DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.10

УДК 517.95
ББК 22.161.6

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ [1]

Елена Алексеевна Мазепа

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
elena.mazepa@volsu.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В данной работе, используя достаточно новый подход к постановке краевых задач на произвольном некомпактном римановом многообразии M, основанный на введении классов эквивалентных на M функций, устанавливается зависимость между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для уравнения Пуассона на M.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, краевая и внешняя краевая задачи, некомпактные римановы многообразия, задача Дирихле, классы эквивалентности функций.

Введение

Проблема разрешимости различных краевых задач (в том числе задачи Дирихле) для эллиптических дифференциальных уравнений на римановых многообразиях с предписанными граничными данными на «бесконечности» является достаточно интересной проблемой в анализе и геометрии. Истоки указанной проблематики восходят к классификационной теории некомпактных римановых многообразий, основанной на изучении функциональных пространств (например, пространств гармонических функций) на римановых многообразиях. Многие проблемы, относящиеся к данному направлению, можно сформулировать в виде теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность пространств ограниченных решений некоторых эллиптических уравнений на многообразии (см.: [13; 14; 20]).

Проблема разрешимости задачи Дирихле о восстановлении решения эллиптического уравнения по граничным данным на «бесконечности» является в некотором смысле двойственной по отношению к справедливости теоремы Лиувилля на многообразии.

С этой точки зрения наибольший интерес представляют некомпактные и особенно полные римановы многообразия. В ряде случаев сама постановка задачи Дирихле на таких многообразиях является достаточно затруднительной, поскольку не ясно, как понимать граничные данные. В некоторых ситуациях, если многообразие допускает некоторую геометрическую компактификацию (например, многообразия отрицательной секционной кривизны, модельные или сферически-симметричные многообразия), то постановка краевых задач на нем, в том числе и задачи Дирихле, осуществляется также, как и для ограниченных областей в R^n (см., например, [7; 12; 18; 21]).

В последние годы опубликовано большое количество работ, посвященных вопросам разрешимости различных краевых задач для гармонических функций, для решений стационарного уравнения Шредингера, для некоторых других однородных линейных и квазилинейных эллиптических уравнений. При этом исследования неоднородных эллиптических уравнений носят единичный характер и посвящены преимущественно изучению асимптотического поведения решений этих уравнений (см.: [6; 15; 17; 19]).

В настоящей работе предлагается на произвольном гладком связном некомпактном римановом многообразии M, используя достаточно новый подход к постановке краевых задач, основанный на введении классов эквивалентных на многообразии M непрерывных функций, исследовать вопросы разрешимости краевых и внешних краевых задач для уравнения Пуассона

$$\Delta u = g(x), \tag{1}$$

где функция $g(x) \in C^{\gamma}(\Omega)$ для любого подмножества $\Omega \subset\subset M$, $0 < \gamma < 1$.

В частности, в работе устанавливается зависимость между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для уравнения (1) на произвольном некомпактном римановом многообразии.

Под решением уравнения (1) на многообразии M будем понимать функцию $u \in \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющую этому уравнению на любом компактном подмножестве $\Omega \subset \subset M$.

Ранее описываемый ниже подход, основанный на введении классов эквивалентных функций, был использован для изучения вопросов разрешимости краевых задач для уравнений Лапласа — Бельтрами, уравнения Шредингера, ряда полулинейных и квазилинейных эллиптических уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях (см., например, [5; 8–11; 16]).

Доказательство основных результатов работы опирается на классические утверждения теории уравнений в частных производных: принцип максимума, теоремы сравнения и единственности для решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений. Их справедливость на предкомпактных подмножествах многообразия M доказывается также как и для ограниченных областей в R^n (см., например, [1, с. 39–40]).

1. Основные понятия и вспомогательные утверждения

Пусть $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей ∂B и непустой внутренностью, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — произвольные непрерывные ограниченные на M функции.

Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M и обозначать $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \|f_1(x) - f_2(x)\|_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $\|f(x)\|_{C^0(G)} = \sup_G |f(x)|$.

Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$. Введенное отношение действительно является отношением эквивалентности (то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно), не зависит от выбора исчерпания многообразия M и характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$ (см., например, [5; 8–11; 16]).

Будем называть функцию f *асимптотически неотрицательной на* M (и обозначать $f \gtrsim 0$), если на M существует непрерывная ограниченная функция $w \geq 0$ такая, что $w \sim f$.

Будем говорить, что функция g *асимптотически не превосходит функцию* f на M (и обозначать $g \lesssim f$), если разность $f - g$ на M является асимптотически неотрицательной функцией.

Имеют место следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если $g \lesssim f$ и $f \lesssim g$ на M, то $g \sim f$ на M. Обратное утверждение также верно.*

Доказательство. Из данных выше определений следует, что на M существуют функции $w \geq 0$ и $v \geq 0$ такие, что $g - f \sim w$, $f - g \sim v$. Тогда $w \sim -v$, причем $-v \leq 0$, $w \geq 0$. Это возможно только, если $w \sim 0$ и $v \sim 0$ и, соответственно, $g \sim f$ на M.

Обратно, если $g \sim f$ на M, то $g - f \sim 0$ и $f - g \sim 0$. Функция $w \equiv 0$ является асимптотически неотрицательной, следовательно, $g \lesssim f$ и $f \lesssim g$ на M.

Лемма 2. (Принцип сравнения 1). *Пусть $\Delta v \leq \Delta u$ на $M \setminus B$, $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $v \sim u$. Тогда $v \geq u$ на $M \setminus B$.*

Пусть $\Delta v \leq \Delta u$ на M и $v \sim u$. Тогда $v \geq u$ на M.

Доказательство. Подробное доказательство данного утверждения приведено в [9].

Лемма 3. (Принцип сравнения 2). *Пусть $\Delta v \leq \Delta u$ на $M \setminus B$, $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $v \gtrsim u$. Тогда $v \geq u$ на $M \setminus B$.*

Пусть $\Delta v \leq \Delta u$ на M и $v \gtrsim u$. Тогда $v \geq u$ на M.

Доказательство. Допустим, что первое утверждение не верно. Обозначим

$$D = \{x \in M \setminus B : \ u(x) > v(x)\} \neq \emptyset \quad -$$

открытое подмножество в $M\setminus B$. Пусть D_0 — одна из ограниченных компонент связности подмножества D такая, что $u > v$ внутри D_0 и $u|_{\partial D_0} = v|_{\partial D_0}$ (если таковая существует). Рассмотрим в D_0 функцию $w = v - u < 0$. При этом выполнено $w|_{\partial D_0} = 0$ и $\Delta w = \Delta v - \Delta u \leq 0$ в D_0. Применяя к функции w в D_0 принцип сравнения для решений линейных эллиптических уравнений, имеем $w \geq 0$, что противоречит выбору области D_0.

Пусть теперь D_0 — одна из неограниченных компонент связности (если таковая существует), для которой выполнено $u|_{\partial D_0} = v|_{\partial D_0}$, $v < u$ внутри D_0 и $v \gtrsim u$ на M, то есть на M существует непрерывная ограниченная функция $w^+ \geq 0$ такая, что

$v - u \sim w^+$. Как и выше, рассмотрим в D_0 функцию $w = v - u < 0$. При этом $w|_{\partial D_0} = 0$, $\Delta w = \Delta v - \Delta u \leq 0$ в D_0 и $w \sim w^+$ (то есть w — асимптотически неотрицательная). Применяя принцип сравнения для решений линейных эллиптических уравнений в D_0 (см., например, [9]), получаем $w \geq 0$ и приходим к противоречию.

Доказательство второго утверждения леммы проводится аналогично.

Сформулируем теорему единственности решения краевых и внешних краевых задач для уравнения (1), соответственно на M и на $M \setminus B$.

Теорема 1. (Теорема единственности). *Пусть $\Delta v = g(x)$ и $\Delta u = g(x)$ на $M \setminus B$ и $v|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $v \sim u$. Тогда $w = u$ на $M \setminus B$.*

Пусть $\Delta v = g(x)$, $\Delta u = g(x)$ на M и $v \sim u$. Тогда $v = u$ на M.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из принципов сравнения 1 и 2.

Замечание. Заметим, что уравнение (1) является частным случаем более общего линейного уравнения $Lu = g(x)$. Здесь L — линейный эллиптический оператор вида

$$Lu \equiv \Delta u + \langle \mathbf{b}(x), \nabla u \rangle - c(x)u,$$

где $\mathbf{b}(x) = (b^1(x), \ldots, b^n(x))$ — векторное поле такое, что $b^i(x) \in C^{\gamma}_{loc}(M)$ для всех i $(0 < \gamma < 1)$, $c(x) \geq 0$ и $c(x) \in C^{\gamma}_{loc}(M)$. Все сформулированные выше вспомагательные утверждения, теорема единственности справедливы также и для уравнения $Lu = g(x)$. Доказательство проводится аналогично, как и для уравнения (1) (см., например, [9; 16]).

Далее пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k. Обозначим через v_k гармоническую в $B_k \setminus B$ функцию, удовлетворяющую условиям

$$v_k|_{\partial B} = 1, \qquad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Как и в [9] легко показать, что при $k \to \infty$ она монотонно возрастает и сходится к гармонической на $M \setminus B$ функции такой, что

$$v = \lim_{k \to \infty} v_k, \qquad 0 < v \leq 1, \qquad v|_{\partial B} = 1.$$

Заметим также, что функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$, и для уравнения Лапласа — Бельтрами функция v есть не что иное, как емкостный потенциал компакта B относительно многообразия M (см. [14]).

Многообразие M будем называть Δ-*строгим* многообразием, если для некоторого компакта $G \subset M$ существует емкостный потенциал v такой, что $v \in [0]$.

Будем говорить, что на M *разрешима краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$.

Пусть $\Phi(x) \in C(\partial B)$ — произвольная функция. Будем говорить, что на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями* $(\Phi, [f])$, если на $M \setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Замечание. Вопросы существования целых решений для однородных линейных и квазилинейных уравнений на некомпактных римановых многообразиях, а также взаимосвязь разрешимости различных краевых и внешних краевых задач на них подробно изучены в работах [2–5; 8–11; 16].

Следующие утверждения в некоторой степени обобщают для уравнения Пуассона результаты, полученные ранее для однородных линейных уравнений на произвольном некомпактном римановом многообразии M.

Всюду далее f — произвольная непрерывная ограниченная на M функция. Сформулируем основные результаты.

Теорема 2. *Пусть на $M \setminus B$ для любой константы A разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями $(A, [f])$. Тогда на M для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$.*

Следствие 1. *Пусть на $M \setminus B$ для произвольной непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями $(\Phi, [f])$. Тогда на M для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$.*

Теорема 3. *Пусть на Δ-строгом многообразии M разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$. Тогда на $M \setminus B$ для произвольной непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями $(\Phi, [f])$.*

2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2. Для начала заметим, что из разрешимости на $M \setminus B$ внешней краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями $(A, [f])$ для любой константы следует существование на $M \setminus B$ нетривиального емкостного потенциала $v \in [0]$.

Пусть $u_0 \in [f]$ — решение внешней краевой задачи для уравнения (1) на $M \setminus B$, удовлетворяющее $u_0|_{\partial B} = 0$. Продолжим функцию u_0 непрерывным образом на все M и обозначим продолжение через U_0. Далее рассмотрим последовательность функций ϕ_k, являющихся решением задач Дирихле

$$\begin{cases} \Delta\phi_k = g(x) \qquad \text{в} \quad B_k, \\ \phi_k\,|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим $\psi_k = \phi_k - U_0$. Тогда $\Delta\psi_k = \Delta\phi_k - \Delta U_0 = g(x) - h(x)$ и $\psi_k\,|_{\partial B_k} = 0$. Ясно, что $\operatorname{supp}\{g(x) - h(x)\}$ лежит в некоторой окрестности компакта B.

Далее пусть G_k — функция Грина оператора Лапласа в B_k, то есть функция, которая для каждого $y \in B_k$ удовлетворяет условию

$$\Delta_x G_k(x, y) = -\delta_y(x), \qquad G_k\,|_{x \in \partial B_k} = 0,$$

где $\delta_y(x)$ — δ-функция Дирака. Тогда

$$\psi_k(x) = -\int\limits_{B_k} G_k(x, y)(g(y) - h(x))dy.$$

Заметим, что существование нетривиального емкостного потенциала $v \in [0]$ эквивалентно непараболичности типа многообразия M и, следовательно, существованию функции Грина $G(x, y) = \lim\limits_{k\to\infty} G_k(x, y)$ на всем многообразии M при $x \neq y$ (см., например, [14]). Существование функции Грина $G(x, y)$ включает в себя существование предела последовательности $\{\phi_k\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k = \psi$. Тогда $\Delta\psi = g(x) - h(x)$ on M. Последнее влечет за собой существование предела последовательности $\{\phi_k\}$. Причем $\phi = \lim\limits_{k\to\infty}\phi_k = \lim\limits_{k\to\infty}\psi_k + U_0 = \psi + U_0$. Следовательно, $\Delta\phi = \Delta(\psi + U_0) = g(x) - h(x) + h(x) = g(x)$ on M. Покажем, что $\phi \in [f]$.

Действительно, в силу непрерывности функции $\phi(x)$ существуют

$$A = \max_{\partial B}|\phi(x)|.$$

Тогда $-(A+1) \le \phi|_{\partial B} \le A+1$ и, следовательно, при достаточно больших k выполнено

$$-(A+1) \le \phi_k|_{\partial B} \le A+1.$$

Учитывая, что $u_0|_{\partial B} = 0$, имеем

$$-(A+1) \le u_0|_{\partial B} \le (A+1).$$

Согласно условию теоремы, на $M \setminus B$ существуют решения $u_1 \in [f]$ и $u_2 \in [f]$ уравнения Пуассона (1), удовлетворяющие условиям

$$u_1|_{\partial B} = -(A+1), \quad u_2|_{\partial B} = A+1.$$

Так как $u_1 \sim u_2 \sim u_0$, $u_1|_{\partial B} \le u_0|_{\partial B} \le u_2|_{\partial B}$, а разности $u_2 - u_0$ и $u_0 - u_1$ являются решениями уравнения Лапласа — Бельтрами на $M \setminus B$, то по принципу сравнения на $M \setminus B$ получаем $u_1 \le u_0 \le u_2$. Тогда для достаточно больших k выполнено

$$u_1|_{\partial B_k} \le \phi_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k} \le u_2|_{\partial B_k},$$

$$u_1|_{\partial B} \le \phi_k|_{\partial B} \le u_2|_{\partial B}.$$

Далее, применяя принцип сравнения к функциям $\phi_k - u_1$ и $u_2 - \phi_k$, которые также являются решениями уравнения Лапласа — Бельтрами на множестве $B_k \setminus B$, для достаточно больших k имеем $u_1 \le \phi_k \le u_2$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, на $M \setminus B$ получим $u_1 \le \phi \le u_2$. Учитывая, что $u_1 \sim u_2 \sim f$, получаем $\phi \sim f$.

Теорема доказана.

Перейдем к доказательству следующей теоремы.

Доказательство теоремы 3. Пусть теперь $u_0 \in [f]$ — решение уравнения Пуассона (1) и $\Phi \in C(\partial B)$ — произвольная функция.

Рассмотрим последовательность функций u_k, являющихся решением следующих краевых задач

$$\Delta u_k = 0 \quad \text{в } B_k \setminus B, \quad u_k|_{\partial B} = \Phi, \quad u_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}.$$

Тогда разности $v_k = u_k - u_0$ будут являться $B_k \setminus B$ решениями уравнения Лапласа — Бельтрами. При этом

$$v_k|_{\partial B} = \Phi - u_0, \quad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Учитывая принцип максимума для гармонических функций, для любого k имеем

$$|v_k| \le \sup_{\partial(B_k\setminus B)}|v_k| = \sup_{\partial B}|\Phi - u_0| \le \sup_{\partial B}|\Phi| + \sup_{\partial B}|u_0|,$$

то есть последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на M и, следовательно, компактна в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на любом компактном подмножестве в M. Пусть $v(x)$ — предельная функция. Ясно, что $\Delta v = 0$, $v|_{\partial B} = \Phi - u_0$. Покажем, что $v \in [0]$.

Обозначим $A = \max_{\partial B} |\Phi - u_0|$. Очевидно выполнено

$$-(A+1) \leq \Phi - u_0 \leq (A+1),$$

$$-(A+1) \leq v|_{\partial B} \leq A+1$$

и для любого k

$$-(A+1) \leq v_k|_{\partial B} \leq A+1.$$

Рассмотрим на $M \setminus B$ функции $\underline{v} = -(A+1) \cdot v_0$ и $\overline{v} = (A+1) \cdot v_0$, где v_0 — емкостный потенциал компакта B на M, $v_0 \in [0]$ (он существует в силу Δ-строгости многообразия). Функции $\underline{v}$ и $\overline{v}$ являются гармоническими и удовлетворяют условиям

$$\underline{v}|_{\partial B} = -(A+1), \quad -(A+1) \leq \underline{v} \leq 0, \quad \underline{v} \in [0],$$

$$\overline{v}|_{\partial B} = (A+1), \quad 0 \leq \overline{v} \leq (A+1), \quad \overline{v} \in [0].$$

Тогда на $M \setminus B$ выполнено $\underline{v} \leq \overline{v}$ и с учетом принципа сравнения для всех k на множестве $B_k \setminus B$

$$\underline{v} \leq v_k \leq \overline{v}.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$. Учитывая, что $\underline{v} \sim \overline{v} \sim 0$, получаем $v \in [0]$.

Из существования предельной функции v следует существование предельной функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k = \lim\limits_{k\to\infty} v_k + u_0 = v + u_0$. Так как $v|_{\partial B} = \Phi - u_0$ и $v \in [0]$, имеем $u|_{\partial B} = \Phi$, $u \in [f]$. Таким образом, u — искомое решение краевой задачи на M.

Теорема 3 доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ и Администрации Волгоградской области (проект № 15-41-02479 р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, 1989. — 464 с.

2. Григорьян, А. А. О существовании положительных фундаментальных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях / А. А. Григорьян // Мат. сб. — 1985. — Т. 128, № 3. — С. 354–363.

3. Григорьян, А. А. Ограниченные решения уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / А. А. Григорьян // Труды семинара И.Г. Петровского. — 1989. — № 14. — С. 66–77.

4. Григорьян, А. А. Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи / А. А. Григорьян, Н. С. Надирашвили // Изв. вузов. Математика. — 1987. — № 5. — С. 25–33.

5. Корольков, С. А. Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 1 (14). — С. 23–40.

6. Лосев, А. Г. О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Дифференциальные уравнения. — 2017 (в печати).

7. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 6. — С. 41–49.

8. Мазепа, Е. А. К вопросу о разрешимости краевых задач для полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — № 4 (23). — С. 36–44.

9. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 591–599.

10. Мазепа, Е. А. Краевые задачи и лиувиллевы теоремы для полулинейных эллиптических уравнений на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 2005. — Т. 514, № 3 (514). — С. 59–66.

11. Мазепа, Е. А. О существовании целых решений одного полулинейного эллиптического уравнения на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 1. — С. 153–156.

12. Anderson, M. T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature / M. T. Anderson // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 4. — P. 701–721.

13. Cheng, S. Y. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications / S. Y. Cheng, S. T. Yau // Comm. Pure and Appl. Math. — 1975. — Vol. 28, № 3. — P. 333–354.

14. Grigor'yan, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bulletin of Amer. Math. Soc. — 1999. — № 36. — P. 135–249.

15. Grigor'yan, A. Pointwise estimates of solutions to semilinear elliptic equations and inequalities / A. Grigor'yan, I. Verbitsky. — Electronic text data. — Mode of access: https://arxiv.org/abs/1511.03188. — Title from screen.

16. Losev, A. G. Unbounded solutions of the stationary Schrodinger equation on Riemannian manifolds / A. G. Losev, E. A. Mazepa, V. Y. Chebanenko // CMFT. — 2003. — Vol. 3, № 2. — P. 443–451.

17. Mastrolia, P. Elliptic and parabolic equations with Dirichlet conditions at infinity on Riemannian manifolds / P. Mastrolia, D. D. Monticelly, F. Punzo. — Electronic text data. — Mode of access: https://arxiv.org/abs/1511.09023. — Title from screen.

18. Murata, M. Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds / M. Murata // Potential Theory. — 1992. — P. 251–259.

19. Ni, L. Poisson equation, Poincare — Lelong equation and curvature decay on complete Kahler manifolds / L. Ni, Y. Shi, L-F. Tam // J. Diff. Geom. — 2001. — Vol. 57. — P. 733–388.

20. Classification theory of Riemannian manifolds / L. Sario, M. Nakai, C. Wang, L. O. Chung. — , 1977. — 498 p.

21. Sullivan, D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds / D. Sullivan // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 4. — P. 722–732.

REFERENCES

1. Gilbarg D., Trudinger M. *Ellipticheskie differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p.

2. Grigor'yan A.A. O sushchestvovanii polozhitelnykh fundamentalnykh resheniy uravneniya Laplasa na rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Existence of Positive Fundamental Solution of the Laplace Equation on Riemannian Manifolds]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1985, vol. 128, no. 3, pp. 354-363.

3. Grigor'yan A.A. Ogranichennye resheniya uravneniya Shredingera na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Bounded Solutions of Stationary Shrodinger Equatuion on Non-Compact Riemannian Manifolds]. *Trudy seminara I.G. Petrovskogo*, 1989, no. 14, pp. 66-77.

4. Grigor'yan A.A., Nadirashvili N.S. Liuvillevy teoremy i vneshnie kraevye zadachi [Liouville-Type Theorems and External Bound Problems]. *Izv. vuzov. Matematika* [Soviet Mathematics], 1987, no. 5, pp. 25-33.

5. Korolkov S.A., Losev A.G. Resheniya ellipticheskikh uravneniy na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Solutions for Elliptic Equations on Riemannian Manifolds with Ends]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics], 2011, no. 1 (14), pp. 23-40.

6. Losev A.G. O razreshimosti zadachi Dirikhle dlya uravneniya Puassona na nekotorykh nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Solvability of the Dirichlet Problem for Poisson Equation on Some Noncompact Riemannian Manifolds]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential equations], 2017 (to appear).

7. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [About Asimptotic Property of Solutions of Elliptic Equation on Non Compact Riemannian Manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Soviet Mathematics], 1999, no. 6, pp. 41-49.

8. Mazepa E.A. K voprosu o razreshimosti kraevykh zadach dlya polulineynykh ellipticheskikh uravneniy na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Solvability of Boundary Value Problems for Semilinear Elliptic Equations on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 4 (23), pp. 36-44.

9. Mazepa E.A. Kraevye zadachi dlya statsionarnogo uravneniya Shredingera na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary Value Problems for the Stationary Equation Schrödinger on Riemannian Manifolds]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2002, vol. 43, no. 3, pp. 591-599.

10. Mazepa E.A. Kraevye zadachi i liuvillevy teoremy dlya polulineynykh ellipticheskikh uravneniy na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary Value Problems and Liouville Theorems for Semilinear Elliptic Equations on Riemannian Manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2005, vol. 514, no. 3 (514), pp. 59-66.

11. Mazepa E.A. O sushchestvovanii tselykh resheniy odnogo polulineynogo ellipticheskogo uravneniya na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Existence of Entire Solutions of a Semilinear Elliptic Equation on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Mat. zametki*, 2007, vol. 81, no. 1, pp. 153-156.

12. Anderson M.T. The Dirichlet Problem at Infinity for Manifolds with Negative Curvature. *J. Diff. Geom.*, 1983, vol. 18, no. 4, pp. 701-721.

13. Cheng S.Y., Yau S.T. Differential Equations on Riemannian Manifolds and Their Geometric Applications. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1975, vol. 28, no. 3, pp. 333-354.

14. Grigor'yan A. Analytic and Geometric Background of Recurrence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bulletin of Amer. Math. Soc.*, 1999, no. 36, pp. 135-249.

15. Grigor'yan A., Verbitsky I. *Pointwise estimates of solutions to semilinear elliptic equations and inequalities*. Available at: https://arxiv.org/abs/1511.03188.

16. Losev A.G., Mazepa E.A., Chebanenko V.Y. Unbounded Solutions of the Stationary Schrodinger Equation on Riemannian Manifolds. *CMFT*, 2003, vol. 3, no. 2, pp. 443-451.

17. Mastrolia P., Monticelly D.D., Punzo F. *Elliptic and parabolic equations with Dirichlet conditions at infinity on Riemannian manifolds*. Available at: https://arxiv.org/abs/1511.09023.

18. Murata M. Positive Harmonic Functions on Rotationary Symmetric Riemannian Manifolds. *Potential Theory*, 1992, pp. 251-259.

19. Ni L., Shi Y., Tam L-F. Poisson Equation, Poincare — Lelong Equation and Curvature Decay on Complete Kahler Manifolds. *J. Diff. Geom.*, 2001, vol. 57, pp. 733-388.
20. Sario L., Nakai M., Wang C., Chung L.O. *Classification theory of Riemannian manifolds*. 1977. 498 p.
21. Sullivan D. The Dirichlet Problem at Infinity for a Negatively Curved Manifolds. *J. Diff. Geom.*, 1983, vol. 18, no. 4, pp. 722-732.

ON SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE POISSON EQUATION ON NON-COMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

Elena Alekseevna Mazepa

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
elena.mazepa@volsu.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. This article is devoted to the investigation of the behavior of solutions of the Poisson equation in relation to the geometry of the manifold in question. Such problems originate in the classification theory of non-compact Riemannian surfaces and manifolds. For a noncompact Riemann surface, the well-known problem of conformal type identification can be stated as follows: Does a nontrivial positive superharmonic function exist on this surface?

Many questions of this kind fit into the pattern of a Liouville-type theorem saying that the space of bounded solutions of some elliptic equation is trivial. However, the class of manifolds admitting nontrivial solutions of some elliptic equations is wide. For example, conditions ensuring the solvability of the Dirichlet problem with continuous boundary conditions "at infinity" for several noncompact manifolds has been found in many papers (see, e.g., [12; 18; 21]). Notice that the very statement of the Dirichlet problem on such manifolds could turn out nontrivial, since it is unclear how we should interpret the boundary data.

In this article we study questions of existence and belonging to given functional class of bounded solutions of the Poisson equation

$$\Delta u = g(x), \tag{1}$$

where $g(x) \in C^{\gamma}(\Omega)$ for any subset $\Omega \subset\subset M$, $0 < \gamma < 1$ on a noncompact Riemannian manifold M without boundary.

Of keen interest is the interrelation between problems of existence of solutions of equation (1) on M and off some compact $B \subset M$ with the same growth "at infinity". In our research we use a new approach wich is based on the consideration of equivalence classes of functions on M (this approach for bounded solutions of the Schrödinger equation has been realized in [9]).

Let M be an arbitrary smooth connected noncompact Riemannian manifold without boundary and let $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an exhaustion of M. Throughout the sequel, we assume that boundaries ∂B_k are C^1-smooth submanifolds.

Let f_1 and f_2 be arbitrary bounded continuous functions on M. Say that f_1 and f_2 are *equivalent on* M and write $f_1 \sim f_2$ if for some exhaustion $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$

of M we have

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{M\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0.$$

It is easy to verify that the relation " $\sim$ " is an equivalence which does not depend on the choice of the exhaustion of the manifold and so partitions the set of all continuous functions on M into equivalence classes. Denote the equivalence class of a function f by $[f]$.

Let $B \subset M$ be an arbitrary connected compact subset and the boundary of B is a C^1-smooth submanifold. Assume that the interior of B is non-empty and $B \subset B_k$ for all k.

Observe that if the manifold M has compact boundary or there is a natural geometric compactification of M (for example, on manifolds of negative sectional curvature or spherically symmetric manifolds) which adds the boundary at infinity, then this approach leads naturally to the classical statement of the Dirichlet problem (see, for instance, [7; 12; 18; 21]).

Denote by v_k the harmonic function in $B_k \setminus B$ which satisfies to conditions

$$v_k|_{\partial B} = 1, \qquad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Using the maximum principle, we can easily verify that the sequence v_k is uniformly bounded on $M \setminus B$ and so is compact in the class of twice continuously differentiable functions over every compact subset $G \subset M \setminus B$. Moreover, as $k \to \infty$ this sequence increases monotonically and converges on $M \setminus B$ to harmonic function

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k, \qquad 0 < v \le 1, \qquad v|_{\partial B} = 1.$$

Also, note that the function v is independent of the choice of exhaustion $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$.

The function v is nothing but the capacity potential of the compact set B relative to the manifold M (see [14]).

Call the manifold M Δ-*strict* if for some compact set $B \subset M$ there is a ecapacity potential v of B such that $v \in [0]$ (see [9]).

Say that a boundary value problem for (1) is solvable on M with boundary conditions of class $[f]$ whenever there exists a solution $u(x)$ to (1) on M with $u \in [f]$.

Say that for a continuous function $\Phi(x)$ on ∂B the exterior boundary value problem for (1) is solvable on $M \setminus B$ with boundary conditions of class $(\Phi, [f])$ whenever on $M \setminus B$ there exists a solution $u(x)$ to (1) with $u \in [f]$ and $u|_{\partial B} = \Phi$.

Similarly we can state boundary value problems on arbitrary noncompact Riemannian manifolds for a series of other second order elliptic differential equations (see [5; 8–11; 16]).

We now formulate the main result.

Theorem 1. *Suppose that for every positive constant A the exterior boundary value problems for the equations* (1) *are solvable on $M \setminus B$ with boundary conditions $(A, [f])$. Then the boundary value problem for* (1) *is solvable on M with boundary conditions of class $[f]$.*

Theorem 2. *Let M be an Δ-strict manifold. Suppose that the boundary value problem for* (1) *is solvable on M with boundary conditions of class $[f]$. Then for every continuous function $\Phi(x)$ on ∂B the exterior boundary value problem for* (1) *is solvable on $M \setminus B$ with boundary conditions $(\Phi, [f])$.*

Key words: Poisson equation, boundary value problem, noncompact Riemannian manifolds, the Dirichlet problem, functions' equivalence classes.