DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.9

УДК 517.55 + 514.74 + 004.94
ББК 22.161.5 + 22.151.5

ОБ АФФИННО-ОДНОРОДНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В $\mathbb{C}^3$ [1]

Александр Васильевич Лобода

Доктор физико-математических наук, профессор,
Воронежский государственный технический университет
lobvgasu@yandex.ru
ул. 20-летия Октября, 84, 394006 г. Воронеж, Российская Федерация

Александра Владимировна Шиповская

Аспирант,
Воронежский государственный технический университет
al.shipovskaia@gmail.com
ул. 20-летия Октября, 84, 394006 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В статье развиваются различные подходы к задаче описания аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства. Описывается схема изучения задачи об однородности, использующая канонические уравнения изучаемых многообразий и матричные алгебры Ли.

В рамках этой схемы, позволившей ранее получить полные классификационные результаты для нескольких типов однородных поверхностей, построены примеры матричных алгебр Ли, отвечающих строго псевдовыпуклым однородным поверхностям общего положения. Приведены также примеры однородных многообразий этого типа.

Доказана теорема об опорном наборе коэффициентов канонического уравнения, определяющем любую однородную поверхность из изучаемого класса. За счет компьютерного исследования большой системы полиномиальных уравнений, являющегося частью обсуждаемой схемы, получен вывод о запретах на однородность, связанный с ограничениями на некоторые коэффициенты опорного набора.

Ключевые слова: аффинное преобразование, вещественная гиперповерхность, каноническое уравнение поверхности, однородное многообразие, алгебра Ли, система полиномиальных уравнений, символьные вычисления.

Введение

Важной задачей многомерного комплексного анализа является исследование вещественных подмногообразий и, в частности, гиперповерхностей комплексных пространств, однородных относительно голоморфных преобразований. Однако после работы Э. Картана [16], получившего полное описание однородных вещественных гиперповерхностей двумерных комплексных пространств, повышение размерности в этой задаче столкнулось с существенными трудностями.

При этом описания отдельных семейств и примеров однородных гиперповерхностей в 3-мерных комплексных пространствах приводят (см.: [6; 15; 19]) к аффинно-однородным многообразиям. В этой связи можно считать естественной аффинную постановку рассматриваемой задачи. При ее решении весьма эффективными оказываются символьные вычисления, использующие понятие канонического уравнения для изучаемых многообразий (см., например, [9; 18]).

Напомним, что уравнение строго псевдовыпуклой (СПВ) вещественно-аналитической гиперповерхности M комплексного пространства $\mathbb{C}^3$ может быть (локально) приведено аффинными преобразованиями к виду (см. [9]):

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \varepsilon_1(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + \varepsilon_2(z_2^2 + \bar{z}_2^2) + \sum_{k+l+2m\geq 3} F_{klm}(z,\bar{z})u^m. \tag{1}$$

Здесь пара неотрицательных чисел $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ является аффинным инвариантом поверхности; $u = Re\, w$, $v = Im\, w$, $z = (z_1, z_2)$, а через F_{klm} обозначается однородный многочлен степени k по переменной $z = (z_1, z_2)$, степени l по $\bar{z}$ и степени m по u.

С использованием канонических уравнений (1) удается получать, например, оценки размерностей аффинных групп Ли (и, соответственно, связанных с ними алгебр Ли), транзитивно действующих на таких многообразиях [4]. Эти оценки, как и другие свойства однородных поверхностей, существенно зависят от значений отдельных элементов пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. В связи с обсуждаемой задачей об однородности естественно выделить несколько семейств (типов) СПВ-поверхностей, определяемых именно такими парами:

1) $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$; 2) $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1/2$; 3) $\varepsilon_1 = 0 < \varepsilon_2 \neq 1/2$;
4) $\varepsilon_1 = 1/2, \varepsilon_2 = 1/2$; 5) $\varepsilon_1 = 1/2,\ 0 < \varepsilon_2 \neq 1/2$; 6) $0 < \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq 1/2$;
7) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, где $(2\varepsilon_1 - 1)\cdot(2\varepsilon_2 - 1)\cdot(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \neq 0$.

К настоящему времени получены и опубликованы полные описания аффинно-однородных поверхностей, отвечающих первым четырем случаям из приведенного списка [2; 8; 10; 11; 14]; описание пятого типа готовится к печати. Авторы настоящей статьи признательны профессору А.А. Григорьяну, интерес которого к этим исследованиям и их поддержка (см.: [22; 23]) во многом стимулировали получение как упомянутых, так и излагаемых ниже результатов.

Основной целью данной статьи является изучение аффинно-однородных гиперповерхностей так называемого *общего положения*, удовлетворяющих условию п. 7), или, в более точной форме, неравенству

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\right)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \neq 0. \tag{2}$$

Отметим, что описания однородных поверхностей четырех из перечисленных выше семи типов получены в рамках общей схемы исследования аффинной однородности.

Сама такая схема кратко обсуждается ниже, в § 1, а в § 2 приводится большое количество примеров матричных алгебр Ли, полученных с помощью этой схемы и отвечающих однородным поверхностям общего положения.

В то же время уточним, что в случае общего положения эта схема пока позволила получить лишь большое количество примеров однородных поверхностей. Для полного решения задачи классификации помимо ее использования необходимы и другие подходы, использующие, например, оценки размерности пространств модулей для семейств и подсемейств изучаемых многообразий. В статье получена такая оценка при условии ненулевого многочлена веса 3 из канонического уравнения (теорема 1).

С использованием компьютерных алгоритмов и символьных вычислений доказано (теорема 2), что свойство аффинной однородности поверхности общего положения не совместимо с ее принадлежностью к одному из четырех естественных подсемейств, определяемых коэффициентами уравнения (1).

1. Схема описания аффинно-однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$

Аффинную однородность гиперповерхности $M \in \mathbb{C}^3$ (вблизи некоторой ее точки) везде в статье мы понимаем как существование алгебры Ли $\mathcal{G}(M)$ аффинных векторных полей, касательных к M, значения которых в обсуждаемой точке поверхности накрывают всю касательную плоскость к этой поверхности.

Все изучаемые однородные СПВ-гиперповерхности будут ниже задаваться своими аффинными каноническими уравнениями вида (1), а точку, вблизи которой обсуждается однородность, мы считаем началом координат пространства $\mathbb{C}^3$. Алгебры Ли касательных векторных полей к таким поверхностям мы будем представлять в матричной форме. Принцип сопоставления полей и соответствующих им матриц обозначен ниже

$$Z = \begin{pmatrix} (A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 w + p_1)\,\frac{\partial}{\partial z_1} + \\ \\ +\,(B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 w + p_2)\,\frac{\partial}{\partial z_2} + \\ \\ +\,(a z_1 + b z_2 + c w + q)\,\frac{\partial}{\partial w} \end{pmatrix} \sim Z = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & p_1 \\ B_1 & B_2 & B_3 & p_2 \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Нулевая четвертая строка добавляется к каждой 3×4-матрице коэффициентов аффинного векторного поля для удобства оперирования с матрицами. Известно, что при таком изоморфизме алгебр Ли коммутатор (скобка) $[Z_1, Z_2]$ векторных полей переходит в коммутатор (скобку) $Z_1 \cdot Z_2 - Z_2 \cdot Z_1$ соответствующих 4×4-матриц (см., например, [18]) .

Несложно показать на основе рассуждений, изложенных в [4], что для однородных поверхностей общего положения выполняется оценка $5 \le dim_{\mathbb{R}}\, \mathcal{G}(M) \le 6$. При этом размерность 6 достигается лишь для поверхностей, аффинно эквивалентных квадрикам

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \varepsilon_1(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + \varepsilon_2(z_2^2 + \bar{z}_2^2). \tag{4}$$

Поэтому мы рассматриваем ниже только поверхности с 5-мерными группами и алгебрами Ли. Само условие 5-мерности означает, что из всех элементов матриц (или, что то же самое, аффинных векторных полей) вида (3), отвечающих однородным поверхностям, только сдвиговые параметры (p_1, p_2, q) являются свободными. Мы будем называть их **основными** параметрами в отличие от остальных элементов (3).

Согласно [4], у 5-мерной алгебры Ли аффинных векторных полей, касательных к однородной поверхности M общего положения, имеется базис следующего вида:

$$E_1 = \begin{bmatrix} A1_1 & A2_1 & A3_1 & 1 \\ B1_1 & B2_1 & B3_1 & 0 \\ 2i(1+2\varepsilon_1) & 0 & 2m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} A1_2 & A2_2 & A3_2 & i \\ B1_2 & B2_2 & B3_2 & 0 \\ 2(1-2\varepsilon_1) & 0 & 2m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} A1_3 & A2_3 & A3_3 & 0 \\ B1_3 & B2_3 & B3_3 & 1 \\ 0 & 2i(1+2\varepsilon_2) & 2m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_4 = \begin{bmatrix} A1_4 & A2_4 & A3_4 & 0 \\ B1_4 & B2_4 & B3_4 & i \\ 0 & 2(1-2\varepsilon_2) & 2m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} A1_5 & A2_5 & A3_5 & 0 \\ B1_5 & B2_5 & B3_5 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2, m_1, m_2, m_3, m_4$ являются вещественными, а остальные (обозначенные буквами) элементы выписанных матриц являются, вообще говоря, комплексными числами. При этом $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ удовлетворяют неравенству (2).

Наличие специальной структуры у базисных матриц (5) позволяет получать содержательные выводы об алгебрах Ли с такими базисами за счет рассмотрения коммутаторов (скобок)

$$[E_k, E_j] = E_k E_j - E_j E_k$$

и использования свойства замкнутости алгебры Ли относительно операции коммутирования.

Первым и основным этапом упомянутой схемы является построение всех возможных алгебр с базисами вида (5). На втором этапе для каждой такой алгебры нужно найти ее (единственное) интегральное многообразие, проходящее через начало координат. Технически для этого требуется решить систему из пяти уравнений в частных производных, отвечающую основному соотношению

$$Re\,(E_k(\Phi)_{|M}) \equiv 0 \tag{6}$$

для пяти базисных векторных полей. В формуле (6) через Φ обозначена определяющая функция поверхности M, которую мы записываем, в соответствии с (1), в виде

$$\Phi = -v + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \varepsilon_1(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + \varepsilon_2(z_2^2 + \bar{z}_2^2) + \sum_{k+l+2m\geq 3} F_{klm}(z,\bar{z})u^m.$$

Замечание 1. Отметим, что две однородные поверхности, получаемые интегрированием «различных» алгебр Ли, могут оказаться аффинно эквивалентными. В изученных случаях 1)–4) обозначенные вопросы не играли заметной роли, но для поверхностей общего положения они становятся существенными, как показано в § 3.

Замечание 2. Схема описания аффинно-однородных поверхностей с использованием соответствующих им матричных алгебр Ли была эффективно реализована в работе [17] для построения достаточно объемной (полной) классификации однородных поверхностей в 3-мерном вещественном пространстве. Изучаемый нами случай является гораздо более сложным как по количеству описываемых объектов, так и по объему необходимых вычислений.

Остановимся подробнее на первом этапе обсуждаемой схемы применительно к алгебрам с базисами вида (5) (см. также [10; 12]). Рассмотрение десяти скобок $[E_k, E_j]$ для всех пар базисных матриц (5) приводит к системе десяти матричных уравнений. Например, одно из таких уравнений имеет вид

$$[E_1, E_2] = r_1 E_1 + r_2 E_2 + r_3 E_3 + r_4 E_4 - 4E_5, \tag{7}$$

где $r_1, ..., r_4$ — некоторые вещественные коэффициенты.

Расписывая поэлементно матричные уравнения типа (7), получаем большую систему скалярных уравнений, являющихся, вообще говоря, квадратичными относительно матричных элементов исходных матриц (5).

При этом вся обсуждаемая алгебра определяется лишь первой четверкой базисных матриц (5), а наиболее важную роль при таком подходе играют левые верхние $2{\times}2$-блоки этих матриц. В самом деле, выделяя вещественные и мнимые части интересующих нас матричных элементов ($t_1 = Re\,(E_1)_{1,1},\ t_2 = Im\,(E_1)_{1,1}$ и т. д.), представим такие блоки в развернутой форме

$$e_1 = \begin{bmatrix} t_1 + it_2 & t_3 + it_4 \\ t_5 + it_6 & t_7 + it_8 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} t_9 + it_{10} & t_{11} + it_{12} \\ t_{13} + it_{14} & t_{15} + it_{16} \end{bmatrix},$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} t_{17} + it_{18} & t_{19} + it_{20} \\ t_{21} + it_{22} & t_{23} + it_{24} \end{bmatrix},\ e_4 = \begin{bmatrix} t_{25} + it_{26} & t_{27} + it_{28} \\ t_{29} + it_{30} & t_{31} + it_{32} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Тогда, например, коэффициент r_1 из формулы (7) определяется равенством

$$r_1 = -t_2 + t_9,$$

и аналогичные формулы справедливы для остальных коэффициентов из (7) и для аналогичных разложений остальных девяти скобок.

Отметим еще, что четвертые столбцы всех матриц (5) устроены очень просто. В силу этого в упомянутой системе скалярных уравнений ее отдельные уравнения также устроены проще остальных. Например, в ней имеется подсистема уравнений, линейных относительно набора из 36 вещественных переменных, включающего помимо t_k $(k = 1, ..., 32)$ еще и (3,3)-элементы m_1, m_2, m_3, m_4 первых четырех базисных матриц.

Решение такой линейной подсистемы позволяет (например, в случае поверхностей общего положения) уменьшить набор из 36 неизвестных до 16 переменных

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_7, t_8, t_{11}, t_{19}, t_{23}, t_{24}, t_{27}, m_1, m_2, m_3, m_4. \tag{9}$$

Далее выписывается система уравнений, квадратичных (по существу) относительно набора (9). Эта система оказывается переопределенной, так как содержит (в случае поверхностей общего положения) 50 уравнений относительно 16 неизвестных.

В изученных случаях 2)–5) из введения построение всех решений аналогичных систем квадратичных уравнений фактически приводило к списку всех алгебр Ли требуемого вида. А само получение решений оказывалось задачей, хотя и технически сложной, но реализуемой с помощью компьютерных алгоритмов.

В случае однородных поверхностей общего положения ситуация с решением системы квадратичных уравнений сильно усложняется. Итоговые 50 уравнений оказываются весьма объемными. С учетом вхождения в них 16 неизвестных, многие из этих уравнений содержат порядка 100 квадратичных слагаемых (при максимально возможном количестве 135). Усугубляется ситуация тем, что коэффициентами уравнений являются многочлены от пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, и степени таких многочленов достигают 6.

В итоге решить такую систему уравнений в полном объеме пока не удалось. В то же время анализ квадратичных уравнений полученной системы показывает, что все 16 входящих в них переменных целесообразно разбить на две группы (по 8 переменных в каждой), например,

$$\{t_1, t_4, t_7, t_{11}, t_{19}, t_{24}, m_1, m_4\} \text{ и } \{t_2, t_3, t_5, t_8, t_{23}, t_{27}, m_2, m_3\}. \tag{10}$$

При этом ровно 25 уравнений из обсуждаемых 50 оказываются «антидиагональными», то есть билинейно зависящими от двух выделенных групп переменных. Каждое уравнение из другой, «диагональной», части системы распадается в сумму двух «раздельных» квадратичных форм: каждое из его слагаемых содержит квадратичные произведения переменных только из одной или только из второй группы. «Смешанных» произведений диагональные формы не содержат.

Компьютерные исследования антидиагональной части полученной системы показали, что из 25 билинейных уравнений линейно независимы только 15. Тем самым, в случае однородных поверхностей общего положения в обсуждаемой задаче можно выделить подзадачу исследования (нахождения всех решений) системы 15 уравнений, билинейно зависящих от двух групп переменных (содержащих по 8 неизвестных в каждой группе). Можно отметить, что задачи такого рода обсуждаются в современной математической литературе (см., например, [21]). Однако авторам не удалось найти действенный алгоритм для получения полного решения изучаемой задачи.

Несколько семейств матричных алгебр Ли, отвечающих аффинно-однородным поверхностям общего положения и полученных из частных решений системы 15 билинейных уравнений, приведены в следующем параграфе. Способ получения этих частных решений связан с обращением в нуль восьмерки переменных, составляющих одну из двух групп (10). Ясно, что при этом все билинейные (антидиагональные) уравнения обратятся в нуль, и останется изучить диагональную часть квадратичной системы. В такой ситуации каждое из оставшихся 25 уравнений зависит лишь от 8 переменных противоположной группы.

Применение компьютерных алгоритмов к такой усеченной задаче (и в частности, отсечение решений системы, которые не дают алгебр Ли) оказывается вполне эффективным: в разделе 2 настоящей статьи приведен **полный** список матричных алгебр Ли, отвечающих обнулению (по отдельности) каждой из двух восьмерок (10). Комментарии об однородных поверхностях, соответствующих построенным алгебрам, приведены в разделе 3.

2. Примеры алгебр Ли, отвечающих поверхностям общего положения

В этом параграфе приведены базисы нескольких семейств 5-мерных матричных алгебр Ли. Эти примеры построены вторым автором статьи по описанной выше схеме.

Решения, соответствующие обращению в нуль переменных из первой группы (9), имеют в нумерации алгебр дополнительный номер 1, обнулению второй группы (9) соответствует дополнительный номер 2.

Для всех алгебр используются общие обозначения

$$\mu_k = 1 + 2\varepsilon_k, \quad \nu_k = 1 - 2\varepsilon_k, \quad k = 1, 2.$$

Семейство алгебр 2-1 $(t_{24} \in \mathbb{R})$.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,i\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & it_{24} & 0 & 1 \\ 0 & 2\,i\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} -t_{24}/\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t_{24} & 0 & i \\ 0 & 2\nu_2 & -2\,t_{24}/\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Семейство алгебр 3-1 $(t_4 \in \mathbb{R})$.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & it_4 & \frac{-it_4^2}{2\mu_2} & 1 \\ \frac{i\mu_1 t_4}{\mu_2} & 0 & 0 & 0 \\ 2\,i\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & -t_4 & \frac{t_4^2}{2\mu_2} & i \\ \frac{\nu_1 t_4}{\mu_2} & 0 & 0 & 0 \\ 2\,\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} it_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,it_4 & \frac{-it_4^2}{2\mu_2} & 1 \\ 0 & 2\,i\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} -2\,\frac{\varepsilon_2 t_4}{\mu_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\,\frac{\varepsilon_2 t_4}{\mu_2} & \frac{{t_4}^2}{2\,\mu_2} & i \\ 0 & 2\,\nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_5 = \begin{bmatrix} \frac{-it_4^2}{2\mu_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-it_4^2}{2\mu_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-it_4^2}{2\mu_2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Семейство алгебр 9-1 $(T = t_7/\varepsilon_1,\ t_7 \in \mathbb{R})$.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 2\,T\varepsilon_1 & 0 & -1/8\,iT^2\nu_1 & 1 \\ 0 & T\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 2\,i\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} -iT\nu_1 & 0 & 1/8\,T^2\nu_1 & i \\ 0 & -1/2\,iT\nu_1 & 0 & 0 \\ 2\,\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mu_2 T/2 & 0 & 0 \\ -\,T\nu_1/2 & 0 & -\,iT^2\nu_1/8 & 1 \\ 0 & 2\,i\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & -\,i\nu_2 T/2 & 0 & 0 \\ -\,iT\nu_1/2 & 0 & T^2\nu_1/8 & i \\ 0 & 2\,\nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} -\,iT^2\nu_1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\,iT^2\nu_1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\,iT^2\nu_1/8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Семейство алгебр 10-1 $(m_1 \in \mathbb{R},\ \mu^2 - 4(1+2\varepsilon_2)(2\varepsilon_1 - 1) = 0)$.

$$E_1 = \begin{bmatrix} m_1\nu_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_1\nu_1 & 0 & 0 \\ 2\,i\mu_1 & 0 & 2\,m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} im_1\nu_1 & 0 & 0 & i \\ 0 & im_1\nu_1 & 0 & 0 \\ \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_2 m_1 & 0 & 0 \\ m_1\nu_1 & i\mu m_1 & 0 & 1 \\ 0 & 2\,i\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & i\nu_2 m_1 & 0 & 0 \\ i\nu_2 m_1 & -2\,\varepsilon_2\, m_1\mu/\mu_2 & 0 & i \\ 0 & 2\,\nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Семейство алгебр 4-2 ($t_{27} \in \mathbb{R}$).

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{2\,it_{27}\mu_1}{\nu_2} & 0 & \frac{-it_{27}{}^2\mu_1}{2\,\nu_2^2} & 1 \\ 0 & \frac{it_{27}\mu_1}{\nu_2} & 0 & 0 \\ 2\,i\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 2\,\frac{(1-\mu_1)t_{27}}{\nu_2} & 0 & \frac{t_{27}^2\mu_1}{2\,\nu_2{}^2} & i \\ 0 & \frac{(1-\mu_1)t_{27}}{\nu_2} & 0 & 0 \\ 2(1-\mu_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{i(2-\nu_2)t_{27}}{\nu_2} & 0 & 0 \\ \frac{it_{27}\mu_1}{\nu_2} & 0 & \frac{-1/2\,it_{27}{}^2\mu_1}{\nu_2{}^2} & 1 \\ 0 & 2\,i\,(2-\nu_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & t_{27} & 0 & 0 \\ -\frac{t_{27}\mu_1}{\nu_2} & 0 & \frac{t_{27}^2\mu_1}{2\,\nu_2{}^2} & i \\ 0 & 2\,\nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} -\frac{t_{27}^2\mu_1}{2\,\nu_2{}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t_{27}^2\mu_1}{2\,\nu_2{}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t_{27}^2\mu_1}{2\,\nu_2{}^2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Семейство алгебр 5-2 ($m_2 \in \mathbb{R},\ \mu^2 - (1+2\varepsilon_1)(2\varepsilon_2 - 1) = 0$).

$$E_1 = \begin{bmatrix} -im_2\mu_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -im_2\mu_1 & 0 & 0 \\ i\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} m_2\mu_1 & 0 & 0 & i \\ 0 & m_2\mu_1 & 0 & 0 \\ 2\nu_1 & 0 & 2\,m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i\mu_2 m_2 & 0 & 0 \\ -im_2\mu_1 & -4\,\mu\,\varepsilon_2 m_2/\mu_2 & 0 & 1 \\ 0 & 2\,i\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & -m_2\nu_2 & 0 & 0 \\ m_2\mu_1 & 2\,i\mu\, m_2 & 0 & i \\ 0 & 2\,\nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Семейство алгебр 8-2 ($m_3 \in \mathbb{R},\ \mu^2 - 4(1+2\varepsilon_1)(2\varepsilon_2 - 1) = 0$).

$$E_1 = \begin{bmatrix} i\mu\, m_3 & m_3\nu_1 & 0 & 1 \\ -m_3\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,i\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} -2\,\frac{\varepsilon_1\mu\, m_3}{\mu_1} & im_3\nu_2 & 0 & i \\ i\nu_1 m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} m_3\nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_3\nu_2 & 0 & 1 \\ 0 & 2\,i\mu_2 & 2\,m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_4 = \begin{bmatrix} im_3\nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & im_3\nu_2 & 0 & i \\ 0 & 2\,\nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Семейство алгебр 10-2 ($T = t_{23}/\varepsilon_2$).

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & -T\nu_2/4 & -iT^2\nu_2/32 & 1 \\ T\mu_1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,i\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & -iT\nu_2/4 & T^2\nu_2/32 & i \\ -i\nu_1 T/4 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1/2\,T\varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T\varepsilon_2 & -iT^2\nu_2/32 & 1 \\ 0 & 2\,i\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_4 = \begin{bmatrix} -iT\nu_2/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iT\nu_2/2 & T^2\nu_2/32 & i \\ 0 & 2\,\nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} -iT^2\nu_2/32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iT^2\nu_2/32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iT^2\nu_2/32 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

3. Интегрирование алгебр и специальные канонические уравнения

Здесь мы приведем примеры аффинно-однородных поверхностей общего положения, полученных в результате интегрирования некоторых из матричных алгебр Ли, представленных выше.

Отметим, во-первых, что в каждом из приведенных семейств алгебр помимо параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ имеется еще ровно один дополнительный параметр. Это t_{24} в семействе 2-1, t_4 — в семействе 3-1, и т.д. (остальные параметры перечислены в соответствии с очередностью представления алгебр в разделе 2: t_7, m_1, t_{27}, m_2, m_3, t_{23}).

При обращении в нуль каждого такого дополнительного параметра (и фиксированных значениях пары $\varepsilon_1, \varepsilon_2$) базис каждой из алгебр восьми различных семейств превращается в «один и тот же» базисный набор, отвечающий квадрике (1.2). Поэтому интерес представляют лишь ненулевые значения перечисленных параметров.

Предложение 1. *Аффинно-однородные поверхности общего положения, отвечающие семействам алгебр Ли 2-1 (при $t_{24} \neq 0$) и 3-1 (при $t_4 \neq 0$) из предыдущего раздела, описываются уравнениями:*

$$\textit{семейство 2-1}: \quad v = (\mu_1 x_1^2 + \nu_1 y_1^2) + |z_2|^A, \; A = \frac{2}{\mu_2}, \tag{19}$$

семейство 3-1 : $$|z_1|^2 Re\,(z_1\bar{w}) - A\,(Re\,(z_1\bar{z}_2))^2 - B\,(Im\,(z_1\bar{z}_2))^2 = |z_1|^{2C} \qquad (20)$$

с некоторыми вещественными A, B, C.

Доказательство. Перед непосредственным интегрированием систем уравнений в частных производных, отвечающих обсуждаемым алгебрам, удобно упростить за счет матричных подобий $Z \to C^{-1}ZC$ базисы этих алгебр. Очевидно, что интегральные многообразия двух подобных алгебр являются аффинно-эквивалентными поверхностями. Поэтому с точностью до такой эквивалентности мы не теряем информации при замене исходной алгебры другой, подобной ей.

В случае семейства алгебр 2-1 естественно диагонализировать матрицу E_4. После этого очевидные дополнительные движения приводят базис 2-1 к упрощенному виду

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,i\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Аналогичные естественные матричные подобия (с последующими несложными переходами к линейным комбинациям получаемых матриц) упрощают базис семейства алгебр Ли 3-1 до состояния

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_5 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

Процедура последующего интегрирования систем уравнений в частных производных, отвечающих упрощенным базисам, во многих случаях может быть реализована буквально одной командой в системе Maple. Отметим при этом, что при «механическом» подходе к решению таких систем часть решений иногда теряется [1]. Поэтому результаты интегрирования двух семейств, вынесенные в формулировку предложения 1, проверены параллельными вычислениями как с использованием символьных вычислений, так и в «ручном режиме».

Других комментариев, связанных с процедурой интегрирования матричных алгебр, мы здесь не приводим. Достаточно подробные описания аналогичных действий имеются, например, в [9] или [7].

Считаем предложение 1 доказанным.

Замечание. Примеры конкретных многообразий, обладающих какими-либо геометрическими свойствами, связанными, например, с их симметриями, пока являются достаточно редкими в многомерном комплексном анализе. Полученные в предложении 1 однородные поверхности, как и примеры алгебр Ли из предыдущего раздела, могут оказаться одной из «стартовых площадок» при получении дальнейших классификационных результатов в задачах 5-мерной CR-геометрии. Упомянем в связи с этим недавнюю близкую по тематике работу [20], в которой также строятся примеры 5-мерных многообразий с различными по размерности алгебрами симметрии.

Рассматривая другие семейства алгебр Ли из предыдущего раздела, можно заметить, что четыре матрицы из упрощенного аналогичным образом базиса семейства 9-1 в точности совпадают с матрицами из упрощенного базиса (22). Несколько отличается от своего аналога из 3-1 только матрица $E_4 = \begin{bmatrix} 1-2\,\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\,\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-2\,\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Это означает, что уравнения однородных поверхностей, отвечающих алгебрам 9-1, по форме совпадают с уравнениями, но отличаются от поверхностей 3-1 значениями параметров, входящих в эти уравнения.

А вот упрощенные варианты базисов семейства алгебр 4-2, несмотря на их визуальные отличия от базисов 3-1, ДОСЛОВНО совпадают с упрощениями в случае семейства 3-1, то есть с формулами (22)! Аналогично, базис семейства 10-2 совпадает после подходящего подобия с базисом вида 9-1.

Такой эффект совпадения (с точностью до аффинной эквивалентности) однородных поверхностей, отвечающих «разным» алгебрам, объясняется использованием канонических уравнений, не обладающих свойством единственности. Этот эффект и связанный с ним большой объем «лишней» технической работы при построении алгебр подталкивают к усовершенствованию описанной выше схемы изучения однородности.

Одним из направлений таких усовершенствований является использование уравнений вида (1) с дополнительными ограничениями на коэффициенты, уменьшающими или вовсе исключающими произвол в выборе таких уравнений.

Заметим, что помимо дискретных симметрий типа $z_1 \leftrightarrow z_2$ уравнение (1) допускает однопараметрическое семейство линейных преобразований, сохраняющих его вид. Вид (1) сохраняется при вещественных растяжениях

$$z \to tz,\ w \to t^2 w\ (t > 0). \tag{23}$$

Аффинно инвариантная пара коэффициентов $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ многочлена F_2 сохраняется, в частности, при таких растяжениях. Инвариантным при этом является также равенство (или неравенство) нулю любого из коэффициентов любого многочлена F_k веса $k > 2$ из этого уравнения, так как под действием преобразования (23) каждый коэффициент этого уравнения умножается на t^{k-2}.

Это свойство можно использовать для построения аффинных канонических уравнений, обладающих свойством единственности. Естественно «упрощать» в таких уравнениях младшие коэффициенты, к которым относятся в первую очередь слагаемые многочлена F_3. В связи с этим сформулируем следующее утверждение.

Предложение 2. *За счет аффинных преобразований, сохраняющих вид уравнения (1), можно добиться выполнения для этого уравнения одного из четырех следующих условий: 1) $F_3 = 0$; 2) $g_{20} \neq 0$; 3) $g_{20} = 0, h_{02} = 0, g_{02} \neq 0$;*
4) $g_{20} = 0, h_{02} = 0, g_{02} = 0, h_{20} = 0, g_{11} \neq 0$.

Доказательство. Ясно, что содержательными являются обсуждения, относящиеся к случаю $F_3 \neq 0$. Если у этого многочлена отличен от нуля коэффициент g_{20}, то мы получаем случай 2 доказываемого предложения.

Если $g_{20} = 0$, но $h_{02} \neq 0$, то упомянутая замена переменных $z_1 \leftrightarrow z_2$ меняет местами коэффициенты g_{20} и h_{02} и сохраняет в целом вид (1). Так мы либо снова получим случай 2), либо продолжим рассмотрение остальных коэффициентов многочлена F_3.

Если $g_{20} = 0, h_{02} = 0$, но отличен от нуля коэффициент g_{02}, мы сразу имеем случай 3) обсуждаемого предложения. Если же равна нулю тройка коэффициентов g_{20}, h_{02}, g_{02}, но отличен от нуля h_{20}, то замена $z_1 \leftrightarrow z_2$ приводит к случаю 3).

Аналогичное рассмотрение двух оставшихся коэффициентов g_{11}, h_{11} при условии равенства нулю четверки $g_{20}, h_{02}, g_{02} h_{20}$ приводит либо к равенству нулю всего многочлена F_3 (случай 1)), либо к неравенству $g_{11} \neq 0$, соответствующему случаю 4), либо при $g_{11} = 0, {}_{11} \neq 0$ снова к случаю 4) после еще одного преобразования $z_1 \leftrightarrow z_2$.

Предложение 2 доказано.

Используя отличие от нуля какого-либо коэффициента из уравнения вида (1.0), можно за счет растяжения (23) сделать модуль этого коэффициента единичным. Это означает уменьшение на одну вещественную единицу количества коэффициентов аффинного канонического уравнения, которые приходится рассматривать при изучении, например, задачи об однородности.

Отметим, что при работе с полиномиальными системами уравнений с большим числом неизвестных даже незначительное уменьшение такого числа часто приводит к существенному упрощению алгоритмов исследования таких систем. В следующем разделе мы обсудим связи между коэффициентами канонических уравнений однородных поверхностей и параметрами векторных полей, касательных к таким многообразиям. Учет этих связей и внесение информации о них в базисные матрицы алгебр Ли типа (5) также может повысить эффективность описанной выше схемы изучения однородности.

Кроме того, рассмотрение однородности в отдельных подслучаях предложения 4 может оказаться возможным даже без привлечения этой схемы. Такой подход и соответствующий окончательный результат, отвечающий простейшему случаю 4) доказанного предложения 2, излагаются в заключительном разделе настоящей статьи.

Замечание. С точки зрения голоморфных преобразований все поверхности из предложения 1 эквивалентны квадрике $v = |z_1|^2 + |z_1|^2$. Многие из аффинно-однородных поверхностей, относящихся к другим $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$-типам, оказываются голоморфно эквивалентными этой поверхности или трубчатым многообразиям

$$v = \ln x_1 + A \ln x_2 \, (A \in \mathbb{R}),$$

также обладающим богатыми группами голоморфных симметрий.

4. Опорный набор коэффициентов

В этом разделе мы обсудим отдельные *весовые* слагаемые канонических уравнений (1) и основного тождества (6). При этом *весом* многочлена от переменных $z, \bar z, u$ мы называем одинаковую для всех его мономов сумму $k + l + 2m$, где k, l, m — степени по $z, \bar z, u$ соответственно.

Каноническое уравнение (1) может быть записано в краткой форме как $v = \sum_{k\geq 2} F_k(z, \bar z, u)$, где одиночным нижним индексом обозначен вес слагаемого, и при этом специальный вид имеет многочлен

$$F_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \varepsilon_1(z_1^2 + \bar z_1^2) + \varepsilon_2(z_2^2 + \bar z_2^2). \tag{24}$$

Нас будут интересовать также степени по переменным z, $\bar z$, u отдельных слагаемых многочленов F_k различных весов из канонического уравнения (1). Степень по u будем обозначать верхним индексом в скобках, а степени по паре $(z, \bar z)$ — двойным нижним индексом, так что, например,

$$F_3 = F_3^{(0)}(z, \bar z) = F_{30} + F_{21} + (\text{комплексно сопряженные слагаемые}), \tag{25}$$

где

$$F_{30} = \sum_{k+\ell=3} f_{k\ell} z_1^k z_2^\ell, \qquad F_{21} = \left(\sum_{k+\ell=2} g_{k\ell} z_1^k z_2^\ell\right) \bar z_1 + \left(\sum_{k+\ell=2} h_{k\ell} z_1^k z_2^\ell\right) \bar z_2, \tag{26}$$

а $f_{k\ell}, g_{k\ell}, h_{k\ell}$ — некоторые комплексные коэффициенты.

Аналогично многочлен $F_4 = F_4(z, \bar z, u) = F_4^{(0)} + uF_4^{(1)} + u^2F_4^{(2)}$, и при этом

$$F_4^{(0)} = F_{40} + F_{31} + F_{22} + F_{13} + F_{04}. \tag{27}$$

Здесь

$$F_{40} = \alpha_{40} {z_1}^4 + \alpha_{31} {z_1}^3 z_2 + \alpha_{22} {z_1}^2 {z_2}^2 + \alpha_{13} z_1 {z_2}^3 + \alpha_{04} {z_2}^4, \tag{28}$$

$$F_{31} = \left(\beta_{30} {z_1}^3 + \beta_{21} {z_1}^2 z_2 + \beta_{12} z_1 {z_2}^2 + \beta_{03} {z_2}^3\right) \bar z_1 + (\gamma_{30} {z_1}^3 + \gamma_{21} {z_1}^2 z_2 + \gamma_{12} z_1 {z_2}^2 + \\ + \gamma_{03} {z_2}^3) \bar z_2, \tag{29}$$

$$F_{22} = (\nu_1 |z_1| 4 + \nu_2 |z_1|^2 |z_2|^2 + \nu_3 |z_2|^4) + \\ + (\zeta\, {z_1}^2 \bar z_2^2 + \bar\zeta\, {z_2}^2 \bar z_1^2) + (\xi\, {z_1}^2 \bar z_1 \bar z_2 + \bar\xi\, z_1 z_2 \bar z_1^2) + (\eta\, z_1 z_2 \bar z_2^2 + \bar\eta\, {z_2}^2 \bar z_1 \bar z_2), \tag{30}$$

а многочлены F_{13} и F_{04} получаются за счет комплексного сопряжения из многочленов F_{31} и F_{40} соответственно.

Самым простым является представление компоненты $u^2 F_4^{(2)}$ многочлена F_4. Здесь $F_4^{(2)} = \lambda \in \mathbb{R}$. Для слагаемого $uF_4^{(1)}$ имеем представление в виде суммы голоморфной, антиголоморфной и эрмитовой (по переменным $z, \bar z$) частей, так что

$$F_4^{(1)} = (m_{20} {z_1}^2 + m_{11} z_1 z_2 + m_{02} {z_2}^2) + \overline{(m_{20} {z_1}^2 + m_{11} z_1 z_2 + m_{02} {z_2}^2)} + \\ + (n_{11} |z_1|^2 + n_{12} z_1 \bar z_2 + n_{21} z_2 \bar z_1 + n_{22} |z_2|^2) \tag{31}$$

Здесь $n_{11}, n_{22} \in \mathbb{R}$, а все остальные коэффициенты в формуле (31) — комплексные числа. При этом $n_{21} = \overline{n_{12}}$.

Еще одно обозначение $\hat F_k$ введем для суммы всех слагаемых многочлена $F_k(z, \bar z, u)$, содержащих в качестве множителей выражения u^m $(m > 0)$. Тогда для любого многочлена F_k справедливо равенство

$$F_k = F_k^{(0)} + \hat F_k.$$

Теорема 1. *Любая аффинно-однородная поверхность общего положения в $\mathbb{C}^3$, удовлетворяющая дополнительному ограничению $F_3 \neq 0$, однозначно определяется набором многочленов*

$$J = \{F_2, F_3, F_4, \hat{F}_5\} = \{F_2, F_3, F_4^{(0)}, F_4^{(1)}, F_4^{(2)}, F_5^{(1)}, F_5^{(2)}\} \tag{32}$$

из своего канонического уравнения (1).

Замечание. Набор J по аналогии с работой [6] естественно назвать *опорным* набором многочленов для однородной поверхности (1).

Замечание. В качестве следствия из этой теоремы можно получить очень грубую оценку количества аффинно-однородных гиперповерхностей, удовлетворяющих условиям теоремы 1: вещественная размерность пространства модулей для семейства таких поверхностей не превышает 92.

Разумеется, эта оценка сильно завышена. Ниже, в предложении 5, иллюстрируются возможности для ее понижения в общей ситуации. В теореме 2 раздела 5 изучается один случай ограничений на коэффициенты многочлена F_3, не допускающий никаких однородных поверхностей.

Доказательство теоремы 1. Линейные комбинации векторных полей вида (5) накрывают своими «сдвиговыми» компонентами 5-мерную вещественную гиперплоскость $v = 0$ в пространстве $\mathbb{C}^3$. Тогда по теореме Фробениуса [3] аффинно-однородная гиперповерхность, отвечающая такой 5-мерной алгебре и проходящая через начало координат, однозначно определяется этой алгеброй.

Рассматривая теперь связи векторных полей, касательных к однородным поверхностям, с коэффициентами канонических уравнений этих поверхностей, зафиксируем следующее утверждение. Из него очевидно вытекает утверждение теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть аффинно-однородная гиперповерхность общего положения M в $\mathbb{C}^3$ удовлетворяет ограничению $F_3 \neq 0$, а Z — аффинное векторное поле вида (5), касательное к M. Тогда все неосновные параметры этого поля определяются через основную пятерку (p_1, p_2, q) и коэффициенты опорного набора (9).*

Для доказательства леммы обсудим отдельные компоненты основного тождества

$$Re \left\{ \begin{array}{c} (p_1 + (A_1 z_1 + A_2 z_2) + A_3(u + iF)) \frac{\partial F}{\partial z_1} + \\ \\ (p_2 + (B_1 z_1 + B_2 z_2) + B_3(u + iF)) \frac{\partial F}{\partial z_2} + \\ \\ (q + (a z_1 + b z_2) + c(u + iF)) \frac{1}{2}(i + \frac{\partial F}{\partial u}) \end{array} \right\} \equiv 0, \tag{33}$$

отвечающие весам от 1 до 3 (см., например, [4]):

вес 1:

$$Re\{p_1 \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + p_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_2} + (a z_1 + b z_2)\frac{i}{2} + \frac{q}{2}\frac{\partial F_3}{\partial u}\} \equiv 0. \tag{34}$$

Обозначим через $\mathcal{P}$ вектор из двух основных параметров (p_1, p_2), а через $\mathcal{A}$ — вектор из двух (не являющихся основными) параметров (A_3, B_3). Линейно зависящие от $z = (z_1, z_2)$ выражения, входящие в формулу (33), обозначим через

$$L(z) = \begin{pmatrix} A_1 z_1 + A_2 z_2 \\ B_1 z_1 + B_2 z_2 \end{pmatrix} \text{и} \;\; l(z) = a z_1 + b z_2. \tag{35}$$

Выражение вида $(p_1\frac{\partial H}{\partial z_1}+p_2\frac{\partial H}{\partial z_2})$ будем для краткости обозначать через $\partial H(\mathcal{P})$.

С учетом таких обозначений следующие две весовые компоненты основного тождества имеют вид:

вес 2:

$$Re\left\{\partial F_3(\mathcal{P})+\partial F_2(L(z))+\frac{1}{2}q\frac{\partial F_4}{\partial u}-\frac{c}{2}F_2\right\}\equiv 0, \tag{36}$$

вес 3:

$$Re\left\{\partial F_4(\mathcal{P})+\partial F_3(L(z))+(u+iF_2)\partial F_2(\mathcal{A})+\frac{1}{2}\,q\,\frac{\partial F_5}{\partial u}+\frac{1}{2}\,l(z)\,\frac{\partial F_4}{\partial u}-\frac{c}{2}F_3\right\}\equiv 0. \tag{37}$$

Самый простой фрагмент доказательства леммы связан с выписанным тождеством веса 1, из которого выводятся формулы

$$a=2i\left(\bar p_1+2\varepsilon_1 p_1\right),\ b=2i\left(\bar p_2+2\varepsilon_2 p_2\right), \tag{38}$$

справедливые [4] для всех семи типов однородных поверхностей, а не только для поверхностей общего положения.

Для выражения остальных неосновных параметров необходимо записать в развернутой форме тождества весов 2 и 3.

Предложение 3 (см. также [4]). *Для параметров векторного поля (5), касательного к произвольной аффинно-однородной поверхности* $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$*-типа, выполняются следующие уравнения, получаемые из компоненты веса 2 основного тождества:*

$$z_1z_2\ :\ 2(\varepsilon_2B_1+\varepsilon_1A_2)+(2f_{21}p_1+2f_{12}p_2+g_{11}\bar p_1+h_{11}\bar p_2)+m_{11}q=0,$$

$$z_1\bar z_2\ :\ B_1+\bar A_2+(2h_{20}p_1+h_{11}p_2+\bar g_{11}\bar p_1+2\bar g_{02}\bar p_2)+n_{12}q=0,$$

$$z_1^2\ :\ 2\varepsilon_1(A_1-\frac{1}{2}Re\,c)+(3f_{30}p_1+f_{21}p_2+g_{20}\bar p_1+h_{20}\bar p_2)+m_{20}q=0,$$

$$z_2^2\ :\ 2\varepsilon_2(B_2-\frac{1}{2}Re\,c)+(f_{12}p_1+3f_{03}p_2+g_{02}\bar p_1+h_{02}\bar p_2)+m_{02}q=0,$$

$$|z_1|^2\ :\ Re\,(A_1-\frac{1}{2}c)+Re(2g_{20}p_1+g_{11}p_2)+\frac{1}{2}n_{11}q=0,$$

$$|z_2|^2\ :\ Re\,(B_2-\frac{1}{2}c)+Re(h_{11}p_1+2h_{02}p_2)+\frac{1}{2}n_{22}q=0,$$

$$u\ :\ Re\,(\frac{i}{2}c+q\lambda)=0. \tag{39}$$

Легко видеть, что в случае общего положения первые два из этих уравнений позволяют однозначно выразить параметры A_2, B_1 через коэффициенты многочленов F_{30} и $F_4^{(1)}$, входящих в набор (6), и основную пятерку параметров p_1, p_2, q (громоздкие полные формулы для этих параметров мы здесь не приводим).

Из следующей пары уравнений можно получить формулы еще для двух параметров A_1, B_2, выражающие их через «временный» параметр $c_1=Re\,c$, основную пятерку и тот же набор коэффициентов:

$$A_1=\frac{1}{2}Re\,c-\frac{1}{2\varepsilon_1}(3f_{30}p_1+f_{21}p_2+g_{20}\bar p_1+h_{20}\bar p_2+m_{20}q), \tag{40}$$

$$B_2 = \frac{1}{2} Re\, c - \frac{1}{2\varepsilon_2}(f_{12}p_1 + 3f_{03}p_2 + g_{02}\bar{p}_1 + h_{02}\bar{p}_2) + m_{02}q).$$

Из последнего уравнения системы (39) выражается $Im\, c = 2q\lambda$.

Еще два уравнения из этой системы будут использованы в конце этого раздела. А пока мы перейдем к компоненте веса 3 основного тождества, то есть к уравнению (37).

Предложение 4. *Если в уравнении аффинно-однородной поверхности общего положения многочлен F_3 отличен от нуля, то из компоненты веса 3 основного тождества параметры $\mathcal{A} = (A_3, B_3)$ и $c_1 = Re\, c$ выражаются через основной набор параметров и коэффициенты опорного набора.*

Доказательство. Для доказательства разделим (37) на два более простых уравнения. Первое из них содержит все слагаемые с множителем u, а второе зависит кубическим образом от переменных $(z, \bar{z})$. Имеем здесь:

$$u \ : \ Re\left\{\partial F_4^{(1)}(\mathcal{P}) + \partial F_2(\mathcal{A}) + q\, F_5^{(2)} + \frac{1}{2}\, l(z)\, 2\lambda\right\} \equiv 0 \tag{41}$$

и

$$Re\left\{\partial F_4^{(0)}(\mathcal{P}) + \partial F_3(L(z)) + iF_2\partial F_2(\mathcal{A}) + \frac{1}{2}\, q\, F_5^{(1)} + \frac{1}{2}\, l(z)\, F_4^{(1)} - \frac{c}{2}F_3\right\} \equiv 0. \tag{42}$$

Из u^1-компоненты тождества веса 3 выводятся формулы для параметров A_3, B_3, так что

$$\mathcal{A} = \varphi(F_2, F_4^{(1)}, F_4^{(2)}, F_5^{(2)}). \tag{43}$$

Заметим теперь, что с учетом формул (4) слагаемое $Re\,(\partial F_3(L(z))$ из уравнения (36) представляется с точностью до выражений, зависящих от набора J, в виде

$$Re\, \left(\partial F_3\left(\frac{1}{2}\, c_1\, z\right)\right) = \frac{3}{2} c_1 F_3.$$

Это означает, что «временный» параметр $c_1 = Re\, c$ является в уравнении (42) коэффициентом при каждом слагаемом многочлена F_3. В силу условия $F_3 \neq 0$ этот многочлен имеет ненулевой коэффициент хотя бы при одном из мономов $z^\alpha \bar{z}^\beta$ $(|\alpha| + |\beta| = 3)$. Из компоненты уравнения (4.20), соответствующей именно такому моному, получаем формулу для $c_1 = Re\, c$, выражающую этот параметр через p_1, p_2, q и коэффициенты опорного набора J.

Предложение 4 доказано.

В итоге все неосновные параметры выражены через основные и набор (1). Лемма и теорема 1 также доказаны.

Набор опорных коэффициентов можно существенно уменьшить за счет более детального изучения связей между коэффициентами канонических уравнений однородных поверхностей и параметрами векторных полей на таких поверхностях.

Предложение 5. *Для коэффициентов многочленов F_3, F_4 из уравнения аффинно-однородной поверхности $M \subset \mathbb{C}^3$ общего положения выполняются следующие соотношения:*

$$f_{30} = \frac{1}{3}(4\varepsilon_1 g_{20} - \bar{g}_{20}), \quad f_{21} = 2\varepsilon_1 g_{11} - \bar{h}_{20}, \quad f_{12} = 2\varepsilon_2 h_{11} - \bar{g}_{02}, \quad f_{03} = \frac{1}{3}(4\varepsilon_2 h_{02} - \bar{h}_{02}),$$

$$Re\,(m_{20}) = \varepsilon_1 n_{11}, \quad Re\,(m_{02}) = \varepsilon_2 n_{22}.$$

Доказательство. Подставляя формулы (4) в $|z_1|^2$- и $|z_2|^2$-уравнения системы (39), получим соответственно:

$$Re\left((2g_{20}p_1 + g_{11}p_2) + \frac{1}{2}qn_{11}\right) - \frac{1}{2\varepsilon_1}Re\,(3f_{30}p_1 + f_{21}p_2 + g_{20}\bar{p}_1 + h_{20}\bar{p}_2 + m_{20})q) = 0$$

и

$$Re\left((h_{11}p_1 + 2h_{02}p_2) + \frac{1}{2}qn_{22}\right) - \frac{1}{2\varepsilon_1}Re\,(f_{12}p_1 + 3f_{03}p_2 + g_{02}\bar{p}_1 + h_{02}\bar{p}_2 + m_{02}q) = 0.$$

Приравнивая (по лемме о единственности из [5]) коэффициенты при p_1, p_2, q в этих уравнениях нулю, получаем шесть уравнений:

$$p_1\ :\ 2g_{20}\cdot 2\varepsilon_1 - (3f_{30} + \bar{g}_{20}) = 0, \quad h_{11}\cdot 2\varepsilon_2 - (f_{12} + \bar{g}_{20}) = 0,$$

$$p_2\ :\ g_{11}\cdot 2\varepsilon_2 - (f_{21} + \bar{h}_{20}) = 0, \quad 2h_{02}\cdot 2\varepsilon_2 - (3f_{03} + \bar{h}_{02}) = 0,$$

$$q\ :\quad \frac{1}{2}n_{11} = \frac{1}{2\varepsilon_1}Re\,(m_{20}), \quad \frac{1}{2}n_{22} = \frac{1}{2\varepsilon_2}Re\,(m_{02}).$$

Ясно, что эти уравнения равносильны формулам предложения 5, которое, таким образом, доказано.

Следствие 1. *Предложение 5 позволяет понизить на 10 единиц оценку вещественной размерности пространства модулей для семейства аффинно-однородных поверхностей общего положения в* $\mathbb{C}^3$.

5. О коэффициентных запретах для однородных поверхностей

Теорема 2. *Не существует аффинно-однородных поверхностей общего положения, в нормальных уравнениях которых выполняются условия*

$$g_{20} = g_{02} = h_{20} = h_{02} = 0,\ g_{11} \neq 0 \qquad (44)$$

последнего случая из предложения 2.

Доказательство. Доказательство теоремы 2 было получено за счет компьютерных вычислений, связанных с весьма громоздкими формулами и реализованных в пакете символьных вычислений Maple. Здесь мы приводим лишь описание схемы вычислений, некоторые их промежуточные результаты и комментарии к ним.

Итак, рассмотрим уравнения (41) и (42). Мы покажем, что в совокупности с ограничениями (44) и условием общности положения эти уравнения приводят к противоречию.

Как и в предыдущем разделе (см. предложение 4), параметры A_3, B_3 выражаются из (41). Полученные для них формулы подставим в уравнение (42) и развернем результат в систему из 10 «скалярных» уравнений, отвечающих различным мономам $z^\alpha \bar{z}^\beta$ $(|\alpha| + |\beta| = 3)$.

Комплексное уравнение, отвечающее моному $z_1 z_2 \bar{z}_1$, можно решить относительно параметра c_1. В силу вещественности этого параметра, получаемая формула также должна быть вещественной при любых значениях входящих в нее основных параметров p_1, p_2, q. Это замечание дает нам три вещественных уравнения, освобожденных от параметров поля и зависящих только от коэффициентов канонического уравнения (1).

Подстановка полученной формулы для c_1 в остальные 9 уравнений тождества веса 3 позволяет получить еще $9 \times 5 = 45$ комплексных (или 90 вещественных) уравнений, также зависящих только от коэффициентов уравнения (1). Таким образом из компоненты веса 3 основного тождества можно получить (не только в условиях теоремы 2, но и вообще, при $F_3 \neq 0$!) систему из 93 вещественных уравнений относительно коэффициентов опорного набора многочленов. В силу следствия из предложения 5 количество таких коэффициентов можно считать не превышающим 82, так что обсуждаемая система является переопределенной.

Мы поочередно рассмотрим несколько подсистем полученной системы, решая их относительно отдельных групп неизвестных. Подстановка получаемых при этом формул в уравнения очередных подсистем существенно упрощает эти уравнения. В итоге мы придем к несовместимости ограничений (44) и условия общности положения для однородных поверхностей.

Прежде всего заметим, что в силу допущения (44) шесть из десяти уравнений, отвечающие мономам

$$z_1^3, z_2^3, z_1^2\bar{z}_1, z_1^2\bar{z}_2, z_2^2\bar{z}_2, z_2^2\bar{z}_2, \tag{45}$$

не содержат параметра c_1. Поэтому каждое из них сразу распадается на пять комплексных уравнений, отвечающих коэффициентам при параметрах $p_1, p_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2, q$.

Мы будем рассматривать $6 \times 4 = 24$ комплексных $(p, \bar{p})$-уравнений, зависящих от коэффициентов многочленов F_2, F_3, F_4 (в q-уравнениях участвует еще и многочлен F_5). Рассмотрение именно такой подсистемы общей системы из 93 уравнений составляет основу предлагаемого доказательства теоремы 2.

Одно из таких 24 уравнений приведено ниже. Оно получено как равенство нулю коэффициента при параметре p_1 в соотношении, отвечающем моному z_1^3 :

$$\frac{1}{(-\varepsilon_2{}^2 + \varepsilon_1{}^2)(-1 + 4\,\varepsilon_1{}^2)}(-16\,\varepsilon_1{}^6\lambda + 4\,\alpha_{40}\varepsilon_2{}^2 - 4\,\alpha_{40}\varepsilon_1{}^2 + 16\,\alpha_{40}\varepsilon_1{}^4 - 12\,\varepsilon_1{}^4\lambda +$$

$$+4\,i\varepsilon_1{}^2 n_{11}\varepsilon_2{}^2 - 16\,i\varepsilon_1{}^3 m_{20}\varepsilon_2{}^2 - 4\,i\varepsilon_1{}^4 n_{11} + 12\,\varepsilon_1{}^2\lambda\,\varepsilon_2{}^2 + 16\,\varepsilon_1{}^4\lambda\,\varepsilon_2{}^2 - 2\,g_{11}{}^2\varepsilon_1{}^2\varepsilon_2 -$$

$$-g_{11}\varepsilon_1{}^2\bar{g}_{11} + 16\,i\varepsilon_1{}^5 m_{20} + 8\,g_{11}{}^2\varepsilon_1{}^4\varepsilon_2 + 4\,g_{11}\varepsilon_1{}^4\bar{g}_{11} - 16\,\alpha_{40}\varepsilon_1{}^2\varepsilon_2^2) = 0. \tag{46}$$

Уточним теперь, что в предлагаемые к рассмотрению 24 уравнения не входят коэффициенты α_{22} и ν_2. Это означает, что система содержит 43 неизвестных вещественных коэффициента многочлена F_4, от которых все уравнения системы зависят линейным образом.

Отметим также, что в уравнения этой системы помимо коэффициентов F_4 входят квадратичные комбинации коэффициентов многочлена F_3. В нашем случае у этого многочлена имеются лишь два существенных коэффициента: g_{11} и h_{11}. Еще четыре из 10 коэффициентов F_3 равны нулю в силу (44), а в силу предложения 5

$$f_{30} = 0, \quad f_{21} = 2\varepsilon_1 g_{11}, \quad f_{12} = 2\varepsilon_2 h_{11}, \quad f_{03} = 0. \tag{47}$$

Наконец, в уравнениях присутствуют параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, причем в виде полиномов достаточно высоких степеней.

Процедуру решения большой линейной системы, содержащей и комплексные, и вещественные неизвестные, можно реализовать «по частям». Например, сначала можно решить часть уравнений относительно части комплексных величин. В нашем случае это привело к выражению 12 (комплексных) коэффициентов многочлена F_4^0 (всех, кроме α_{22}) через коэффициенты многочленов F_3, $F_4^{(1)}$ и $\lambda = F^2$.

Формулы при этом получаются достаточно громоздкие, например:

$$\alpha_{40} = -\frac{\varepsilon_1^2}{4\,\Omega}(-16\,{\varepsilon_1}^4\lambda - 12\,{\varepsilon_1}^2\lambda - 4\,i{\varepsilon_1}^2 n_{11} + 16\,i{\varepsilon_1}^3 m_{20} + 4\,in_{11}{\varepsilon_2}^2 + 12\,\lambda\,{\varepsilon_2}^2 +$$

$$+16\,{\varepsilon_1}^2\lambda\,{\varepsilon_2}^2 - 2\,\varepsilon_2{g_{11}}^2 - g_{11}\bar{g}_{11} - 16\,i\varepsilon_1 m_{20}{\varepsilon_2}^2 + 8\,{g_{11}}^2{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2 + 4\,g_{11}{\varepsilon_1}^2\bar{g}_{11}), \qquad (48)$$

где

$$\Omega = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,(2\,\varepsilon_1 + 1)\,(2\,\varepsilon_1 - 1)\,.$$

Теперь от системы из 24 уравнений остается лишь 12 уравнений. Их придется записать в вещественной форме, учитывая большое количество неизвестных вещественных коэффициентов многочлена $F_4^{(0)}$ и вхождение в эти уравнения не только самих таких коэффициентов, но и комплексно сопряженных к ним величин. У двух комплексных коэффициентов g_{11} и h_{11} многочлена F_3 также выделим вещественные и мнимые части, полагая

$$r_1 = Re\,h_{11},\ r_2 = Im\,h_{11},\ r_3 = Re\,g_{11},\ r_4 = Im\,g_{11}. \qquad (49)$$

Из 24 вещественных уравнений оставшейся системы теперь выражаются все оставшиеся 19 (вещественных) коэффициентов многочлена $F_4^{(0)}$. Например,

$$\lambda = -\frac{1}{256}\,\frac{(2\,\epsilon_1 - 1)\,(2\,\varepsilon_1 + 1)}{\varepsilon_1\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}((32\,{\varepsilon_1}^2{\varepsilon_2}^2 + 16\,{\varepsilon_2}^2\varepsilon_1 - 6\,\varepsilon_1 + 96\,{\varepsilon_2}^4\varepsilon_1 + 12\,{\varepsilon_2}^2 -$$

$$-\,3)r_1^2 - \left(32\,{\varepsilon_1}^2{\varepsilon_2}^2 - 18\,\varepsilon_1 + 288\,{\varepsilon_2}^4\varepsilon_1 + 80\,{\varepsilon_2}^2\varepsilon_1 - 3 + 12\,{\varepsilon_2}^2\right)r_2^2) +$$

$$+\frac{1}{256}\,\frac{(2\,\varepsilon_2 - 1)\,(2\,\varepsilon_2 + 1)}{\varepsilon_2\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}(\left(32\,{\varepsilon_1}^2{\varepsilon_2}^2 - 6\,\varepsilon_2 + 96\,{\varepsilon_1}^4\varepsilon_2 + 16\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2 - 3 + 12\,{\varepsilon_1}^2\right)r_3^2 +$$

$$+\left(-32\,{\varepsilon_1}^2{\varepsilon_2}^2 - 6\,\varepsilon_2 + 96\,{\varepsilon_1}^4\varepsilon_2 + 16\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2 - 12\,{\varepsilon_1}^2 + 3\right)r_4^2). \qquad (50)$$

После этого от всей начальной подсистемы 24 комплексных или 48 вещественных уравнений остается пять вещественных уравнений. Эти уравнения свободны от коэффициентов многочлена $F_4^{(0)}$, а зависят лишь от двух параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и от четверки вещественных коэффициентов r_1, r_2, r_3, r_4.

Два из этих пяти уравнений приведены ниже:

$$\left(64\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 - 8\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 4\,\varepsilon_2^4\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2^2 + 12\,\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 - 3\,\varepsilon_1^3\right)r_2 r_1 +$$

$$+\left(4\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 - \varepsilon_1^2\varepsilon_2 + 3\,\varepsilon_2^3 - 12\,\varepsilon_2^5\right)r_4 r_3 = 0, \qquad (51)$$

$$(2\,\varepsilon_2 + 1)\left(16\,{\varepsilon_2}^3\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2^2 + 24\,{\varepsilon_1}^2{\varepsilon_2}^2 + 8\,{\varepsilon_1}^3\varepsilon_2 - 8\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2 + 4\,\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 6\,{\varepsilon_1}^2\right)r_1 r_3 +$$

$$+\ (28\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2 - 6\,\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - 20\,\varepsilon_2^3 - 8\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 2\,\varepsilon_1\varepsilon_2 + 16\,\varepsilon_2^2\varepsilon_1^3 - 8\,\varepsilon_1^3\varepsilon_2 -$$

$$-\,16\,\varepsilon_2^2\varepsilon_1 - 16\,\varepsilon_2^3\varepsilon_1 - 80\,\varepsilon_2^3\varepsilon_1^2)r_2 r_4 = 0. \qquad (52)$$

К этим пяти уравнениям можно еще добавить две последние формулы предложения 5, выраженные через коэффициенты многочленов F_3 и F_2. Эти два дополнительных уравнения имеют вид:

$$r_2 r_1 \left(24\,\varepsilon_2^4 + 4\,\varepsilon_1\varepsilon_2^2 - 4\,\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1\right) = 0. \tag{53}$$

$$\begin{gathered}\left(64\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2^4 - 8\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2^2 - 4\,\varepsilon_2^4\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2^2 + 12\,\varepsilon_1^3{\varepsilon_2}^2 - 3\,\varepsilon_1^3\right) r_2 r_1 + \\ + \left(4\,{\varepsilon_2}^5 + 4\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 - {\varepsilon_1}^2\varepsilon_2 - \varepsilon_2^3\right) r_4 r_3 = 0.\end{gathered} \tag{54}$$

Предложение 6. *Любое решение системы из 7 уравнений (51)–(53), удовлетворяющее ограничению $r_3 + ir_4 \neq 0$ и условию общего положения относительно параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, имеет один из двух типов (независимо от значений этих параметров):*

$$1\,)\ r_1 = 0, r_2 = 0, r_3 = 0, r_4 \neq 0 \quad \textit{или} \quad 2\,)\ r_1 = 0, r_2 = 0, r_4 = 0, r_3 \neq 0. \tag{55}$$

Теперь остается проверить оба случая из (55) на остальных уравнениях системы веса 3, отвечающих мономам $z_1^2 z_2, z_1 z_2^2, z_1 z_2 \bar{z}_2$.

С учетом (55) эти 12 сложно устроенных комплексных уравнений существенно упрощаются и становятся вещественными. Более того, в каждом из двух вариантов (55) половина таких уравнений превращается в нулевые тождества. К таким 6 уравнениям можно добавить еще два упомянутых выше уравнения на коэффициенты многочлена F_4, возникающие из условия вещественности параметра c_1.

В эту восьмерку уравнений входят коэффициенты α_{22}, ν_2 многочлена F_{22}, которые мы исключили из рассмотрения в первой подсистеме. Теперь их можно выразить из остающейся системы. Например, в случае $r_1 = 0, r_2 = 0, r_3 = 0, r_4 \neq 0$ одно из двух уравнений, связанных с условием вещественности c_1, можно переписать в виде формулы

$$\begin{gathered}\nu_2 = \frac{{r_3}^2(144\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 288\,\varepsilon_2^4 + 1824\,\varepsilon_1^4\varepsilon_2 - 9 - 72\,\varepsilon_2^3 + 18\,\varepsilon_2 + 1920\,\varepsilon_2^3{\varepsilon_1}^4 + 1536\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^5)}{384\,\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)^2\varepsilon_2} + \\ + \frac{r_3^2(768\,\varepsilon_2^5 - 1792\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 + 36\,\varepsilon_1^2 - 288\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + 12\,{\varepsilon_2}^2 + 4608\,\varepsilon_2^4\varepsilon_1^4 - 1152\,\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2 + 1408\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4)}{384\,\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)^2\varepsilon_2}.\end{gathered} \tag{56}$$

Коэффициент α_{22} можно выразить из уравнения, входящего в шестерку упомянутых выше. Тогда остающиеся пять уравнений из этих шести имеют (в случае $r_1 = 0, r_2 = 0, r_3 = 0, r_4 \neq 0$) вид

$$\begin{gathered}2\,\varepsilon_1{r_3}^2(-288\,\varepsilon_1^4\varepsilon_2 - 12\,\varepsilon_1^2 + 64\,\varepsilon_2^4 - 48\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2^2 + 256\,\varepsilon_1^2{\varepsilon_2}^3 + 3 + \\ + 384\,\varepsilon_2^3\varepsilon_1^4 + 128\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 - 12\,\varepsilon_2^2 - 40\,\varepsilon_2^3 + 6\,\varepsilon_2) = 0, \\ 32\,\varepsilon_1{r_3}^2\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\left(-24\,{\varepsilon_1}^2 + 24\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2 - 8\,\varepsilon_2 + 3 + 8\,\varepsilon_2^2\right) = 0, \\ 2\,{r_3}^2(32\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2 - 480\,{\varepsilon_1}^4\varepsilon_2 + 384\,\varepsilon_2^3{\varepsilon_1}^4 + 128\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 - 80\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2^2 + 448\,\varepsilon_1^2{\varepsilon_2}^3 + 3 - \\ - 12\,\varepsilon_2^2 + 96\,\varepsilon_2^4 - 12\,{\varepsilon_1}^2 - 72\,\varepsilon_2^3 + 6\,\varepsilon_2) = 0, \\ \varepsilon_1\left(2\,\varepsilon_2 + 1\right)\left(64\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2^3 + 16\,\varepsilon_2^3 + 192\,\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2 - 28\,\varepsilon_2^2 - 8\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2 - 96\,\varepsilon_1^4\varepsilon_2 + 4\,\varepsilon_1^2 + 3\right) = 0, \\ -\,384\,\varepsilon_2^4\varepsilon_1^4 + 96\,\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2 - 128\,\varepsilon_1^4\varepsilon_2 + 44\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2 - 128\,\varepsilon_1^2{\varepsilon_2}^5 - 64\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 + \\ + 144\,{\varepsilon_1}^2\varepsilon_2^3 + 8\,\varepsilon_1^2 - 20\,{\varepsilon_2}^3 + 40\,\varepsilon_2^4 - 14\,\varepsilon_2^2 - 3\,\varepsilon_2 - 32\,\varepsilon_2^5 = 0.\end{gathered} \tag{57}$$

Эти уравнения можно освободить от заведомо ненулевых (в условиях общности положения) множителей

$$2\,\varepsilon_1 {r_3}^2, \quad 32\,\varepsilon_1 {r_3}^2\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,(\varepsilon_1-\varepsilon_2), \quad 2\,{r_3}^2, \quad \varepsilon_1\,(2\,\varepsilon_2+1)$$

и применить к пяти упрощенным уравнениям процедуру построения базиса Гребнера (реализуемую в Maple, например, с опцией plex). Несмотря на переопределенный, вообще говоря, характер этой системы (5 уравнений относительно двух неизвестных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$), решения у нее имеются.

Более точно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 7. *У идеала, порожденного пятью упрощенными уравнениями (57), имеется базис из двух многочленов* $P_1 = 1 + 2\varepsilon_2$ *и* $P_2 = 1 - 4\varepsilon_1^2$.

Так как в условиях общности положения ни один из этих многочленов не равен нулю, это означает, что в случае $r_1 = 0, r_2 = 0, r_3 = 0, r_4 \neq 0$ мы получили противоречие, связанное с невозможностью одновременного выполнения условий общности положения и ограничений (7) для аффинно-однородных гиперповерхностей.

Второй вариант из (55) обсуждается аналогично и приводит к аналогичному противоречию.

Теорему 2 считаем доказанной.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа частично поддержана грантом РФФИ № 14-01-00709.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимова, Е. В. Компьютерные алгоритмы интегрирования матричных алгебр Ли / Е. В. Акимова, А. В. Лобода // Сб. студ. науч. работ ФКН ВГУ. — 2015. — № 4. — С. 3–8.
2. Атанов, А. В. Аффинно-однородные поверхности типа (0,0) в пространстве $\mathbb{C}^3$ / А. В. Атанов, А. В. Лобода // Мат. заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 309–313.
3. Бишоп, Р. Геометрия многообразий / Р. Бишоп, Р. Криттенден. — М. : Мир, 1963. — 364 с.
4. Лобода, А. В. О размерностях групп аффинных преобразований, транзитивно действующих на вещественных гиперповерхностях в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — № 4. — С. 11–35.
5. Лобода, А. В. Об определении однородной строго псевдо-выпуклой гиперповерхности по коэффициентам ее нормального уравнения / А. В. Лобода // Мат. заметки. — 2003. — Т. 73, № 3. — С. 419–423.
6. Лобода, А. В. Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии / А. В. Лобода // Мат. сб. — 2001. — Т. 192. — С. 3–24.
7. Лобода, А. В. О различных способах представления матричных алгебр Ли, связанных с однородными поверхностями / А. В. Лобода, В. К. Евченко // Изв. вузов. Математика. — 2013. — № 4. — С. 42–60.
8. Лобода, А. В. Об аффинной однородности поверхностей трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода, Т. Т. З. Нгуен // Тр. МИАН. — 2012. — Т. 279. — С. 102–119.
9. Лобода, А. В. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Изв. вузов. Математика. — 2003. — № 10. — С. 38–50.

10. Лобода, А. В. О полном списке аффинно-однородных поверхностей $(\varepsilon, 0)$-типов в пространстве $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода, А. В. Шиповская // Изв. вузов. Математика. — 2015. — № 2. — С. 75–82.

11. Нгуен, Т. Т. З. Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ / Т. Т. З. Нгуен // Мат. заметки. — 2013. — Т. 94, № 2. — С. 246–265.

12. Шиповская, А. В. Системы квадратичных уравнений, связанные с задачей об аффинной однородности / А. В. Шиповская // Вестник ВГУ. Физика. Математика. — 2015. — № 4. — С. 190–201.

13. Applications of differential algebra for computing Lie algebras of infinitesimal CR-automorphisms / M. Sabzevari, A. Hashemi, B. M. Alizadeh, J. Merker. — Electronic text data. — Mode of access: http://arxiv.org/abs/1212.3070. — Title from screen.

14. Atanov, A. V. Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type $(1/2, 0)$ in $\mathbb{C}^3$ / A. V. Atanov, A. V. Loboda, A. V. Shipovskaja. — Electronic text data. — Mode of access: http://arxiv.org/abs/1401.2252. — Title from screen.

15. Beloshapka, V. K. Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic / V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskiy // J. Geom. Anal. — 2010. — Vol. 20, № 3. — P. 538–564.

16. Cartan, E. Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes / E. Cartan // Ann. Math. Pura Appl. — 1932. — Vol. 11, № 4. — P. 17–90.

17. Doubrov, B. Homogeneous surfaces in the 3-dimensional affine geometry / B. Doubrov, B. Komrakov, M. Rabinovich // Prepr. Ser. Pure Math. — 1995. — P. 1–26.

18. Eastwood, M. On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space / M. Eastwood, V. V. Ezhov // Geom. Dedicata. — 1999. — Vol. 77. — P. 11–69.

19. Fels, G. Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 / G. Fels, W. Kaup // Acta Math. — 2008. — Vol. 210. — P. 1–82.

20. Isaev, A. V. On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds / A. V. Isaev, B. Kruglikov. — Electronic text data. — Mode of access: http://arxiv.org/abs/1607.06072. — Title from screen.

21. Johnson, C. R. Solution Theory for Systems of Bilinear Equations / C. R. Johnson, H. Smigoc, D. Yang. — Electronic text data. — Mode of access: http://arxiv.org/abs/1303.4988. — Title from screen.

22. Loboda, A. V. On homogeneity of embedded manifolds / A. V. Loboda. — Electronic text data. — Mode of access: http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/sfb701/files/preprints/sfb10091.pdf. — Title from screen.

23. Loboda, A. V. One family of algebraic homogeneous surfaces / A. V. Loboda, V. K. Evchenko. — Electronic text data. — Mode of access: http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/sfb701/files/preprints/sfb11129.pdf. — Title from screen.

REFERENCES

1. Akimova E.V., Loboda A.V. Kompyuternye algoritmy integrirovaniya matrichnykh algebr Li [Computer Algorithms of Integrating Matrix Li Algebras]. *Sb. stud. nauch. rabot FKN VGU*, 2015, no. 4, pp. 3-8.

2. Atanov A.V., Loboda A.V. Affinno-odnorodnye poverkhnosti tipa (0,0) v prostranstve $\mathbb{C}^3$ [Affine Homogeneous Surfaces of (0,0)-Type in $\mathbb{C}^3$ Space]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2015, vol. 97, no. 2, pp. 309-313.

3. Bishop R., Krittenden R. *Geometriya mnogoobraziy* [Geometry of Manifolds]. Moscow, Mir Publ., 1963. 364 p.

4. Loboda A.V. O razmernostyakh grupp affinnykh preobrazovaniy, tranzitivno deystvuyushchikh na veshchestvennykh giperpoverkhnostyakh v $\mathbb{C}^3$ [On Dimensions of Affine Transformation Groups Transitively Acting on a Real Hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 4, pp. 11-35.

5. Loboda A.V. Ob opredelenii odnorodnoy strogo psevdo-vypukloy giperpoverkhnosti po koeffitsientam ee normalnogo uravneniya [On Determing Homogeneous Pseudo-Convex Hypersurface by Means of Its Normal Equation Coefficients]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2003, vol. 73, no. 3, pp. 419-423.

6. Loboda A.V. Odnorodnye strogo psevdo-vypuklye giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$ s dvumernymi gruppami izotropii [Homogeneous Pseudo-Convex Hypersurface in $\mathbb{C}^3$ with Two-Dimesional Isotropy Groups]. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2001, vol. 192, pp. 3-24.

7. Loboda A.V., Evchenko V.K. O razlichnykh sposobakh predstavleniya matrichnykh algebr Li, svyazannykh s odnorodnymi poverkhnostyami [On Different Ways of Presenting Matrix Li Algebras, Connected with Homogeneous Surface]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2013, no. 4, pp. 42-60.

8. Loboda A.V., Nguen T.T.Z. Ob affinnoy odnorodnosti poverkhnostey trubchatogo tipa v $\mathbb{C}^3$ [On Affine Homogeneity of a Surfaces of Tubular Type in $\mathbb{C}^3$]. *Tr. MIAN*, 2012, vol. 279, pp. 102-119.

9. Loboda A.V., Khodarev A.S. Ob odnom semeystve affinno-odnorodnykh veshchestvennykh giperpoverkhnostey 3-mernogo kompleksnogo prostranstva [On a Family of Affinely Homogeneous Real Hypersurfaces of 3-Dimensional Complex Space]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2003, no. 10, pp. 38-50.

10. Loboda A.V., Shipovskaya A.V. O polnom spiske affinno-odnorodnykh poverkhnostey $(\varepsilon, 0)$-tipov v prostranstve $\mathbb{C}^3$ [On the Full List of Affine Homogeneous Surface of $(\varepsilon, 0)$-Type in $\mathbb{C}^3$ Space]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2015, no. 2, pp. 75-82.

11. Nguen T.T.Z. Affinno-odnorodnye veshchestvennye giperpoverkhnosti trubchatogo tipa v $\mathbb{C}^3$ [Affine Homogeneous Real Hypersurfaces of Tubular Type in $\mathbb{C}^3$]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2013, vol. 94, no. 2, pp. 246-265.

12. Shipovskaya A.V. Sistemy kvadratichnykh uravneniy, svyazannye s zadachey ob affinnoy odnorodnosti [Systems of Quadratic Equations Connected with Affine Homogeneity Problem]. *Vestnik VGU. Fizika. Matematika*, 2015, no. 4, pp. 190-201.

13. Sabzevari M., Hashemi A., Alizadeh B.M., Merker J. *Applications of differential algebra for computing Lie algebras of infinitesimal CR-automorphisms*. Available at: http://arxiv.org/abs/1212.3070.

14. Atanov A.V., Loboda A.V., Shipovskaja A.V. *Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type* $(1/2, 0)$ *in* $\mathbb{C}^3$. Available at: http://arxiv.org/abs/1401.2252.

15. Beloshapka V.K., Kossovskiy I.G. Homogeneous Hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, Associated with a Model CR-Cubic. *J. Geom. Anal.*, 2010, vol. 20, no. 3, pp. 538-564.

16. Cartan E. Sur la Geometrie Pseudoconforme des Hypersurfaces de Deux Variables Complexes. *Ann. Math. Pura Appl.*, 1932, vol. 11, no. 4, pp. 17-90.

17. Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M. Homogeneous Surfaces in the 3-Dimensional Affine Geometry. *Prepr. Ser. Pure Math.*, 1995, pp. 1-26.

18. Eastwood M., Ezhov V.V. On Affine Normal Forms and a Classification of Homogeneous Surfaces in Affine Three-Space. *Geom. Dedicata*, 1999, vol. 77, pp. 11-69.

19. Fels G., Kaup W. Classification of Levi Degenerate Homogeneous CR-Manifolds in Dimension 5. *Acta Math.*, 2008, vol. 210, pp. 1-82.

20. Isaev A.V., Kruglikov B. *On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds*. Available at: http://arxiv.org/abs/1607.06072.

21. Johnson C.R., Smigoc H., Yang D. *Solution Theory for Systems of Bilinear Equations*. Available at: http://arxiv.org/abs/1303.4988.

22. Loboda A.V. *On homogeneity of embedded manifolds*. Available at: http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/sfb701/files/preprints/sfb10091.pdf.

23. Loboda A.V., Evchenko V.K. *One family of algebraic homogeneous surfaces*. Available at: http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/sfb701/files/preprints/sfb11129.pdf.

ON AFFINE HOMOGENEOUS REAL HYPERSURFACES OF GENERAL POSITION IN $\mathbb{C}^3$

Alexander Vasilyevich Loboda

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Voronezh State Technical University
lobvgasu@yandex.ru
20-letiya Oktyabrya St., 84, 394006 Voronezh, Russian Federation

Aleksandra Vladimirovna Shipovskaya

Postgraduate Student,
Voronezh State Technical University
al.shipovskaia@gmail.com
20-letiya Oktyabrya St., 84, 394006 Voronezh, Russian Federation

Abstract. The article develops a coefficients approach to the problem of the description of affine homogeneous real hypersurfaces of 3-dimensional complex space. The connections are studied and used between the coefficients of affine canonical equations for strictly pseudoconvex surfaces of $\mathbb{C}^3$ space and Lie algebras of affine vector fields on such varieties.

The previously developed scheme for obtaining a list of all algebras, as well as the Homogeneous manifolds, has shown its effectiveness in four of the seven cases determined by the second-order coefficients of the canonical equations of such surfaces.

In the case of surfaces of general position studied in this paper, this scheme leads to the complicated system of quadratic equations. Here the authors build only several families of matrix Lie algebras corresponding to homogeneous manifolds from the class under consideration. Two families of affine homogeneous surfaces are obtained by integrating the constructed Lie algebras. It is shown that some of the obtained “different” families of the Lie algebras lead to the affine-equivalent homogeneous surfaces. It means that the scheme used requires refinement and simplification.

Within the framework of the modification of the described scheme, two theorems about the relations between the coefficients of the canonical equations of affine-homogeneous surfaces of general position are proved.

Theorem 1 identifies a basic set of Taylor coefficients of the canonical equation of affine-homogeneous surface in general position, uniquely defining any such surface. Under the condition of a nonzero polynomial of the third degree from this equation this set contains, generally speaking, 92 real coefficient (of the second, third and fourth degrees). A number of statements have been received decreasing this rough estimate of the dimension of the moduli space for the family of homogeneous surfaces under consideration.

Four types of polynomials of the third degree are distinguished, for each of which the specific simplifications are possible of the canonical equations as well as the whole homogeneity problem. In Theorem 2 the absence of homogeneous surfaces is proved in one of these four cases. The proof is carried out by means of sufficiently large symbolic computations, implemented in the Maple package.

Key words: affine transformation, real hypersurface, canonical equation of surface, homogeneous manifold, Lie algebra, system of polynomial equations, symbolic calculations.