образом,

$$\eta_{k,n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n}(\sqrt[n]{k+1} + 1)}.$$

Теорема доказана.

Для некоторых k и n были получены точные значения $\eta_{k,n}$.

Утверждение 1. *Пусть $n = 1$, число точек k — произвольно. Тогда $\eta_{k,1} = \frac{1}{k+1}$.*

Доказательство. Если $n = 1$, то шар представляет собой отрезок длины 2.

Разделим его на $k+1$ равных частей длиной $\frac{2}{k+1}$ (рис. 1).

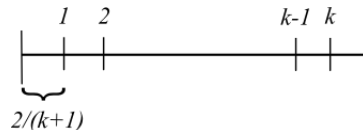


Рис. 1. Разбиение отрезка на $k+1$ равных частей

Ясно, что одна из частей не будет содержать внутри себя точек набора q_1, \dots, q_k . Таким образом, для любого набора q_1, \dots, q_k найдется шар радиуса $\frac{1}{k+1}$, не содержащий внутри себя точек этого набора. Следовательно, $\eta_{k,1} \geq \frac{1}{k+1}$.

С другой стороны, если точки q_1, \dots, q_k расположены таким образом, что делят отрезок на $k+1$ равных частей (рис. 2), то максимальный радиус шара, не содержащего внутри себя точек этого набора, равен $\frac{1}{k+1}$. То есть $\eta_{k,1} \leq \frac{1}{k+1}$.

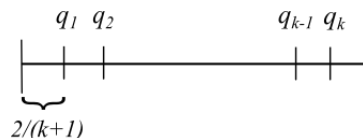


Рис. 2. Разбиение отрезка точками q_1, \dots, q_k на $k+1$ равных частей

Отсюда получаем, что $\eta_{k,1} = \frac{1}{k+1}$.

Утверждение 2. Пусть n — произвольно, а $k \leq n$. Тогда $\eta_{k,n} = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Набор q_1, \dots, q_k задает k точек, через которые возможно провести k -мерную плоскость, разделяющую единичный шар на 2 части (рис. 3). При этом полушары не содержат внутри себя точек q_1, \dots, q_k .

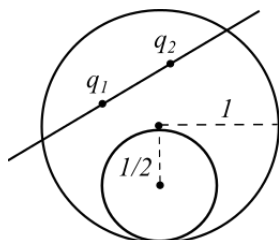


Рис. 3. Через точки q_1, \dots, q_k проведена k -мерная плоскость

Ясно, что внутри одной из этих частей всегда можно поместить открытый шар радиуса не меньше $\frac{1}{2}$. Следовательно, $\eta_{k,n} \geq \frac{1}{2}$ при $k \leq n$.

С другой стороны, пусть одна из точек q_i набора q_1, \dots, q_k совпадает с центром шара (рис. 4). Любой шар радиуса больше $\frac{1}{2}$ будет содержать в себе точку q_i . Следовательно, $\eta_{k,n} \leq \frac{1}{2}$ при $k \leq n$.

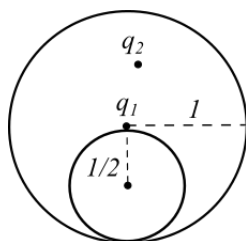


Рис. 4. Одна из точек набора q_1, \dots, q_k совпадает с центром шара

Отсюда получаем, что $\eta_{k,n} = \frac{1}{2}$ при $k \leq n$.

Утверждение 3. Пусть $n = 2$, а $k = 3$. Тогда $\eta_{3,2} = 2\sqrt{3} - 3$.

Доказательство. Имеется набор q_1, q_2, q_3 , лежащий внутри единичного круга. Из центра круга проведем лучи, проходящие через точки q_1, q_2, q_3 . Лучи делят круг на 3 части, не содержащие внутри q_1, q_2, q_3 (рис. 5).

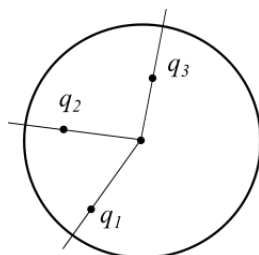


Рис. 5. Из центра круга проведены лучи, проходящие через точки q_1, q_2, q_3

Один из углов, образованных лучами, не меньше $\frac{2\pi}{3}$. То есть всегда найдется сектор круга с центральным углом величины $\frac{2\pi}{3}$, внутри которого можно поместить круг, не содержащий q_1, q_2, q_3 . Радиус r_{\min} этого круга определяется как радиус окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 6).

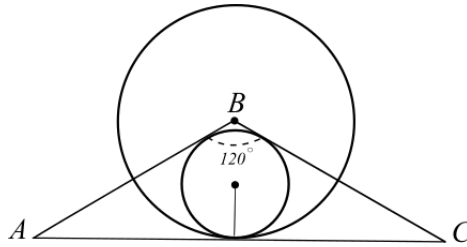


Рис. 6. Круг радиуса r_{\min} , не содержащий точек q_1, q_2, q_3

Имеем $r_{\min} = 2\sqrt{3} - 3$. Следовательно, $\eta_{3,2} \geq 2\sqrt{3} - 3$.

Рассмотрим теперь набор q_1, q_2, q_3 такой, что точки q_1, q_2, q_3 образуют равносторонний треугольник, центр которого совпадает с центром круга (рис. 7). Обозначим a — длину стороны треугольника. Проведем окружность, проходящую через две вершины треугольника и касающуюся единичной окружности.

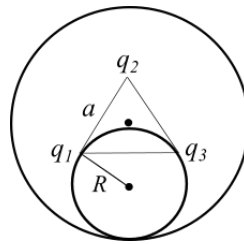


Рис. 7. Максимальный круг, лежащий внутри единичного и не содержащий точек q_1, q_2, q_3

Радиус R этой окружности связан с a следующим образом:

$$R = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a^2 - a + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - a}.$$

Отсюда, если $a = 2\sqrt{3} - 3$, то $R = 2\sqrt{3} - 3$. В таком случае круг радиуса $R = 2\sqrt{3} - 3$ является максимальным кругом, лежащим внутри единичного и не содержащим точек q_1, q_2, q_3 . Это справедливо, поскольку радиус круга, описанного вокруг треугольника, равен $2 - \sqrt{3}$, что меньше R . В то же время внутрь любого круга радиуса больше R обязательно попадет одна из точек q_1, q_2, q_3 . Таким образом, $\eta_{3,2} \leq 2\sqrt{3} - 3$.

Отсюда получаем, что $\eta_{3,2} = 2\sqrt{3} - 3$.

Утверждение 4. Пусть $n = 2$, а $k = 4$. Тогда $\eta_{4,2} = \sqrt{2} - 1$.

Доказательство. Имеется набор q_1, q_2, q_3, q_4 , лежащий внутри единичного круга. Из центра круга проведем лучи, проходящие через точки q_1, q_2, q_3, q_4 . Лучи делят круг на 4 части, не содержащие внутри q_1, q_2, q_3, q_4 . Один из углов, образованных лучами, не меньше $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 8).

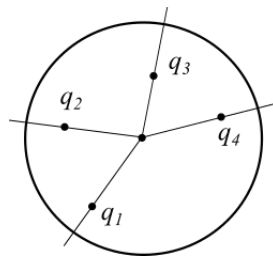


Рис. 8. Из центра круга проведены лучи, проходящие через точки q_1, q_2, q_3, q_4

То есть всегда найдется сектор круга с центральным углом величины $\frac{\pi}{2}$, внутри которого можно поместить круг, не содержащий q_1, q_2, q_3, q_4 . Радиус r_{\min} этого круга определяется как радиус окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 9).

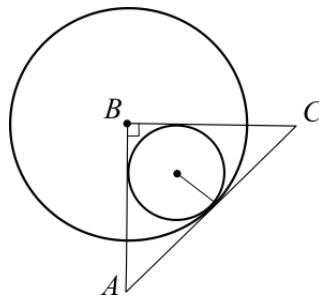


Рис. 9. Круг радиуса r_{\min} , не содержащий точек q_1, q_2, q_3, q_4

Имеем $r_{\min} = \sqrt{2} - 1$. Следовательно, $\eta_{4,2} \geq \sqrt{2} - 1$.

Рассмотрим теперь набор q_1, q_2, q_3, q_4 такой, что точки q_1, q_2, q_3, q_4 образуют квадрат, центр которого совпадает с центром круга (рис. 10). Обозначим a — длину стороны квадрата. Проведем окружность, проходящую через две вершины квадрата, принадлежащие одной стороне, и касающуюся единичной окружности.

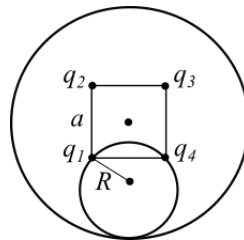


Рис. 10. Максимальный круг, лежащий внутри единичного и не содержащий точек q_1, q_2, q_3, q_4

Радиус R этой окружности связан с a следующим образом:

$$R = \frac{-a^2 + 2a - 2}{2a - 4}.$$

Отсюда, если $a = 2 - \sqrt{2}$, то $R = \sqrt{2} - 1$. В таком случае круг радиуса $R = \sqrt{2} - 1$ является максимальным кругом, лежащим внутри единичного и не содержащим точек q_1, q_2, q_3, q_4 . Это справедливо, поскольку радиус круга, описанного вокруг квадрата, равен $\sqrt{2} - 1$, что равно R . В то же время внутрь любого круга радиуса больше R обязательно попадет одна из точек q_1, q_2, q_3, q_4 . Таким образом, $\eta_{4,2} \leq \sqrt{2} - 1$.

Отсюда получаем, что $\eta_{4,2} = \sqrt{2} - 1$.

Вычисление величины $\eta_{k,n}$ в общем случае затруднительно, поэтому было решено разработать приближенный алгоритм для определения пустого круга максимального радиуса, то есть величины

$$\sup_{y_0 \in B(0,1)} \{\rho : B(y_0, \rho) \subset B(0,1) \setminus \{q_1, \dots, q_k\}\}.$$

2. Алгоритм поиска пустого круга максимального радиуса

Ниже дано описание работы алгоритма вычисления пустого круга максимального радиуса. Алгоритм разбивается на три блока.

Первый блок — рассматриваются все точки заданного конечного множества точек (рис. 11).

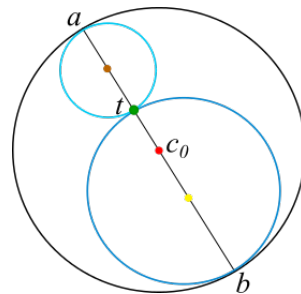


Рис. 11. Обработка кругов в первом блоке алгоритма

- 1) Строится отрезок с концами a и b , проходящий через текущую точку (в цикле обозначим t) и центр единичной окружности c_0 .
- 2) Диагональ разбивается на два отрезка $[a, t]$ и $[t, b]$.
- 3) Находим середину отрезка $[a, t]$ — предполагаемый центр искомой окружности c .
- 4) Расстояние от t до предполагаемого центра есть предполагаемый радиус r .
- 5) Запускаем цикл проверки вхождения других точек в предполагаемые окружности.
- 6) Условие в цикле: если расстояние от текущей точки в цикле до c меньше r , отмечаем флаг вхождения.
- 7) Если флаг не активен, запоминаем радиус и координаты центра.
- 8) Повторяем операции 3–6 для второго отрезка $[t, b]$.

Второй блок — рассматриваются пары точек (t_1, t_2) (рис. 12).

- 1) Отмечаем точку t_3 между двумя точками пары.
- 2) Строим отрезок $[t_1, t_2]$.
- 3) Поворачиваем отрезок на 90 градусов и экстраполируем его до пересечения с единичной окружностью в точках t_{01}, t_{02} .
- 4) Строим отрезки $[t_3, t_{01}]$ и $[t_3, t_{02}]$, задаем $p = 1$.
- 5) Получаем точку q на прямой, содержащей отрезок $[t_3, t_{01}]$. При значении параметра $p = 1$ получаем t_{01} , при $p = 0$ получаем точку t_3 .

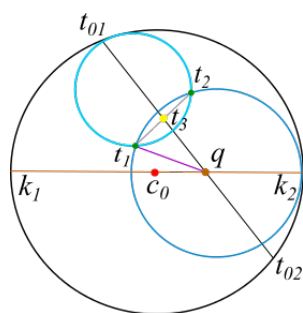


Рис. 12. Обработка кругов во втором блоке алгоритма

- 6) Строим диагональ, проходящую через q и c_0 , с концами k_1 , k_2 .
- 7) Находим существенную точку ess среди k_1 и k_2 — точку, чье расстояние до q меньше.
- 8) Вычисляем абсолютную разность между расстоянием от ess до q и расстоянием от t_1 до q . Обозначим ее res .
- 9) В цикле повторяем шаги 5–8, пока $p > 0$, уменьшая p на заданную величину dp .
- 10) Внутри цикла проверяем разность res . Если $res \leq EPS$, где EPS — заранее заданная константа, то расстояние от q до t_1 есть предполагаемый радиус, а q — предполагаемый центр.
- 11) Проверяем на вхождение других точек и запоминаем найденные величины.
- 12) Прodelываем шаги 5–11 для другого отрезка $[t_3, t_{02}]$.

Третий блок — рассматриваются тройки точек (t_1, t_2, t_3) (рис. 13).

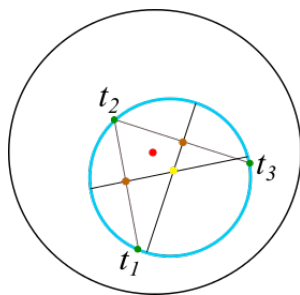


Рис. 13. Обработка кругов в третьем блоке алгоритма

- 1) Строим отрезки $[t_1, t_2]$ и $[t_2, t_3]$.
- 2) Находим точку e как пересечение серединных перпендикуляров описанных выше отрезков.
- 3) Расстояние d от e до t_1 — предполагаемый радиус.
- 4) Проверяем на выход за пределы единичного круга: сумма d и расстояния от e до c_0 должна быть меньше 1.
- 5) Проверяем на вхождение других точек. В отсутствии вхождения — запоминаем вычисленные данные.

Рассчитываем максимальный радиус из предполагаемых, которые запомнили в результате работы трех блоков программы.

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области (проект № 15-41-02517 р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клячин, В. А. Модифицированное условие пустой сферы Делоне в задаче аппроксимации градиента / В. А. Клячин // Изв. РАН. Сер. мат. — 2016. — Т. 80, № 3. — С. 95–102.
2. Клячин, В. А. О многомерном аналоге примера Шварца / В. А. Клячин // Изв. РАН. Сер. мат. — 2012. — Т. 76, № 4. — С. 41–48.
3. Клячин, В. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства / В. А. Клячин, А. А. Широкий // Изв. вузов. Мат. — 2012. — № 1. — С. 31–39.
4. Скворцов, А. В. Алгоритмы построения и анализа триангуляции / А. В. Скворцов, Н. С. Мирза. — Томск : Изд-во Том. ун-та, 2006. — 168 с.
5. Delaunay, B. N. Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi / B. N. Delaunay // Известия АН СССР. — 1934. — № 6. — С. 793–800.
6. Shewchuk, J. R. What is a good linear finite element? Interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures : preprint / J. R. Shewchuk. — Berkeley : Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, 2002. — 66 p.

REFERENCES

1. Klyachin V.A. Modifitsirovannoe uslovie pustoy sfery Delone v zadache approksimatsii gradienta [Modified Delaunay Empty Sphere Condition in the Problem of Approximation of the Gradient]. *Izv. RAN. Ser. mat.* [Izvestiya: Mathematics], 2016, vol. 80, no. 3, pp. 95-102.
2. Klyachin V.A. O mnogomernom analoge primera Shvartsa [On a Multidimensional Analogue of the Schwarz Example]. *Izv. RAN. Ser. mat.* [Izvestiya: Mathematics], 2012, vol. 76, no. 4, pp. 41-48.
3. Klyachin V.A., Shirokiy A.A. Triangulyatsiya Delone mnogomernykh poverkhnostey i ee approksimatsionnye svoystva [The Delaunay Triangulation for Multidimensional Surfaces and Its Approximative Properties]. *Izv. vuzov. Mat.* [Russian Mathematics], 2012, no. 1, pp. 31-39.
4. Skvortsov A.V., Mirza N.S. *Algoritmy postroeniya i analiza triangulyatsii* [Algorithms of Triangulations Design and Analysis]. Tomsk, Izd-vo Tom. un-ta, 2006. 168 p.
5. Delaunay B.N. Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi. *Izvestiya AN SSSR* [Izvestiya: Mathematics], 1934, no. 6, pp. 793-800.
6. Shewchuk J.R. *What is a good linear finite element? Interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures: preprint*. Berkeley, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, 2002. 66 p.

**ESTIMATIONS OF CLEARANCE RADIUS FOR FINITE SUBSET
OF A UNIT BALL IN \mathbb{R}^n**

Anna Vladimirovna Boluchevskaya

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer, Department
of Computer Science and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
a.v.boluch@gmail.com, a.v.boluch@volsu.ru, kiem@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Vladimir Aleksandrovich Klyachin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department
of Computer Science and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
klehvn@mail.ru, kiem@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Mikhail Evgenyevich Sapraliev

Master Student, Department of Algebra and Analysis,
Kalmyk State University
13bit57@gmail.com
Pushkina St., 11, 358000 Elista, Republic of Kalmykiya, Russian Federation

Abstract. Let $P = \{P_i\}$, $i = 1, \dots, N$, be a finite set of points in \mathbb{R}^n .

Consider a classical problem — approximation of derivatives of function $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ using function values at points P_i . One method of solving this problem is based on building triangulation T of set P .

If $p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_n} \in P$ are vertices of simplex S in triangulation T then we may find a function

$$f_S(x) = \langle a, x \rangle + b,$$

such that

$$f(p_{i_k}) = f_S(p_{i_k}), \quad k = 0, \dots, n.$$

Then we can approximate gradient $\nabla f(x)$ in points $x \in S$ by gradient of linear function $\nabla f_S(x)$.

By $\delta_S(f)$ denote an absolute error of gradient computation

$$\delta_S(f) = \max_{x \in S} |\nabla f(x) - \nabla f_S(x)|.$$

If simplexes diameters are getting smaller then behavior of $\delta_S(f)$ is connected not only with simplexes structure but also with triangulation geometry in whole.

Let us remind that triangulation T is called Delaunay triangulation if an empty sphere condition holds: for every simplex $S \in T$ its circumsphere does not contain points of P inside of itself ([4; 5]).

In paper [3] and partially in paper [6] it was proven that if $n = 2$ and a set of points P is an ε -net then the following estimate is true for Delaunay triangulation of P

$$\max_{S \in T} \delta_S(f) \leq C(f)\varepsilon,$$

where constant $C(f)$ depends on the function class.

V.A. Klyachin tried to get an analogous result for spaces of dimensions more than 3. But in [2] it was shown that in a multidimensional case an empty sphere condition is not enough for getting a similar estimate. Therefore in [1] a modified empty sphere condition was given.

If this modified empty sphere condition holds then the following inequality is true

$$\max_{S \in T} \delta_S(f) \leq C(f) \cdot \varepsilon / \eta_{k,n},$$

where $C(f)$ is a constant depending on the function class, and $\eta_{k,n}$ is defined in the following way.

Let $B(x, t)$ be an open ball of radius $t > 0$ with a center in $x \in \mathbb{R}^n$. Then

$$\eta_{k,n} = \inf_{q_1, \dots, q_k \in B(0,1)} \sup_{y_0 \in B(0,1)} \{\rho : B(y_0, \rho) \subset B(0, 1) \setminus \{q_1, \dots, q_k\}\}.$$

This paper is devoted to studying $\eta_{k,n}$.

Key words: triangulation, empty sphere condition, Delaunay triangulation, convex set, convex function, convex hull.