DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5

УДК 530.182, 53.02
ББК 22.19

РЕДУКЦИЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Максим Леонидович Зайцев

Аспирант, соискатель,
Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН
mlzaytsev@gmail.com
ул. Большая Тульская, 52, 115191 г. Москва, Российская Федерация

Вячеслав Борисович Аккерман

Кандидат физико-математических наук, преподаватель,
Университет Западной Вирджинии
Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
WV 26506-6106 г. Моргантаун, США

Аннотация. Разработан технический прием редукции переопределенных систем дифференциальных уравнений. В предыдущих работах авторов была показана возможность сокращения размерности у переопределенных систем дифференциальных уравнений. В данной работе эта идея развивается, а именно найдены новые достаточные условия, при которых сокращается размерность и находятся явные представления решений переопределенных систем дифференциальных уравнений. Показывается, как, решая редуцированные уравнения на поверхности, можно составлять и находить в том числе решения исходной системы дифференциальных уравнений во всем объеме. Для примера, приведены по-новому преобразованные, переопределенные системы уравнений Эйлера, Навье – Стокса, уравнений аналитической механики и тестовые аналитические примеры. На основе данного метода предлагается способ явного представления их решения с помощью программных средств. Исследуется задача Коши для редуцированных переопределенных систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: переопределенные системы дифференциальных уравнений, уравнения Эйлера, Навье – Стокса, дифференциальные уравнения на поверхности, ОДУ, размерность дифференциальных уравнений, задача Коши, уравнения в частных производных.

Введение

Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных (нелинейные уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях [15]. Общее решение нелинейных уравнений математической физики удается получить только в исключительных случаях. Поэтому обычно приходится ограничиваться поиском и анализом частных решений, которые принято называть точными решениями [5; 13].

Точные решения дифференциальных уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть важнейшую роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях науки и техники [15]. Можно сказать, что невозможность решить эти уравнения является препятствием для дальнейшего изучения многих физических явлений и применения их на практике. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют физику и позволяют разобраться в механизме таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др. [7]. Научный интерес представляет даже поиск решений дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического приложения. Подобные примеры могут быть успешно использованы в качестве «тестовых» задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных методов. Допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного решения, представимого в явном виде. Точные методы и решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических (символьных) вычислений (системы MATHEMATICA, MAPLE, CONVODE, MATHCAD и др.).

Существуют различные приемы для поиска точных решений уравнений математической физики, например, метод дифференциальных связей [5; 13; 15]. В данной работе мы развиваем один из этих методов, а именно прием редукции переопределенных систем дифференциальных уравнений, предложенный ранее в работах авторов [1; 3]. Решается обратная задача. Показывается, как, решая редуцированные уравнения на поверхности, можно составлять и находить решения исходной системы дифференциальных уравнений во всем объеме. Мы приводим также аналитические, модельные примеры и преобразовываем уравнения механики и гидродинамики к переопределенным с тем, чтобы к ним можно было бы применить данный метод.

1. Теория метода. Прямая задача

Для полноты изложения представим сначала вкратце основные теоретические результаты, полученные авторами ранее в работах [1; 3]. Здесь и далее, если не оговорено особо, мы будем предполагать, что все рассматриваемые функции являются гладкими и достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам. Рассмотрим в пространстве $(\mathbf{r},t)$ систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_k(\mathbf{r},t)$, $v=1...p$, переопределенную одним *независимым* уравнением (на каком-нибудь решении, например):

$$H_k\left(S_v,\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{r}},\frac{\partial S_v}{\partial t},\mathbf{r},t\right)=0,\ v=1...p,\ k=1...p, \tag{1}$$

$$G\left(S_v,\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{r}},\frac{\partial S_v}{\partial t},\mathbf{r},t\right)=0. \tag{2}$$

Перейдем в точке M в систему координат $(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2,\mathbf{n})$ на некоторой неподвижной поверхности ($\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности; $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ – единичные касательные к поверхности). Тогда уравнения (1), (2) запишутся в виде

$$H_k\left(S_v,\frac{\partial S_v}{\partial \tau_1},\frac{\partial S_v}{\partial \tau_2},\frac{\partial S_v}{\partial n},\frac{\partial S_v}{\partial t}...\right)=0,\ v=1...p,\ k=1...p, \tag{3}$$

$$G\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial n}, \frac{\partial S_v}{\partial t} ...\right) = 0 . \quad (4)$$

Выразим из уравнений (3) нормальные производные $\partial S_k / \partial n$ в явном виде

$$\frac{\partial S_k}{\partial n} = F_k\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t} ...\right), \; v = 1...p , \; k = 1...p . \quad (5)$$

Подставим их выражения (5) в формулу (4). Тогда

$$G^{(1)}\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t} ...\right) = 0 . \quad (6)$$

Продифференцируем уравнение (6) в направлении **n** и подставим вместо $\partial S_k / \partial n$ их выражения из (5). Тогда находим, что

$$G^{(2)}\left(S_v, \frac{\partial^2 S_v}{\partial \tau_1 \partial t}, \frac{\partial^2 S_v}{\partial \tau_2 \partial t}, \frac{\partial^2 S_v}{\partial t^2} ...\right) = 0 . \quad (7)$$

Проделаем аналогичную процедуру p раз. Получим p уравнений на поверхности вида

$$G^{(1)}\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t} ...\right) = 0 , \; ...$$
$$G^{(p)}\left(S_v, \frac{\partial^p S_v}{\partial \tau_1 \partial t^{p-1}}, \frac{\partial^p S_v}{\partial \tau_2 \partial t^{p-1}}, \frac{\partial^p S_v}{\partial t^p} ...\right) = 0 . \quad (8)$$

Мы нашли замкнутую систему из p поверхностных дифференциальных уравнений (8) строго вдоль границы рассматриваемой поверхности и такого же количества переменных S_k, $k = 1...p$, эволюционирующих во времени. Таким образом, может быть высказано следующее утверждение (возможно, являющееся перенесением на случай рассматриваемой переопределенной системы известного метода «подстановки»).

Утверждение 1. *Любую систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (1), описывающих эволюционирующие во времени их решения* $S_k(\mathbf{r},t)$, $k = 1...p$, *в евклидовом пространстве и переопределенную любым дифференциальным уравнением (2) первого порядка, можно преобразовать к системе из p дифференциальных уравнений и такого же числа неизвестных* $S_k(\mathbf{r},t)$, $k = 1...p$, *на любой неподвижной поверхности, если в системе координат* $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n})$ *для любой точки на этой поверхности все нормальные производные* $\partial S_k / \partial n$ *из системы (1) явно выражаются, как функции от переменных, задаваемых исключительно на рассматриваемой поверхности (5).*

Формально ничего не мешает подобной процедурой получать больше, чем p уравнений на поверхности (8), то есть найти переопределенную систему уравнений уже на ней, и, следовательно, сократить размерность на поверхности и т. д. вплоть до полного решения, представимого в явном виде (см. часть 5). Однако это не означает, что подобной процедурой можно найти полное решение любой переопределенной системы уравнений [3]. Кроме того, сократить размерность можно не на каждой поверхности (см. [3] и часть 3).

Введем обозначения $A_v = \partial S_v / \partial t$, $v = 1...p$. Представим с учетом этого обозначения выражения (5), (6) в виде

$$\frac{\partial S_k}{\partial n} = F_k\left(A_v ...\right), \; v = 1...p , \; k = 1...p , \quad (9)$$

$$G^{(1)}\left(A_{\nu}\ldots\right)=0\,. \tag{10}$$

Продифференцируем уравнение (10) в направлении **n** и в полученном разложении обозначим слагаемые, содержащие наибольшие производные по времени *t*,

$$\sum_{\nu_1=1}^{p}\frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{\nu_1}}\frac{\partial^2 S_{\nu_1}}{\partial n\partial t}+\ldots=0 \tag{11}$$

или, учитывая (9),

$$\sum_{\nu_1,\nu_2=1}^{p}\frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{\nu_1}}\frac{\partial F_{\nu_1}}{\partial A_{\nu_2}}\frac{\partial^2 S_{\nu_2}}{\partial t^2}+\ldots=G^{(2)}\left(\ldots\right)=0\,. \tag{12}$$

Проделаем аналогичную процедуру *p* раз. Тогда систему уравнений (8), где выделены слагаемые, содержащие наибольшие производные по времени *t*, можно записать в виде

$$\sum_{\nu_1,\ldots\nu_l=1}^{p}\frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{\nu_1}}\frac{\partial F_{\nu_1}}{\partial A_{\nu_2}}\ldots\frac{\partial F_{\nu_{l-1}}}{\partial A_{\nu_l}}\frac{\partial^l S_{\nu_l}}{\partial t^l}+\ldots=G^{(l)}\left(\ldots\right)=0\,,\ l=1\ldots p\,. \tag{13}$$

Продифференцируем каждое *l*-е уравнение из системы уравнений (13) по времени *t* (*p* – *l*) раз. Тогда получим следующую систему:

$$\sum_{\nu_1,\ldots\nu_l=1}^{p}\frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{\nu_1}}\frac{\partial F_{\nu_1}}{\partial A_{\nu_2}}\ldots\frac{\partial F_{\nu_{l-1}}}{\partial A_{\nu_l}}\frac{\partial^p S_{\nu_l}}{\partial t^p}+\ldots=0\,,\ l=1\ldots p\,. \tag{14}$$

Система поверхностных уравнений (14) линейна относительно старших производных по времени $\partial^p S_\nu / \partial t^p$, $\nu=1\ldots p$. Условие того, что эти производные могут быть явно выражены из (14), выглядит следующим образом [2]:

$$\left|a_{ji}\right|\neq 0\,, \tag{15}$$

где

$$a_{ji}=\sum_{\nu_1,\ldots\nu_{j-1}=1}^{p}\frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_{\nu_1}}\frac{\partial F_{\nu_1}}{\partial A_{\nu_2}}\ldots\frac{\partial F_{\nu_{j-1}}}{\partial A_i}\ \text{при}\ j>1\ \text{и}\ a_{1i}=\frac{\partial G^{(1)}}{\partial A_i}\ \text{при}\ j=1\,. \tag{16}$$

В этом случае систему (14) можно представить в виде

$$\frac{\partial^p S_k}{\partial t^p}=Q_k\left(\frac{\partial^{p-1}S_\nu}{\partial t^{p-1}},\frac{\partial^{p-1}S_\nu}{\partial \tau_1\partial t^{p-2}}\ldots\right),\ \nu=1\ldots p\,,\ k=1\ldots p\,. \tag{17}$$

Таким образом, может быть предложено следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если для системы из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (1), описывающих эволюционирующие во времени их решения* $S_k\left(\mathbf{r},t\right)$, $k=1\ldots p$, *в евклидовом пространстве и переопределенной некоторым дифференциальным уравнением (2) первого порядка, на некоторой неподвижной поверхности выполняется условие (15), то ее можно преобразовать к системе из p дифференциальных уравнений и такого же числа неизвестных* $S_k\left(\mathbf{r},t\right)$, $k=1\ldots p$, *на рассматриваемой поверхности, причем старшие производные по времени от* $S_k\left(\mathbf{r},t\right)$ *будут явно выражены через все остальные неизвестные.*

К системе поверхностных уравнений (17) уже можно поставить соответствующую задачу Коши, чтобы выделить интересующее заранее решение. Начальные данные у этой задачи Коши не могут быть произвольными из-за наличия уравнения связи (2) и условия (15). Согласно общей теореме Коши – Ковалевской такая задача в случае аналитичности всех рассматриваемых функций (разложимости в степенной ряд) имеет единственное локальное решение [5; 13; 15]. Мы видим, что в случае, если выполняется условие (15), краевые условия задавать не нужно на бесконечной незамкнутой поверхности. Заметим также, что если система уравнений (1), (2) линейна относительно неизвестных функций и их производных, то редуцированные системы уравнений, получающиеся из нее, также линейны относительно своих неизвестных и с ними гораздо легче оперировать.

Аналог **утверждения 2** для подвижной поверхности приведен в работе авторов [3].

2. Теория метода. Обратная задача

Представляет интерес следующая обратная задача. Не ограничивая общности, рассмотрим в евклидовом пространстве $(\mathbf{r},t)$ серию поверхностей $\{z=h,-\infty<h<+\infty\}$, параметризованную параметром h. Рассмотрим переопределенную систему (1), (2) из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_k(\mathbf{r},t)$, $v=1...p$. Пусть нормальные производные $\partial S_k/\partial n$ на этих плоскостях выражаются в явном виде (5). Тогда, как было показано, уравнения (1), (2) можно преобразовать к системе уравнений (8), эволюционирующих исключительно на этих поверхностях. Обратно, если мы найдем решение уравнений (8) на каждой из плоскостей $\{z=h\}$ для любого h, то при каких условиях «сшитое» из них решение во всем пространстве $(\mathbf{r},t)$ будет решением системы уравнений (1), (2).

Исследуем сначала переопределенные системы ОДУ [16]. Рассмотрим систему из p обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных $S_v(t)$, $v=1...p$, эволюционирующих во «времени» t, и переопределенную одним независимым уравнением (на каком-нибудь решении, например):

$$\dot{S}_v = F_k\left(S_v,t\right),\ v=1...p,\ k=1...p, \tag{18}$$

$$G\left(S_v,t\right)=0. \tag{19}$$

Продифференцируем по времени t уравнение (19). Имеем

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G}{\partial S_v}\dot{S}_v+\frac{\partial G}{\partial t}=0$$

или, подставляя выражения из (18),

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G\left(S_k,t\right)}{\partial S_v}F_v\left(S_k,t\right)+\frac{\partial G\left(S_k,t\right)}{\partial t}\equiv G^{(1)}\left(S_k,t\right)=0. \tag{20}$$

Аналогично

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(1)}\left(S_k,t\right)}{\partial S_v}F_v\left(S_k,t\right)+\frac{\partial G^{(1)}\left(S_k,t\right)}{\partial t}\equiv G^{(2)}\left(S_k,t\right)=0, \tag{21}$$

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(\mathrm{p}-2)}\left(S_k,t\right)}{\partial S_v}F_v\left(S_k,t\right)+\frac{\partial G^{(\mathrm{p}-2)}\left(S_k,t\right)}{\partial t}\equiv G^{(\mathrm{p}-1)}\left(S_k,t\right)=0, \tag{22}$$

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(\mathrm{p}-1)}\left(S_k,t\right)}{\partial S_v}F_v\left(S_k,t\right)+\frac{\partial G^{(\mathrm{p}-1)}\left(S_k,t\right)}{\partial t}\equiv G^{(\mathrm{p})}\left(S_k,t\right)=0. \tag{23}$$

Рассмотрим следующую переопределенную систему уравнений относительно $S_k(t)$, $k=1...p$:

$$G\left(S_k,t\right)=G^{(0)}\left(S_k,t\right)=0, \tag{24}$$

$$G^{(1)}\left(S_k,t\right)=0, \tag{25}$$

$$G^{(p-1)}\left(S_k,t\right)=0. \tag{26}$$

$$G^{(p)}\left(S_k,t\right)=0. \tag{27}$$

Предположим, что переопределенная система уравнений (24)–(27) имеет решение $S_k=S_k^*(t)$, $k=1...p$. Пусть определитель матрицы

$$\left(\frac{\partial G^{(i)}}{\partial S_k}\right),\ k=1...p,\ i=0...(p-1), \tag{28}$$

не равен тождественно нулю на этом решении. Подставим его в (24)–(27) и продифференцируем по времени t первые p – 1 уравнений. Тогда

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(0)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial S_v}\dot{S}_v^*+\frac{\partial G^{(0)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial t}=0, \tag{29}$$

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(1)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial S_v}\dot{S}_v^*+\frac{\partial G^{(1)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial t}=0, \tag{30}$$

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(p-1)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial S_v}\dot{S}_v^*+\frac{\partial G^{(p-1)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial t}=0. \tag{31}$$

Подставим решение $S_k=S_k^*(t)$, $k=1...p$ в выражения (20)–(23). Имеем:

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(0)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial S_v}F_v\left(S_k^*,t\right)+\frac{\partial G^{(0)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial t}=G^{(1)}\left(S_k^*,t\right)=0, \tag{32}$$

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(1)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial S_v}F_v\left(S_k^*,t\right)+\frac{\partial G^{(1)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial t}=G^{(2)}\left(S_k^*,t\right)=0, \tag{33}$$

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(p-1)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial S_v}F_v\left(S_k^*,t\right)+\frac{\partial G^{(p-1)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial t}=G^{(p)}\left(S_k^*,t\right)=0. \tag{34}$$

Почленно вычтем из системы уравнений (29)–(31) систему (32)–(34) соответственно. Получим

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(0)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial S_v}\left(\dot{S}_v^*-F_v\left(S_k^*,t\right)\right)=0, \tag{35}$$

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(1)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial S_v}\left(\dot{S}_v^*-F_v\left(S_k^*,t\right)\right)=0, \tag{36}$$

$$\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial G^{(p-1)}\left(S_k^*,t\right)}{\partial S_v}\left(\dot{S}_v^*-F_v\left(S_k^*,t\right)\right)=0. \tag{37}$$

В силу нашего предположения относительно определителя матрицы (28) из системы линейных уравнений (35)–(37) относительно неизвестных $\left(\dot{S}_v^*-F_v\left(S_k^*,t\right)\right)$, $v=1...p$, следует, что [2; 16]:

$$\dot{S}_k^*=F_k\left(S_v^*,t\right),\ v=1...p,\ k=1...p. \tag{38}$$

Таким образом, мы можем высказать утверждение.

Утверждение 3. *Любую систему из p обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (18), описывающих эволюционирующие во времени решения $S_k(t)$, $k=1...p$, и переопределенную любым дифференциальным уравнением (19) первого порядка, можно решить в явном виде из* ***переопределенной*** *системы $p+1$ неявных уравнений (24)–(27), если определитель матрицы (28) тождественно не равен нулю на всех решениях системы неявных уравнений (24)–(27).*

Очевидно, что в условиях этого утверждения все решения находятся из переопределенной системы уравнений (24)–(27) и множество решений не может зависеть от непрерывного параметра. Если система (24)–(27) не имеет решений, то не имеет решений и переопределенная система ОДУ (18), (19). Уравнение (27) может быть даже тождеством. Если система (18), (19) линейная, то система (24)–(27) также линейная. Если определитель матрицы (28) тождественно не равен нулю, то в этом случае линейная система (24)–(27), а значит и (18), (19) имеют не более одного решения [2; 16]. Заметим также, что если система ОДУ (18), (19) не зависит неявно от времени, то в условиях **утверждения 3** она имеет постоянное решение (см.: (29)–(31)).

Пример 1. Рассмотрим следующую переопределенную систему ОДУ (осциллятор):

$$\dot{u}=-v, \tag{39}$$

$$\dot{v}=u, \tag{40}$$

$$u+v=\cos(t)+\sin(t)\,. \tag{41}$$

Продифференцируем (41) по переменной t и вместо производных по t подставим их выражения из (39), (40). Имеем

$$u-v=\cos(t)-\sin(t)\,. \tag{42}$$

Проделаем аналогичную процедуру с уравнением (42). Тогда

$$-u-v=-\cos(t)-\sin(t)\,. \tag{43}$$

Переопределенная система неявных уравнений (41)–(43) имеет только одно общее решение

$$u=\cos(t)\,,\ v=\sin(t)\,. \tag{44}$$

Определитель матрицы (28) для этой системы равен -2. Следовательно, согласно **утверждению 3**, выражения (44) являются единственным решением (39)–(41). Интерес представляет некоторое обобщение этого результата. А именно, если к системе (39)–(41) добавить произвольную внешнюю силу, а также заменить в уравнении связи (41) правую часть на произвольную функцию от времени (взятую, например, из измерений в эксперименте), то аналогичными рассуждениями получим, что решение новой системы уравнений будет находиться из линейной системы уравнений (41)–(43), но с другой правой частью (в виде конкретной формулы). Причем, если это решение не существует, то не существует решение и исходной обобщенной системы. А если существует, то оно единственно [2].

Рассмотрим теперь n-мерный случай. Рассмотрим евклидово пространство $(z,\mathbf{x},t)$ и серию поверхностей $\{z=h,-\infty<h<+\infty\}$, параметризованную параметром h. Рассмотрим переопределенную систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_k(z,\mathbf{x},t)$, $v=1...p$,

$$H_k\left(\frac{\partial S_v}{\partial t},\frac{\partial S_v}{\partial z},\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{x}},S_v,z,\mathbf{x},t\right)=0\,,\ v=1...p\,,\ k=1...p\,, \tag{45}$$

$$G\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial t},\frac{\partial S_\nu}{\partial z},\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}},S_\nu,z,\mathbf{x},t\right)=0\,. \tag{46}$$

Пусть нормальные производные $\partial S_k/\partial z$ на этих плоскостях выражаются в явном виде

$$\frac{\partial S_k}{\partial z}=F_k\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial t},\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}},S_\nu,z,\mathbf{x},t\right),\ \nu=1...p,\ k=1...p\,. \tag{47}$$

Тогда, как было показано выше, уравнения (45), (46), проделав соответствующую процедуру, можно преобразовать к системе уравнений, эволюционирующих исключительно на этих поверхностях:

$$\begin{gathered}G^{(1)}\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial t},\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}},S_\nu,z,\mathbf{x},t\right)=0,\ \nu=1...p,\\ G^{(p)}\left(\frac{\partial^p S_\nu}{\partial t^p},\frac{\partial^p S_\nu}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p-1}}...\frac{\partial S_\nu}{\partial t},\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}},S_\nu,z,\mathbf{x},t\right)=0\,.\end{gathered} \tag{48}$$

При этом, если соответствующий определитель не равен тождественно нулю (15) {на всяком решении уравнений (45), (46)}, то система (48) корректна [3]. Для наших целей получим этой процедурой еще два уравнения на этих поверхностях

$$G^{(p+1)}\left(\frac{\partial^{p+1} S_\nu}{\partial t^{p+1}},\frac{\partial^{p+1} S_\nu}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p}}...\frac{\partial S_\nu}{\partial t},\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}},S_\nu,z,\mathbf{x},t\right)=0, \tag{49}$$

$$G^{(p+2)}\left(\frac{\partial^{p+2} S_\nu}{\partial t^{p+2}},\frac{\partial^{p+2} S_\nu}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p+1}}...\frac{\partial S_\nu}{\partial t},\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}},S_\nu,z,\mathbf{x},t\right)=0\,. \tag{50}$$

Пусть система (48)–(50) имеет решение $S_k^*=S_k^*\left(z,\mathbf{x},t\right)$, $k=1...p$. Подставим его в (48)–(50). Тогда

$$G^{(1)}\left(\frac{\partial S_\nu^*}{\partial t},\frac{\partial S_\nu^*}{\partial \mathbf{x}},S_\nu^*,z,\mathbf{x},t\right)=0,\ \nu=1...p, \tag{51}$$

$$G^{(p)}\left(\frac{\partial^p S_\nu^*}{\partial t^p},\frac{\partial^p S_\nu^*}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p-1}}...\frac{\partial S_\nu^*}{\partial t},\frac{\partial S_\nu^*}{\partial \mathbf{x}},S_\nu^*,z,\mathbf{x},t\right)=0,$$

$$G^{(p+1)}\left(\frac{\partial^{p+1} S_\nu^*}{\partial t^{p+1}},\frac{\partial^{p+1} S_\nu^*}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p}}...\frac{\partial S_\nu^*}{\partial t},\frac{\partial S_\nu^*}{\partial \mathbf{x}},S_\nu^*,z,\mathbf{x},t\right)=0, \tag{52}$$

$$G^{(p+2)}\left(\frac{\partial^{p+2} S_\nu^*}{\partial t^{p+2}},\frac{\partial^{p+2} S_\nu^*}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p+1}}...\frac{\partial S_\nu^*}{\partial t},\frac{\partial S_\nu^*}{\partial \mathbf{x}},S_\nu^*,z,\mathbf{x},t\right)=0\,. \tag{53}$$

Продифференцируем первые $p+1$ выражений (51)–(53) по z. Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{p}\left(\frac{\partial G^{(k)}}{\partial\left(\dfrac{\partial^k S_\nu^*}{\partial t^k}\right)}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial S_\nu^*}{\partial z}\right)+\frac{\partial G^{(k)}}{\partial\left(\dfrac{\partial^p S_\nu^*}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p-1}}\right)}\frac{\partial^k}{\partial \mathbf{x}\partial t^{k-1}}\left(\frac{\partial S_\nu^*}{\partial z}\right)+...+\frac{\partial G^{(k)}}{\partial S_\nu^*}\frac{\partial S_\nu^*}{\partial z}\right)+\frac{\partial G^{(k)}}{\partial z}=0, \tag{54}$$

где $k=1\ldots(p+1)$. С другой стороны, согласно самому методу получения уравнений (48)–(50) мы имеем также $p+1$ выражений

$$\sum_{v=1}^{p}\left(\frac{\partial G^{(k)}}{\partial\left(\dfrac{\partial^k S_v^*}{\partial t^k}\right)}\frac{\partial^k M_v}{\partial t^k}+\frac{\partial G^{(k)}}{\partial\left(\dfrac{\partial^p S_v^*}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p-1}}\right)}\frac{\partial^k M_v}{\partial \mathbf{x}\partial t^{k-1}}+\ldots+\frac{\partial G^{(k)}}{\partial S_v^*}M_v\right)+\frac{\partial G^{(k)}}{\partial z}=G^{(k+1)}(\ldots)=0, \tag{55}$$

где $k=1\ldots(p+1)$ и $M_l=F_l\left(\partial S_v^*/\partial t,\partial S_v^*/\partial \mathbf{x},S_v^*,z,\mathbf{x},t\right)$, $v=1\ldots p$, $l=1\ldots p$. Вычтем почленно из выражений (55) выражения (54). Тогда

$$\sum_{v=1}^{p}\left(\frac{\partial G^{(k)}}{\partial\left(\dfrac{\partial^k S_v^*}{\partial t^k}\right)}\frac{\partial^k Q_v}{\partial t^k}+\frac{\partial G^{(k)}}{\partial\left(\dfrac{\partial^p S_v^*}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p-1}}\right)}\frac{\partial^k Q_v}{\partial \mathbf{x}\partial t^{k-1}}+\ldots+\frac{\partial G^{(k)}}{\partial S_v^*}Q_v\right)=0,\ k=1\ldots(p+1), \tag{56}$$

где $Q_l=M_l-\partial S_l^*/\partial z$, $l=1\ldots p$.

Рассмотрим (56) как переопределенную систему линейных уравнений в частных производных от неизвестных функций $Q_i=Q_i(z,\mathbf{x},t)$, $i=1\ldots p$, на рассматриваемых поверхностях $\{z=h,-\infty<h<+\infty\}$, то есть z – просто параметр. Предположим, что она нашим методом снижается в размерности вплоть до переопределенной линейной системы ОДУ, которая имеет решение, представимое в явном виде. Для этого необходимо, чтобы серия соответствующих определителей вида (15) и определителей матрицы вида (28) не равнялась нулю. Как было показано, в этом случае линейная система (56) имеет не более одного решения. Как можно легко заметить, она уже имеет нулевое решение. Следовательно, в этих условиях других решений она не имеет. Это означает, что

$$Q_l=M_l-\partial S_l^*/\partial z=F_l\left(\partial S_v^*/\partial t,\partial S_v^*/\partial \mathbf{x},S_v^*,z,\mathbf{x},t\right)-\partial S_l^*/\partial z=0,\ v=1\ldots p,\ l=1\ldots p, \tag{57}$$

то есть $S_k^*=S_k^*(z,\mathbf{x},t)$ удовлетворяет выражениям (47), следовательно, и (45).

Таким образом, фактически мы получили следующее утверждение.

Утверждение 4. *Любая, описывающая эволюционирующие во времени решения в евклидовом пространстве $S_k(\mathbf{r},t)$, $k=1\ldots p$, система из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (1), переопределенная любым дифференциальным уравнением (2) первого порядка, и редуцированная изложенным выше методом,* ***переопределенная*** *система из p + 2 дифференциальных уравнений от этих же неизвестных на некоторой параметризованной серии поверхностей, охватывающих все пространство, имеют одинаковое множество решений, если на этих поверхностях* ***переопределенная*** *система p + 1 линейных дифференциальных уравнений (56) от неизвестных Q_i, $i=1\ldots p$, имеет единственное нулевое решение для любых функций $S_k^*=S_k^*(z,\mathbf{x},t)$, k = 1...p, стоящих в коэффициентах системы (56) и являющихся решениями этой редуцированной системы из p + 2 дифференциальных уравнений.*

Определенное требование на эти коэффициенты означает тождественное неравенство нулю серии определителей, возникающих при редуцировании переопределенных систем линейных дифференциальных уравнений вплоть до полного их решения [2; 16].

Пример 2. Рассмотрим следующую переопределенную систему из двух уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\alpha-x+1, \tag{58}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\alpha^2-x^2. \tag{59}$$

Редуцируем (58), (59) на серию поверхностей $\{x=\mathrm{const}\}$. Запишем (59) в виде

$$G^{(1)}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\alpha\right)=\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\alpha^2+x^2=0. \tag{60}$$

Продифференцируем (60) по переменной x и вместо производных по x подставим их выражения из (58). Имеем

$$G^{(2)}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\alpha\right)=\frac{\partial\alpha}{\partial t}-2\alpha^2+2(x-1)\alpha+2x=0. \tag{61}$$

Проделаем аналогичную процедуру с уравнением (61). Тогда

$$G^{(3)}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\alpha\right)=\frac{\partial\alpha}{\partial t}-4\alpha^2+(6x-4)\alpha-2x(x-2)=0. \tag{62}$$

Мы получили 3 = 1 + 2 уравнения (60)–(62), эволюционирующих на этих плоскостях. Решая уравнения (60)–(62), находим, что они имеют только одно общее решение $\alpha = x$. Соответствующая переопределенная система линейных уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}-2\alpha Q=0, \tag{63}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\left(-4\alpha+2(x-1)\right)Q=0. \tag{64}$$

Если подставить в (63), (64) это решение $\alpha = x$, получим следующую систему:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}-2xQ=0, \tag{65}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+(-2x-2)Q=0. \tag{66}$$

Очевидно, переопределенная система линейных уравнений (65), (66) имеет единственное нулевое решение. Следовательно, согласно **утверждению 4** переопределенная система уравнений (58), (59) имеет только одно решение $\alpha = x$, которое, очевидно, удовлетворяет (58), (59).

Согласно **утверждению 2** мы имеем некоторое достаточное условие независимости уравнения связи. **Утверждение 4** также предлагает достаточное условие для независимости уравнения связи, но оно более сильное в том смысле, что не требует определенного преобразования к задаче Коши редуцированной системы уравнений.

Заметим, что изначально в условиях **утверждения 4** требование о наличии общих решений у переопределенной системы уравнений (45), (46) заранее не содержится. Достаточно только выписать какое-нибудь дополнительное соотношение (46) к системе (45), потом найти решение переопределенной параметризованной системы дифференциальных уравнений на серии поверхностей (48)–(50) и проверить, что соответствующая переопределенная система линейных уравнений (56) для этого решения имеет единственное нулевое решение. Тогда это решение, распространенное через серию поверхностей на все пространство, будет решением и исходной системы уравнений (45).

3. Новый метод переопределения уравнений математической физики

Рассмотрим динамическую систему уравнений в каноническом виде [6]:

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{67}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{68}$$

где $i = 1...n$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ при $t = 0$, $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ – функция Гамильтона. Условие сохранения фазового объема означает, что [6]

$$\frac{\partial(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0)} = 1\,. \tag{69}$$

Мы имеем дополнительное уравнение связи (69) для уравнений (67), (68), если их рассматривать как систему уравнений в частных производных в евклидовом пространстве $(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,t)$. Очевидно, на поверхностях вида $\{t = \text{const}\}$ сократить размерность нашим методом нельзя, поскольку тогда из уравнения связи (69) получатся верные тождества (8). Произвольную систему ОДУ можно свести к динамической вида (67), (68). Действительно, рассмотрим произвольную систему ОДУ

$$\frac{dq_i}{dt} = F_i(q_j,t), \tag{70}$$

где $i, j = 1...n$. Введем функцию

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = -\sum_{i=1}^{n} F_i(q_j,t)\,p_i \tag{71}$$

и новые неизвестные p_i, $i = 1...n$, которые определим из уравнений

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{72}$$

Очевидно, система ОДУ (70) ввиду определения (71) может быть записана в виде

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}\,. \tag{73}$$

Таким образом мы систему ОДУ (70) свели к динамической системе ОДУ (72), (73). Если функция $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ не зависит от времени t явно, то есть $H = H(\mathbf{q},\mathbf{p})$ (а это всегда можно сделать, преобразовав систему (70) к автономной), то мы имеем еще одно дополнительное соотношение [6]

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = H(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0). \tag{74}$$

Рассмотрим уравнения Эйлера несжимаемой жидкости в трехмерном потоке [7]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}} = 0, \tag{75}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \tag{76}$$

где $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{r})$ – начальное распределение скорости $\mathbf{u}$; P – давление. Рассмотрим переменные Лагранжа $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$ (разметку) [11]. Тогда для каждой движущейся частицы жидкости $\mathbf{r}_0$ выполняются следующие соотношения:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}, \tag{77}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{u}\,. \tag{78}$$

Очевидно, уравнения (77), (78) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \tag{79}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}, \tag{80}$$

где $H=H(\mathbf{r},\mathbf{u},t)=P(\mathbf{r},t)+\mathbf{u}^2/2$. Пусть $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t)$ и $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t)$ – решение системы (79), (80), рассматриваемой как система ОДУ с начальными данными $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,0)=\mathbf{r}_a$ и $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,0)=\mathbf{u}_a$. Тогда для каждой частицы жидкости $\mathbf{r}_0$ выполняется: $\mathbf{r}=\mathbf{r}_a=\mathbf{r}_0$, $\mathbf{u}=\mathbf{u}_a=\mathbf{U}_0(\mathbf{r}_0)$ при $t = 0$, то есть движение всей жидкости можно представить как движение трехмерного многообразия в шестимерном фазовом пространстве ($\mathbf{r}_a$, $\mathbf{u}_a$). Уравнение (69) означает, что

$$\frac{\partial(\mathbf{r},\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a)}=1\,. \tag{81}$$

Уравнения (77), (78) или (79), (80) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t)}{\partial t}=-\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}, \tag{82}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t)}{\partial t}=\mathbf{u}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t)\,. \tag{83}$$

Все частные производные по $\mathbf{r}$ в выражениях (76) и (82) преобразовываются к производным по $\mathbf{r}_a$ и $\mathbf{u}_a$, например, согласно формулам [14]:

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}_a}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_a}\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}} \text{ и } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}_a}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_a}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \text{ или } \frac{\partial P}{\partial \mathbf{u}_a}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}_a}\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}} \text{ и } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}_a}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}_a}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}\,. \tag{84}$$

Таким образом, мы имеем переопределенную систему уравнений из 8 уравнений (76), (81)–(83) в частных производных и 7 неизвестных функций вида $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t)$, $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\mathbf{u}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t)$ и $P=P(\mathbf{r},t)=P(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t)$ в пространстве $(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t)$. Конкретное решение фиксируется следующим образом: $\mathbf{r}_a=\mathbf{r}_0$, $\mathbf{u}_a=\mathbf{U}_0(\mathbf{r}_0)$ [1; 3]. В этом случае полная производная скорости $\mathbf{u}$ находится как [11]

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t)}{\partial t}=\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t),t)}{\partial t}=\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{r}_a,\mathbf{u}_a,t)}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}=\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \tag{85}$$

в полном соответствии с ее определением.

Рассмотрим уравнения Навье – Стокса несжимаемой жидкости в трехмерном потоке [7; 12]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}=-\nu\nabla\times\boldsymbol{\omega}\,, \tag{86}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{u}, \tag{87}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0, \tag{88}$$

где $\mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{U}_0(\mathbf{r})$; ν – вязкость. Введем «поправку» $\boldsymbol{\alpha}$ к вектору скорости жидкости $\mathbf{u}$ с тем, чтобы обобщить систему уравнений (86), (87) следующим образом [1; 3]:

$$\frac{\partial(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})}{\partial t}+((\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})\cdot\nabla)(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})+\nabla\left(P+\frac{1}{2}\mathbf{u}^2-\frac{1}{2}(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})^2\right)=0, \tag{89}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} = \left[\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{\alpha}\right) + \boldsymbol{\alpha}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{\alpha}\right)\right] + \nu\nabla\times\boldsymbol{\omega}, \tag{90}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{91}$$

Начальные данные у функций $\boldsymbol{\alpha}$ можно взять нулевыми [1].

Векторное поле $\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}$ формально можно рассмотреть как *невязкий* гидродинамический поток с давлением $\left[P+\mathbf{u}^2/2-\left(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}\right)^2/2\right]$. Пусть

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}, \quad \wp = P + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}\right)^2. \tag{92}$$

Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{V}-\boldsymbol{\alpha}$. Подставим это в (89)–(91):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V} + \nabla\wp = 0, \tag{93}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} = \left[\boldsymbol{\alpha}\times\left(\nabla\times\left(\mathbf{V}-\boldsymbol{\alpha}\right)\right) + \left(\mathbf{V}-\boldsymbol{\alpha}\right)\times\left(\nabla\times\boldsymbol{\alpha}\right) + \boldsymbol{\alpha}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{\alpha}\right)\right] + \nu\nabla\times\left(\nabla\times\left(\mathbf{V}-\boldsymbol{\alpha}\right)\right), \tag{94}$$

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{V}-\boldsymbol{\alpha}\right) = 0. \tag{95}$$

Как было показано выше, уравнения (93) можно переопределить, и вместе с уравнениями (94), (95) мы получим переопределенную систему уравнений Навье – Стокса в пространстве переменных $\left(\mathbf{r}_a,\mathbf{V}_a,t\right)$ от неизвестных функций вида $\mathbf{r}=\mathbf{r}\left(\mathbf{r}_a,\mathbf{V}_a,t\right)$, $\mathbf{V}=\mathbf{V}\left(\mathbf{r},t\right)=\mathbf{V}\left(\mathbf{r}_a,\mathbf{V}_a,t\right)$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{r},t\right)=\boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{r}_a,\mathbf{V}_a,t\right)$ и $\wp=\wp\left(\mathbf{r},t\right)=\wp\left(\mathbf{r}_a,\mathbf{V}_a,t\right)$ [1; 7]. Скорость $\mathbf{u}$ и давление P можно тогда определить из (92). Конкретное решение (86)–(88) фиксируется следующим образом: $\mathbf{r}=\mathbf{r}_a=\mathbf{r}_0$, $\mathbf{V}=\mathbf{V}_a=\mathbf{U}_0\left(\mathbf{r}_0\right)$ при $t=0$ или $\mathbf{r}_a=\mathbf{r}_0$, $\mathbf{V}_a=\mathbf{U}_0\left(\mathbf{r}_0\right)$.

Таким образом, если мы найдем нашим методом решения переопределенной системы уравнений, полученной из (93)–(95), в пространстве переменных $\left(\mathbf{r}_a,\mathbf{V}_a,t\right)$, и если этих решений, допустим, счетное количество, то среди них должны находиться решения уравнений Навье – Стокса в явном виде, зависящие от начальных данных (задача Коши), если таковые существуют.

Как известно, к решению системы уравнений (67), (68) сводятся уравнения в частных производных первого порядка от одной неизвестной функции [16]. Найдя решение в явном виде динамической системы (67), (68) в пространстве начальных данных, мы найдем решение и этого класса уравнений.

4. Задача Коши для редуцированной системы дифференциальных уравнений

Исследуем теперь задачу Коши при понижении размерности дифференциальных уравнений. Рассмотрим, не ограничивая общности, евклидово пространство (z, $\mathbf{x}$, t) и серию поверхностей $\left\{z=h,-\infty<h<+\infty\right\}$, параметризованную параметром h. Рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_\nu\left(z,\mathbf{x},t\right)$, $\nu=1...p$,

$$H_k\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial t},\frac{\partial S_\nu}{\partial z},\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}},S_\nu,z,\mathbf{x},t\right)=0,\ \nu=1...p,\ k=1...p. \tag{96}$$

Пусть к системе уравнений (96) заданы начальные данные Коши

$$S_\nu\Big|_{t=0} = S_\nu^0\left(z,\mathbf{x}\right),\ \nu=1...p. \tag{97}$$

Пусть нормальные производные $\partial S_k/\partial z$ на этих плоскостях выражаются в явном виде

$$\frac{\partial S_k}{\partial z}=F_k\left(\frac{\partial S_v}{\partial t},\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{x}},S_v,z,\mathbf{x},t\right),\ v=1...p\,,\ k=1...p\,. \tag{98}$$

Выпишем пока произвольное дифференциальное соотношение

$$G\left(\frac{\partial S_v}{\partial t},\frac{\partial S_v}{\partial z},\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{x}},S_v,z,\mathbf{x},t\right)=0\,. \tag{99}$$

Тогда, как было показано выше, из выражений (96), (99), проделав соответствующую процедуру, можно получить систему уравнений, эволюционирующих исключительно на этих поверхностях:

$$G^{(1)}\left(\frac{\partial S_v}{\partial t},\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{x}},S_v,z,\mathbf{x},t\right)=0\,,\ v=1...p\,,$$

$$G^{(p)}\left(\frac{\partial^p S_v}{\partial t^p},\frac{\partial^p S_v}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p-1}}...\frac{\partial S_v}{\partial t},\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{x}},S_v,z,\mathbf{x},t\right)=0\,. \tag{100}$$

При этом, если соответствующий определитель не равен тождественно нулю (15), то система (100) корректна [3]. Для наших целей получим этой процедурой еще одно уравнение на этих поверхностях

$$G^{(p+1)}\left(\frac{\partial^{p+1} S_v}{\partial t^{p+1}},\frac{\partial^{p+1} S_v}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p}}...\frac{\partial S_v}{\partial t},\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{x}},S_v,z,\mathbf{x},t\right)=0\,. \tag{101}$$

Поставим для переопределенной системы уравнений (100), (101) следующую задачу Коши:

$$\left.\frac{\partial^j S_v}{\partial t^j}\right|_{t=0}=\frac{\partial^j S_v^0}{\partial t^j}(z,\mathbf{x})\,,\ v=1...p\,,\ j=0...p\,, \tag{102}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^j S_k^0}{\partial t^j}\right)=\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left[F_k\left(\frac{\partial S_v}{\partial t},\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{x}},S_v,z,\mathbf{x},t\right)\right]\Bigg|_{t=0},\quad v,k=1...p\,,\ j=0...p-1\,. \tag{103}$$

Пусть система (100), (101) имеет решение $S_k^*=S_k^*(z,\mathbf{x},t)$, $k=1...p$. Тогда аналогично формуле (56) можно получить, что

$$\sum_{v=1}^{p}\left(\frac{\partial G^{(k)}}{\partial\left(\dfrac{\partial^k S_v^*}{\partial t^k}\right)}\frac{\partial^k Q_v}{\partial t^k}+\frac{\partial G^{(k)}}{\partial\left(\dfrac{\partial^p S_v^*}{\partial \mathbf{x}\partial t^{p-1}}\right)}\frac{\partial^k Q_v}{\partial \mathbf{x}\partial t^{k-1}}+...+\frac{\partial G^{(k)}}{\partial S_v^*}Q_v\right)=0\,,\ k=1...p\,, \tag{104}$$

где

$$Q_l=F_l\left(\frac{\partial S_v^*}{\partial t},\frac{\partial S_v^*}{\partial \mathbf{x}},S_v^*,z,\mathbf{x},t\right)-\partial S_l^*/\partial z\,,\ v=1...p\,,\ l=1...p\,. \tag{105}$$

Рассмотрим выражения (104) как систему из p линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $Q_v(z,\mathbf{x},t)$, $v=1...p$. Из предположения (103) следует, что начальные данные у неизвестных $Q_v(z,\mathbf{x},t)$, $v=1...p$ нулевые. Сравнивая уравнения (104) и (100), мы также можем утверждать, что, если соответствующий определитель не равен тождественно нулю (15), то система (104) корректна, и соответствующая задача Коши имеет единственное локальное решение [5; 13; 15]. Очевидно, это будет тогда нулевое решение, то есть $S_k^* = S_k^*(z,\mathbf{x},t)$ удовлетворяет выражениям (98), следовательно и (96). Таким образом, предлагается следующее утверждение.

Утверждение 5. *Любая, описывающая эволюционирующие во времени решения в евклидовом пространстве* $S_k(\mathbf{r},t)$, $k=1...p$, *система из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (96), переопределенная любым дифференциальным уравнением (99) первого порядка, для которой поставлена задача Коши (97), и редуцированная изложенным выше методом,* ***переопределенная*** *система* (100), (101) *из p + 1 дифференциальных уравнений от этих же неизвестных на некоторой параметризованной серии поверхностей, охватывающих все пространство, для которой поставлена задача Коши (102), (103), имеют локально одинаковые решения, если выполняется условие (15) для любых функций* $S_k^* = S_k^*(z,\mathbf{x},t)$, *k = 1...p, являющихся решениями этой редуцированной* ***переопределенной*** *системы из p + 1 дифференциальных уравнений.*

Это утверждение является некоторым уточнением **утверждения 2**. Отметим также, что изначально в условиях **утверждения 5** (как и **утверждения 4**) требование о наличии общих решений у переопределенной системы уравнений (96), (99) заранее не содержится. Но в отличие от **утверждения 4 утверждение 5** описывает только локальные свойства решений переопределенных систем дифференциальных уравнений. Заметим также, что вообще для переопределенной системы уравнений (96), (99) задача Коши (97) не может содержать произвольные начальные данные. Аналогично это можно утверждать для переопределенной системы (100), (101) и задачи Коши (102), (103).

5. Дальнейшая редукция уравнений вплоть до полного решения, представимого в явном виде

Требование на неравенство нулю некоторого определителя также возникает в следующей ситуации. Рассмотрим переопределенную систему из $p + 1$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_\nu(\mathbf{x})$, $\nu = 1...p$, $\mathbf{x} = (x_1,...x_m)$:

$$H_k\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}}, S_\nu, \mathbf{x}\right) = 0,\ \nu = 1...p,\ k = 1...(p+1). \tag{106}$$

Будем сокращать размерность переопределенной системы уравнений (106). Продифференцируем выражения (106) p раз по переменной x_1. Получим $(p + 1)^2$ редуцированных уравнений от $p(p + 2)$ неизвестных вида

$$S_\nu, \frac{\partial S_\nu}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial^{p+1} S_\nu}{\partial {x_1}^{p+1}},\ \nu = 1...p. \tag{107}$$

Мы опять получим переопределенную по крайней мере на единицу систему дифференциальных уравнений первого порядка от переменных $(x_2,...x_m)$. Проделаем подобную процедуру m раз вплоть до переопределенной системы неявных уравнений. В результате получим систему уравнений вида

$$P_\alpha(Q_\beta, \mathbf{x}) = \frac{\partial^{(i_1+...+i_m)}}{\partial x_1^{i_1}...\partial x_m^{i_m}}\left[H_k\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}}, S_\nu, \mathbf{x}\right)\right] = 0,\ \nu = 1...p,\ k = 1...(p+1), \tag{108}$$

относительно неизвестных вида

$$Q_\beta = \frac{\partial^{(j_1+...+j_m)} S_\nu}{\partial x_1^{j_1}...\partial x_m^{j_m}},\ \nu = 1...p. \tag{109}$$

Здесь $\alpha = \alpha(k, i_1, \dots i_m) = 1 \dots N_H$, $\beta = \beta(\nu, j_1, \dots j_m) = 1 \dots N_S$ – функции от мультииндексов такие, что $Q_{\beta(\nu,0,\dots 0)} = S_\nu$, $\nu = 1 \dots p$, и

$$i_1 = 0 \dots p,\ i_2 = 0 \dots \left[(p+1)^2 - 1 \right],\ i_3 = 0 \dots \left[(p+1)^{2^2} - 1 \right], \dots\ i_m = 0 \dots \left[(p+1)^{2^{(m-1)}} - 1 \right], \tag{110}$$

$$j_1 = 0 \dots (p+1),\ j_2 = 0 \dots (p+1)^2,\ j_3 = 0 \dots (p+1)^{2^2}, \dots\ j_m = 0 \dots (p+1)^{2^{(m-1)}}. \tag{111}$$

Если решение системы (106) существует, то оно удовлетворяет системе неявных уравнений (108). Очевидно, количество уравнений (108), учитывая (110), равно

$$N_H = (p+1) \cdot (p+1) \cdot (p+1)^2 \cdot \dots \cdot (p+1)^{2^{(m-1)}} = (p+1)^{\left(2+2+2^2+\dots+2^{(m-1)}\right)} = (p+1)^{2^m}, \tag{112}$$

а количество неизвестных (109), учитывая (111), равно

$$N_S = p \cdot \left((p+1)+1 \right) \cdot \left((p+1)^2 + 1 \right) \cdot \dots \cdot \left((p+1)^{2^{(m-1)}} + 1 \right) =$$
$$= \left((p+1) - 1 \right) \cdot \left((p+1)+1 \right) \cdot \left((p+1)^2 + 1 \right) \cdot \dots \cdot \left((p+1)^{2^{(m-1)}} + 1 \right) =$$
$$= \left((p+1)^2 - 1 \right) \cdot \left((p+1)^2 + 1 \right) \cdot \dots \cdot \left((p+1)^{2^{(m-1)}} + 1 \right) = (p+1)^{2^{(m-1)} \cdot 2} - 1 = (p+1)^{2^m} - 1, \tag{113}$$

то есть, сравнивая (112) и (113), $N_S = N_H - 1$, что в полном соответствии с нашим предположением. Однако из (108)–(111) видно, что реально некоторые высшие производные (109) не входят в выражения (108), то есть на самом деле от некоторых неизвестных Q_β выражения P_α не зависят.

Рассмотрим матрицу

$$A_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_\beta} \right),\ \alpha = 1 \dots N_H,\ \beta = 1 \dots N_S. \tag{114}$$

Рассмотрим **расширенную** переопределенную систему неявных уравнений вида

$$P_\alpha(Q_\beta, \mathbf{x}) = \frac{\partial^{(i_1+\dots+i_m)}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} \left[H_k \left(\frac{\partial S_\nu}{\partial \mathbf{x}}, S_\nu, \mathbf{x} \right) \right] = 0,\ \nu = 1 \dots p,\ k = 1 \dots (p+1), \tag{115}$$

относительно неизвестных вида

$$Q_\beta = \frac{\partial^{(j_1+\dots+j_m)} S_\nu}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}},\ \nu = 1 \dots p. \tag{116}$$

Но функции от мультииндексов $\alpha = \alpha(k, i_1, \dots i_m)$, $\beta = \beta(\nu, j_1, \dots j_m)$, в отличие от (110), (111), определяются из условий:

$$i_1 = 0 \dots p+1,\ i_2 = 0 \dots (p+1)^2,\ i_3 = 0 \dots (p+1)^{2^2}, \dots\ i_m = 0 \dots (p+1)^{2^{(m-1)}}. \tag{117}$$

$$j_1 = 0 \dots (p+1)+1,\ j_2 = 0 \dots (p+1)^2 + 1,\ j_3 = 0 \dots (p+1)^{2^2} + 1, \dots$$
$$\dots\ j_m = 0 \dots (p+1)^{2^{(m-1)}} + 1. \tag{118}$$

Система уравнений (115) включает в себя систему уравнений (108). Неизвестных (116) несколько больше неизвестных (109). Выскажем и обоснуем следующее утверждение.

Утверждение 6. *Любая система из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и такого же числа неизвестных функций, переопределенная лю-*

бым дифференциальным уравнением первого порядка (106), и редуцированная изложенным выше методом, переопределенная ***расширенная*** *система неявных уравнений вида (115) от неизвестных вида (116) имеет одинаковое множество решений, если ранг матрицы (114) (на каждом решении этой расширенной системы неявных уравнений) равен количеству неизвестных Q_β, реально присутствующих в уравнениях (108).*
Подсчет показывает, что это число не более

$$N_S^{real} \le N_H \frac{p}{(p+1)}\left(1+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{(p+1)^{2^{(l-1)}}}\right). \tag{119}$$

Поскольку мы допускаем, что ранг матрицы (114) равен N_S^{real}, значит, существует N_S^{real} независимых уравнений из системы (108) от такого же числа неизвестных. Обозначим их как

$$P_{\alpha_l}\left(Q_{\beta_l},\mathbf{x}\right)=0,\ l=1...N_S^{real}. \tag{120}$$

Здесь $\alpha_l=\alpha\left(k^l,i_1^l,...i_m^l\right)$, $\beta_l=\beta\left(v^l,j_1^l,...j_m^l\right)$. Продифференцируем уравнения (120) по переменной x_s, $1\le s\le m$. Имеем

$$\sum_{l^*=1}^{N_S^{real}}\frac{\partial P_{\alpha_l}}{\partial Q_{\beta_{l^*}}}\frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_s}+\frac{\partial P_{\alpha_l}\left(Q_{\beta_l},\mathbf{x}\right)}{\partial x_s}=0,\ l=1...N_S^{real}. \tag{121}$$

С другой стороны, из определения уравнений (115) следует, что

$$P_{\tilde{\alpha}_l}\left(Q_{\beta_l},\mathbf{x}\right)=\sum_{l^*=1}^{N_S^{real}}\frac{\partial P_{\alpha_l}}{\partial Q_{\beta_{l^*}}}Q_{\tilde{\beta}_{l^*}}+\frac{\partial P_{\alpha_l}\left(Q_{\beta_l},\mathbf{x}\right)}{\partial x_s}=0,\ l=1...N_S^{real}, \tag{122}$$

где $\tilde{\alpha}_l=\alpha\left(k^l,i_1^l,...\left(i_s^l+1\right)...i_m^l\right)$, $\tilde{\beta}_l=\beta\left(v^l,j_1^l,...\left(j_s^l+1\right)...j_m^l\right)$. Вычтем почленно из выражений (122) выражения (121). Тогда

$$\sum_{l^*=1}^{N_S^{real}}\frac{\partial P_{\alpha_l}}{\partial Q_{\beta_{l^*}}}\left(Q_{\tilde{\beta}_{l^*}}-\frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_s}\right)=0,\ l=1...N_S^{real}. \tag{123}$$

В силу нашего предположения относительно независимости уравнений (120) из выражений (123) следует

$$\left(Q_{\tilde{\beta}_l}-\frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s}\right)=0 \text{ или } Q_{\tilde{\beta}_l}=\frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s},\ l=1...N_S^{real}. \tag{124}$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что для каждой переменной x_s, $1\le s\le m$, выполняется соотношение (124). Отсюда, учитывая, что по определению $Q_{\beta(v,0,...0)}=S_v(\mathbf{x})$, $v=1...p$, следует

$$Q_{\beta(v,j_1,...j_m)}=\frac{\partial Q_{\beta(v,j_1-1,...j_m)}}{\partial x_1}=...=\frac{\partial^{j_1}Q_{\beta(v,0,...j_m)}}{\partial x_1^{j_1}}=...=\frac{\partial^{(j_1+j_2)}Q_{\beta(v,0,0...j_m)}}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}}=...$$
$$...=\frac{\partial^{(j_1+...+j_m)}Q_{\beta(v,0,...0)}}{\partial x_1^{j_1}...\partial x_m^{j_m}}=\frac{\partial^{(j_1+...+j_m)}S_v}{\partial x_1^{j_1}...\partial x_m^{j_m}}. \tag{125}$$

В итоге мы показали, что функции $S_v(\mathbf{x})$, $v=1...p$, являются решением (106), а величины (109) являются соответствующими частными производными этого решения.

Для нашего примера переопределения уравнений Навье – Стокса из части 3 мы имеем $p = 10$, $m = 7$. Следовательно, общее число неявных уравнений (108) равно $N_H = (p+1)^{2^m} \approx 10^{128}$. Это очень большое число. Оно возникает в основном из-за большой размерности евклидового пространства переменных $m = 7$. В работах [1; 3] приведены другие способы переопределения уравнений гидродинамики, где $m = 4$. Тем не менее **утверждение 6** предлагает некоторое достаточное условие для существования сразу полного решения переопределенных систем дифференциальных уравнений.

Количество редуцированных уравнений и неизвестных можно сократить, если на каждом шаге сокращения размерности получать более одного дополнительного уравнения связи. Например, в случае, если мы имеем систему из p ОДУ, переопределенную l уравнениями связи, то достаточно продифференцировать уравнения порядка p/l раз, и мы получим систему из порядка p^2/l неявных уравнений и такого же числа неизвестных вместо p^2. Исследование данного вопроса дано в приложении А.

Заключение

Предлагаемый в данной статье метод разработан и применим к любым системам дифференциальных уравнений в частных производных. Требуется только существование независимого уравнения связи (переопределения), с помощью которого производится редукция исходной системы дифференциальных уравнений. Поиск переопределения систем дифференциальных уравнений в целом легче, чем находить их полное решение, представимое в явном виде. В статье [3] вообще приводится общий способ переопределения любых систем дифференциальных уравнений путем увеличения их размерности (количества переменных).

В данной статье, в отличие от [1; 3], приводятся новые достаточные условия для независимости уравнения связи. А именно, требуется исследовать переопределенную систему линейных однородных уравнений в частных производных. Редуцированные системы уравнений, получающиеся из нее, также линейны относительно своих неизвестных, и все исследование сводится к существованию отличных от нуля определителей, составленных из их коэффициентов. Трудность заключается в их выписывании, понимании их структуры и преобразовании самих линейных уравнений при редукции. То есть необходимо произвести большое количество символьных операций. Для этого существуют специальные программы (MATHEMATICA, MATHCAD и др.) и среды, например, Лисп. Если это достаточное условие будет выполнено, то исходную переопределенную систему дифференциальных уравнений в объеме можно будет преобразовать к системам дифференциальных уравнений на серии поверхностей, параметризованным некоторым параметром. «Сшитое» из них решение во всем пространстве будет решением этой исходной системы уравнений. Фактически одну из переменных рассматриваемой системы уравнений можно будет тогда преобразовать в параметр для редуцированной системы уравнений. Производные по этому параметру будут отсутствовать.

О влиянии начальных и краевых условий на редуцированную систему дифференциальных уравнений подробно говорилось в работах авторов [1; 3]. Здесь мы заметим только, что, выделяя какое-либо уравнение связи для уравнений исходной системы дифференциальных уравнений, мы, зная дополнительную информацию о множестве решений (оно может состоять только из одного элемента, см. приложение Б), которое нас интересует, сильно сужаем класс возможных начальных и краевых условий для рассматриваемой переопределенной системы уравнений. Возможно, это основной механизм, почему для редуцированной системы уравнений задаются начальные и краевые условия размерности, на единицу меньше.

В утверждениях 3–6 требование о наличии заранее общих решений у переопределенных систем уравнений не содержится. В утверждениях 1, 2 говорится, что если переопределенная система имеет решение, то оно содержится среди решений редуцированной системы уравнений, и его можно выделить, если поставить соответствующую задачу Коши для редуцированных систем уравнений. Исследование на совместность необходимо в методе дифференциальных связей, где нужно подобрать так, чтобы уравнение связи содержало как можно больший произвол [13]. Там необходимо решить дополнительно систему уравнений, чтобы выписать уравнение связи. В нашем методе, наоборот, выгодно, чтобы переопределенная система имела как можно меньше общих решений (не более чем счетное множество, см. приложение Б). Тогда их возможно найти, например, с помощью утверждения 6. В наших работах [1; 3] предлагается переопределение уравнений гидродинамики таким образом, чтобы множество решений этих систем переопределенных уравнений содержало решение, удовлетворяющее заранее заданной задаче Коши для этих уравнений. Множество таких решений может состоять всего из одного элемента. Исследование на совместность там очевидным образом выполнено. Если мы все-таки выпишем уравнение связи, содержащее больший произвол, то с определенного момента редуцированная система уравнений просто не будет дальше сокращаться в размерности, и мы не сможем выписать общее решение в явном виде. Однако произвол может возникнуть в следующей ситуации. Если мы редуцируем переопределенную систему с помощью утверждения 6 и выпишем систему неявных уравнений, то может оказаться, что счетного множества решений оно не имеет (требование на ранг матрицы не выполняется). Но при этом может оказаться, что какие-то высшие производные от неизвестных функций $S_v(\mathbf{x})$, $v=1...p$, $\mathbf{x}=(x_1,...x_m)$ (109) находятся в явном виде. Тогда, решая очевидные уравнения, можно учесть произвол в виде краевых и начальных условий.

Классическое исследование переопределенных систем на совместность, начатое Картаном, Спенсером, Яненко и др. [9; 13], в данной работе не проводится. Это и не нужно, потому что мы ссылаемся на полученные ранее в работах [1; 3] и в данной работе уже достаточно строго переопределенные системы уравнений математической физики, например, гидродинамики, и с ними работаем.

В 3-й части нашей работы приведены по-новому преобразованные, переопределенные системы уравнений Эйлера, Навье – Стокса и уравнений аналитической механики [8]. Главная особенность метода их переопределения заключается в том, что ищется решение сразу в пространстве начальных данных и времени, то есть при последовательной редукции этих уравнений может быть сразу найдено их решение (задачи Коши). В последней части статьи показывается, что это решение (или хотя бы частное) может быть чрезвычайно сложным, недоступным даже для решения современными ЭВМ. Можно предположить, что невозможность описания жидкости при больших числах Рейнольдса (развитой турбулентности) или при других условиях связана с чрезвычайно сложной структурой явного представления решения уравнений, описывающих движение этой жидкости.

В настоящее время создаются программные комплексы, которые уже эффективно решают сразу полную систему дифференциальных уравнений, где требуется как можно точнее найти решение задачи для конкретных систем дифференциальных уравнений сразу во всем объеме изменения пространства переменных или серьезное упрощение процесса численного получения этого решения. Интересуют частные, точные решения этой полной системы уравнений (они могут быть чрезвычайно сложными), в частности, для тестирования кодов [10]. В связи с этим в статью добавлено приложение А, которое систематически описывает способ получения явного представления решений любых систем дифференциальных уравнений, если эти системы каким-то образом переопределены.

В нашей статье приведены 6 утверждений. Они не являются теоремами в привычном смысле этого слова, поэтому мы их не обозначаем словом теорема, а более подходящим словом утверждение. Все выкладки и рассуждения не носят абсолютно строгий характер, с тем чтобы они были понятны не только математикам, но и физикам и специалистам из других областей. В формулировках утверждений отсутствуют привычные указания на пространства гладкости рассматриваемых функций и на множества решений, нет предварительных лемм и вспомогательных следствий. Это делается для краткости и простоты изложения материала. Мы считаем, что опытным математикам не составит труда изменить содержание обоснований наших утверждений, с тем чтобы придать им достаточную строгость или даже получить из них более сильные результаты.

Приложение А. Алгоритм нахождения решений переопределенных систем дифференциальных уравнений

На основе **утверждения 6** можно составить следующий общий алгоритм [4]. Пусть мы имеем переопределенную систему уравнений, получающуюся из (106), вида

$$P_\alpha\left(Q_\beta,\mathbf{x}\right)=\frac{\partial^{\left(i_1+\ldots+i_m\right)}}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_m^{i_m}}\left[H_k\left(\frac{\partial S_v}{\partial\mathbf{x}},S_v,\mathbf{x}\right)\right]=0\,,\ v=1\ldots p\,,\ k=1\ldots\left(p+n\right), \tag{А. 1}$$

относительно неизвестных вида

$$Q_\beta=\frac{\partial^{\left(j_1+\ldots+j_m\right)}S_v}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_m^{j_m}}\,,\ v=1\ldots p\,. \tag{А. 2}$$

Здесь $\alpha=\alpha\left(k,i_1,\ldots i_m\right)=1\ldots N_H$, $\beta=\beta\left(v,j_1,\ldots j_m\right)=1\ldots N_S$ – функции от индексов (мультииндексов) такие, что

$$Q_{\beta(v,0,\ldots 0)}=S_v\,,\ v=1\ldots p\,, \tag{А. 3}$$

$$P_{\alpha(k,0,\ldots 0)}\left(Q_\beta,\mathbf{x}\right)=H_k\left(Q_{\beta(v,1,\ldots 0)},\ldots Q_{\beta(v,0,\ldots 1)},Q_{\beta(v,0,\ldots 0)},\mathbf{x}\right),\ k=1\ldots\left(p+n\right), \tag{А. 4}$$

$$i_1=0\ldots\left(N_1-1\right),\ i_2=0\ldots\left(N_2-1\right),\ \ldots\ i_m=0\ldots\left(N_m-1\right),\ k=1\ldots\left(p+n\right), \tag{А. 5}$$

$$j_1=0\ldots N_1,\ j_2=0\ldots N_2,\ \ldots\ j_m=0\ldots N_m,\ \ v=1\ldots p\,. \tag{А. 6}$$

Имеем также

$$N_H=\left(p+n\right)N_1N_2\ldots N_m, \tag{А. 7}$$

$$N_S=p\cdot\left(N_1+1\right)\left(N_2+1\right)\ldots\left(N_m+1\right). \tag{А. 8}$$

Пусть

$$\alpha=\alpha\left(k,i_1,\ldots i_m\right)=k+i_1\left(p+n\right)+i_2\left(p+n\right)N_1+\ldots+i_m\left(p+n\right)N_1\ldots N_{m-1}\,;$$
$$\beta=\beta\left(v,j_1,\ldots j_m\right)=v+j_1p+j_2p\left(N_1+1\right)+\ldots+j_mp\left(N_1+1\right)\ldots\left(N_{m-1}+1\right).$$

Рассмотрим матрицу

$$A_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_\beta}\right),\ \alpha=1\ldots N_H\,,\ \beta=1\ldots N_S\,. \tag{А. 9}$$

Пусть ее ранг равен N_S^{real} количеству неизвестных Q_β, реально присутствующих в уравнениях (А. 1). Это число не более (119)

$$N_S^{real}\le N_H\,\frac{p}{\left(p+n\right)}\left(1+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{N_l}\right). \tag{А. 10}$$

Рассмотрим **расширенную** переопределенную систему неявных уравнений вида

$$P_{\alpha^*}\left(Q_{\beta^*},\mathbf{x}\right)=\frac{\partial^{\left(i_1+\ldots+i_m\right)}}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_m^{i_m}}\left[H_k\left(\frac{\partial S_v}{\partial\mathbf{x}},S_v,\mathbf{x}\right)\right]=0\,,\ v=1\ldots p\,,\ k=1\ldots\left(p+n\right), \tag{А. 11}$$

относительно неизвестных вида

$$Q_{\beta^*} = \frac{\partial^{(j_1+\ldots+j_m)} S_v}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}}, \; v = 1 \ldots p. \tag{А. 12}$$

Но функции от мультииндексов $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \ldots i_m) = 1 \ldots N_H^w$, $\beta^* = \beta^*(v, j_1, \ldots j_m) = 1 \ldots N_S^w$ в отличие от (А. 3)–(А. 6) пусть определяются из условий:

$$Q_{\beta^*(v,0,\ldots 0)} = S_v, \; v = 1 \ldots p, \tag{А. 13}$$

$$P_{\alpha^*(k,0,\ldots 0)}\left(Q_{\beta^*}, \mathbf{x}\right) = H_k\left(Q_{\beta^*(v,1,\ldots 0)}, \ldots Q_{\beta^*(v,0,\ldots 1)}, Q_{\beta^*(v,0,\ldots 0)}, \mathbf{x}\right), \; k = 1 \ldots (p+n), \tag{А. 14}$$

$$i_1 = 0 \ldots N_1, \; i_2 = 0 \ldots N_2, \; \ldots \; i_m = 0 \ldots N_m, \; k = 1 \ldots (p+n), \tag{А. 15}$$

$$j_1 = 0 \ldots (N_1+1), \; j_2 = 0 \ldots (N_2+1), \; \ldots \; j_m = 0 \ldots (N_m+1), \; v = 1 \ldots p. \tag{А. 16}$$

Пусть

$$\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \ldots i_m) = k + i_1(p+n) + i_2(p+n)(N_1+1) + \ldots + i_m(p+n)(N_1+1)\ldots(N_{m-1}+1),$$
$$\beta^* = \beta^*(v, j_1, \ldots j_m) = v + j_1 p + j_2 p(N_1+2) + \ldots + j_m p(N_1+2)\ldots(N_{m-1}+2).$$

Имеем также

$$N_H^w = (p+n)(N_1+1)(N_2+1)\ldots(N_m+1), \tag{А. 17}$$

$$N_S^w = p \cdot (N_1+2)(N_2+2)\ldots(N_m+2). \tag{А. 18}$$

Дифференцируя выражение (А. 11) (см. (122)) по переменной $x_s, s = 1 \ldots m$, находим, что

$$P_{\tilde{\alpha}}\left(Q_{\beta^*}, \mathbf{x}\right) = \sum_{v=1}^{p} \sum_{j_1=0}^{N_1+1} \sum_{j_2=0}^{N_2+1} \ldots \sum_{j_m=0}^{N_m+1} \frac{\partial P_{\alpha^*}}{\partial Q_{\beta^*}} Q_{\tilde{\beta}} + \frac{\partial P_{\alpha^*}\left(Q_{\beta^*}, \mathbf{x}\right)}{\partial x_s} = 0, \tag{А. 19}$$

где

$$\tilde{\alpha} = \alpha^*\left(k, i_1, \ldots (i_s+1) \ldots i_m\right), \; \tilde{\beta} = \beta^*\left(v, j_1, \ldots (j_s+1) \ldots j_m\right), \; s = 1 \ldots m.$$

Здесь предполагается, что $i_s \le N_s - 1$, $j_s \le N_s$.

Любое из уравнений (А. 11) (см. (А. 19)) с индексом $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \ldots i_m)$ содержит неизвестные вида (А. 12) с индексами $\beta^* = \beta^*(v, j_1, \ldots j_m)$, где $j_1 \le i_1 + 1$, … $j_m \le i_m + 1$ и $0 \le j_1 + \ldots + j_m \le i_1 + \ldots + i_m + 1$.

Очевидно, тогда

$$\frac{\partial P_{\alpha^*(k, i_1, \ldots i_s = (N_s - 1) \ldots i_m)}}{\partial Q_{\beta^*(v, j_1, \ldots j_s = N_s + 1, \ldots j_m)}} = 0. \tag{А. 20}$$

Рекуррентное соотношение (А. 19), удобное для получения уравнений (А. 11), корректно.

Способ решения. Определяем из (А. 19) неявные уравнения, пользуясь (А. 13), (А. 14), и решаем их. Вычисляем ранг матрицы (А. 9). Вычисляем вручную количество переменных (А. 10)! и сравниваем с рангом матрицы (А. 9). Если они совпадают, то мы имеем решение системы дифференциальных уравнений вида (106).

Очевидно, нас интересует только случай $N_H \ge N_S$. Можно получить следующие оценки:

$$N_H \ge (p+n)(mp/n)^m,$$

где минимум реализуется при $N_1 \approx N_2 \approx \ldots \approx N_m \approx mp/n$.

Приложение Б. О множестве решений переопределенных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0, \tag{Б. 1}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\alpha}{\partial x}=2\alpha. \tag{Б. 2}$$

Очевидно, переопределенная система (Б. 1), (Б. 2) имеет общее решение $\alpha=\mathrm{Const}\exp(x+t)$.

В отличие от примеров **1** и **2**, где общее решение только одно, пример **3** показывает, что переопределенная система уравнений может иметь целую серию общих решений. Представляет интерес исследовать вопрос, когда и при каких условиях общих решений у переопределенных систем дифференциальных уравнений будет не более, чем счетное количество.

Рассмотрим переопределенную систему из $p + n$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v(\mathbf{x})$, $v=1...p$, $\mathbf{x}=(x_1,...x_m)$

$$H_k\left(\frac{\partial S_v}{\partial\mathbf{x}},S_v,\mathbf{x}\right)=0,\ v=1...p,\ k=1...(p+n). \tag{Б. 3}$$

Пусть система (Б. 3) имеет общие решения вида $S^v=S_v(\mathbf{x},a)$, $v = 1...p$, где a – параметр. Подставим это решение в (Б. 3) и продифференцируем выражения (Б. 3) по параметру a. Тогда

$$\sum_{v=1}^{p}\left(\frac{\partial H_k}{\partial\left(\frac{\partial S_v}{\partial\mathbf{x}}\right)}\frac{\partial Q_v}{\partial\mathbf{x}}+\frac{\partial H_k}{\partial S_v}Q_v\right)=0,\ k=1...(p+n), \tag{Б. 4}$$

где $Q_v=\partial S_v/\partial a$, $v=1...p$.

Рассмотрим (Б. 4) как переопределенную систему линейных однородных дифференциальных уравнений относительно неизвестных Q_v, $v=1...p$, где коэффициенты определяются конкретным решением системы (Б. 3). Очевидно, это система имеет общее нулевое решение. Согласно приложению **А** данную систему можно редуцировать до переопределенной системы линейных уравнений. И если требование на ранг матрицы (А. 9) будет выполнено, то это нулевое решение будет единственно. Следовательно, тогда $Q_v=\partial S_v/\partial a=0$, $v = 1...p$, то есть общие решения вида $S^v=S_v(\mathbf{x},a)$ существовать не могут.

Таким образом, если на всяком решении переопределенной системы дифференциальных уравнений (Б. 3) соответствующая переопределенная система линейных однородных дифференциальных уравнений (Б. 4) имеет только одно нулевое решение, то общее решение системы (Б. 3) от непрерывного параметра зависеть не может.

Легко проверить, что для примеров **1** и **2** данное утверждение выполняется, а для примера **3** не выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аккерман, В. Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В. Б. Аккерман, М. Л. Зайцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1518–1530.

2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : Физматлит, 2005. – 304 с.

3. Зайцев, М. Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 527.

4. Зайцев, М. Л. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2016. – № 6 (37). – С. 119–127.

5. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М. : Мир, 1964. – 830 с.

6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие : в 10 т. Т. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 216 с.

7. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1986. – Т. VI. – 736 с.

8. Лурье, А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 824 с.

9. Полянин, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М. : Физматлит, 2005. – 256 с.

10. Полянин, А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. – М. : Физматлит, 2002. – 432 с.

11. Самарский, А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. – М. : Наука, 1980. – 352 с.

12. Седов, Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1978. – Т. 1. – 492 с. ; Т. 2. – 568 с.

13. Сидоров, А. Ф. Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике / А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко. – Новосибирск : Наука, 1984. – 271 с.

14. Схоутен, Я. А. Тензорный анализ для физиков / Я. А. Схоутен. – М. : Наука, 1965. – 456 с.

15. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1966. – 742 с.

16. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. – СПб. : Лань, 2003. – 448 с.

REFERENCES

1. Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Snizhenie razmernosti v uravneniyakh gidrodinamiki [Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations]. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2011, vol. 8, no. 2, pp. 1418-1430.

2. Beklemishev D.V. *Kurs analiticheskoy geometrii i lineynoy algebry* [Course of Analytical Geometry and Linear Algebra]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 304 p.

3. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Gipoteza ob uproshchenii pereopredelennykh sistem differentsialnykh uravneniy i ee primenenie k uravneniyam gidrodinamiki [Hypothesis on Reduction of Overdetermined Systems of Differential Equations and Its Application to Equations of Hydrodynamics]. *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika*, 2015, no. 2, pp. 5-27.

4. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Eshche odin sposob nakhozhdeniya chastnykh resheniy uravneniy matematicheskoy fiziki [Another Method for Finding Particular Solutions of Equations of Mathematical Physics]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, no. 6 (37), pp. 119-127.

5. Kurant R. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations]. Moscow, Mir Publ., 1964. 830 p.

6. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Teoreticheskaya fizika: ucheb. posobiye: v 10 t. T. I. Mekhanika* [Course of Theoretical Physics, Vol. 1: Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 216 p.

7. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Teoreticheskaya fizika: Gidrodinamika. T. VI* [Course of Theoretical Physics. Vol. 6: Fluid mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 736 p.

8. Lurye A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, GIFML Publ., 1961. 824 p.

9. Polyanin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelineynyh uravneniy matematicheskoy fiziki I mekhaniki* [Methods for Solution of Equations of Mathematical Physics and Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 256 p.

10. Polyanin A.D., Zaytsev V.F. *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: Tochnye resheniya* [Handbook on Nonlinear Equations of Mathematical Physics: Exact Solutions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 432 p.

11. Samarskiy A.A., Popov Yu.P. *Raznostnye metody resheniya zadach gazovoy dinamiki* [Difference Methods for Solving Problems of Gas Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 352 p.
12. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy: v 2 t.* [Mechanics of Continuous Media. Vols. 1, 2]. Moscow, Nauka Publ., 1978, vol. 1. 492 p.; vol. 2. 568 p.
13. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. *Metod differentsialnykh svyazey i ego prilozheniya k gazovoy dinamike* [Method of Differential Connections and Its Application to Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984. 271 p.
14. Schouten J.A. *Tenzornyy analiz dlya fizikov* [Tensor Analysis for Physicists]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 456 p.
15. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 742 p.
16. Fedoryuk M.V. *Obyknovennye differentsialnye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Saint Petersburg, Lan Publ., 2003. 448 p.

REDUCTION OF OVERDETERMINED DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Maxim Leonidovich Zaytsev

Postgraduate Student,
Nuclear Safety Institute of Russian Academy of Sciences
mlzaytsev@gmail.com
Bolshaya Tulskaya St., 52, 115191 Moscow, Russian Federation

Vyacheslav Borisovich Akkerman

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor,
West Virginia University
Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
WV 26506-6106 Morgantown, USA

Abstract. A technical method of reducing the overdetermined systems of differential equations is further extended. Specifically, the fundamentals and validity limits of the method are identified, and the method is justified within its validity domain. Starting with an overview of the previous results, we subsequently employ them in deriving and justifying the new outcomes. In particular, overdetermined systems of ordinary differential equations (ODE) are studied as the simplest case. It is demonstrated that, if a determinant deviates from zero for an ODE system, then the solution to this system can be found. Based on this, we subsequently arrive to a more general statement for a system of partial differential equations (PDE). On a separate basis, a Cauchy problem for reduced overdetermined systems of differential equations is considered, and it is shown that such a problem cannot be with arbitrary initial conditions. It is also shown and substantiated how to employ a Cauchy problem to reduce the dimension of PDEs. A novel approach of how to transform ODE and PDE systems (such as Euler and Navies-Stokes equations as well as the analytical mechanics system of equations) into the overdetermined systems is presented. Finally, the results are generalized in such a manner that it is shown how to reduce an overdetermined system of deferential equations to that having a complete and explicit solution. The work also includes two appendices. The first appendix presents the algorithm of searching for a solution to an overdetermined system of differential equations, in particular, by means of the computational approaches. The second appendix is devoted to the study of the variety of the solutions to an overdetermined system of equations. In particular, it is shown that a certain condition for the determinant, associated with this system of equations, breaks the possibility, that such a variety of solutions can depend on a continuous factor (for instance, from Cauchy conditions). For instance, it could be not more than a countable set. The paper is concluded with a brief summary, where the major results of the work are listed again and discussed, including their potential practical applications such as developing and testing of new computer codes to solving systems of differential equations.

Key words: overdetermined systems of differential equations, Euler and Navier-Stokes equations, differential equation on the surface, ODE, dimension of differential equations, Cauchy problem, partial differential equations.