www.volsu.ru

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.5.4

УДК 514.76
ББК 22.1

СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ NC_{10}-МНОГООБРАЗИЙ

Алигаджи Рабаданович Рустанов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и специальной социологии Института социально-гуманитарного образования,
Московский педагогический государственный университет
aligadzhi@yandex.ru
просп. Вернадского, 88, 119571 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. В работе исследованы свойства интегрируемости NC_{10}-многообразий. В частности, показано, что интегрируемая NC_{10}-структура, а также нормальная NC_{10}-структура, является косимплектической. Показано, что NC_{10}-структура с замкнутой контактной формой является точнейше косимплектической. Приведены локальные строения исследуемых многообразий.

Ключевые слова: косимплектическая структура, интегрируемая структура, приближенно келерово многообразие, точнейшее косимплектическая структура, тензор Нейенхейса, нормальная структура, NC_{10}-многообразие.

В данной работе мы продолжаем изучение геометрии NC_{10}-многообразий, начатое в работах [3–5]. Интерес к этому классу многообразий вызван тем фактом, что этот класс многообразий обобщает хорошо изученный класс косимплектических многообразий. Более того, они обобщают класс точнейше косимплектических многообразий. В данной статье мы исследуем свойства интегрируемости данной структуры, что составляет основную цель статьи.

Пусть M – гладкое почти контактное метрическое многообразие (коротко, AC-многообразие), размерности $2n+1$, $X(M)-C^{\infty}$-модуль гладких векторных полей на многообразии M. В дальнейшем все многообразия, тензорные поля и т. п. объекты предполагаются гладкими класса C^{∞}.

Определение 1 [3]. AC-структура, характеризуемая тождеством

$$\begin{gathered}\nabla_X(\Phi)Y+\nabla_Y(\Phi)X=\xi\nabla_X(\eta)\Phi Y+\\+\xi\nabla_Y(\eta)\Phi X+\eta(X)\nabla_{\Phi Y}\xi+\eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi;\ \ X,Y\in X(M),\end{gathered}\tag{1}$$

называется NC_{10}-**структурой**. AC-многообразие, снабженное NC_{10}-структурой, называется NC_{10}-**многообразием**.

Полная группа структурных уравнений NC_{10}-структуры на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид [3]:

$$\begin{gathered}1)\ d\omega=F_{ab}\omega^a\wedge\omega^b+F^{ab}\omega_a\wedge\omega_b;\\2)\ d\omega^a=-\theta^a_b\wedge\omega^b+C^{abc}\omega_b\wedge\omega_c+F^{ab}\omega_b\wedge\omega;\\3)\ d\omega_a=\theta^b_a\wedge\omega_b+C_{abc}\omega^b\wedge\omega^c+F_{ab}\omega^b\wedge\omega;\\4)\ d\theta^c_b+\theta^c_a\wedge\theta^a_b=\left(A^{ad}_{bc}-2C^{adh}C_{hbc}-F^{ad}F_{bc}\right)\omega^c\wedge\omega_d,\end{gathered}\tag{2}$$

где

$$C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{a}_{\hat{b},\hat{c}};\, C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c};\, C^{[abc]} = C^{abc};\, C_{[abc]} = C_{abc};\, \overline{C^{abc}} = C_{abc};$$
$$F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^{0}_{\hat{a},\hat{b}};\, F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^{0}_{a,b};\, F^{ab} + F^{ba} = 0;\, F_{ab} + F_{ba} = 0; \qquad (3)$$
$$A^{ad}_{[bc]} = A^{[ad]}_{bc} = 0;\, F_{ad}C^{dbc} = F^{ad}C_{dbc} = 0 \cdot$$

Тождество $F^{ad}C_{dbc} = 0$ называется ***первым фундаментальным тождеством*** NC_{10}-структуры; тождество $A^{ad}_{b[c}C_{gf]d} = 2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d}$ – ***вторым фундаментальным тождеством***; тождество $A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]} = F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]}$ – ***третьим фундаментальным тождеством*** [4; 5].

Предложение 1 [3]. NC_{10}-структура является: 1) точнейше косимплектической тогда и только тогда, когда второй структурный тензор равен нулю, то есть $F = 0$; 2) структурой класса C_{10} тогда и только тогда, когда первый структурный тензор равен нулю, то есть $C^{abc} = C_{abc} = 0$; 3) косимплектической структурой тогда и только тогда, когда $C^{abc} = C_{abc} = 0$, $F^{ab} = F_{ab} = 0$.

Поскольку $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, где π – естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на многообразие M, то из (2:1) следует, что контактная форма NC_{10}-структуры замкнута тогда и только тогда, когда $F^{ab} = F_{ab} = 0$, то есть когда, согласно Предложения 1, NC_{10}-структура является точнейше косимплектической. Так как всякое точнейшее косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую [2], то доказана следующая теорема.

Теорема 1. NC_{10}-многообразие имеет замкнутую контактную форму тогда и только тогда, когда она является точнейше косимплектическим многообразием, то есть когда локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Напомним [2], что компоненты тензора Нейенхейса

$$N_{\Phi}(X,Y) = \frac{1}{4}\left\{\Phi^2[X,Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]\right\}$$

на пространстве присоединенной G-структуры имеют следующий вид:

$$1)\ N^{0}_{ab} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{0}_{[a,b]};\ 2)\ N^{0}_{\hat{a}b} = -N^{0}_{b\hat{a}} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{0}_{(\hat{a},b)};\ 3)\ N^{0}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{0}_{[\hat{a},\hat{b}]};$$
$$4)\ N^{a}_{\hat{b}0} = -N^{a}_{0\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi^{a}_{\hat{b},0} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{a}_{0,\hat{b}};\ 5)\ N^{a}_{\hat{b}\hat{c}} = \sqrt{-1}\Phi^{a}_{[\hat{b},\hat{c}]};$$
$$6)\ N^{\hat{a}}_{b0} = -N^{\hat{a}}_{0b} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi^{\hat{a}}_{b,0};\ 7)\ N^{\hat{a}}_{bc} = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]}.$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю.

С учетом (3) компоненты тензора Нейенхейса $N_{\Phi}(X,Y)$ NC_{10}-структуры на пространстве присоединенной G-структуры примут вид:

$$1)\ N^{0}_{ab} = \frac{1}{2}F_{ab};\ 2)\ N^{0}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{2}F^{ab};\ 3)\ N^{a}_{\hat{b}0} = -N^{a}_{0\hat{b}} = \frac{1}{2}F^{ab};$$
$$4)\ N^{a}_{\hat{b}\hat{c}} = 2C^{abc};\ 5)\ N^{\hat{a}}_{b0} = -N^{\hat{a}}_{0b} = \frac{1}{2}F_{ab};\ 6)\ N^{\hat{a}}_{bc} = 2C_{abc}. \qquad (4)$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю.

Определение 2 [2]. Почти контактная метрическая структура называется интегрируемой, если $N = 0$.

Теорема 2. Интегрируемая NC_{10}-структура является косимплектической структурой.

Доказательство. Пусть NC_{10}-структура является интегрируемой, тогда из определения 2 и (4) следует, что $F_{ab} = F^{a} = 0, C^{abc} = C_{abc} = 0$. Тогда, согласно Предложения 1, NC_{10}-структура является косимплектической структурой. □

Поскольку всякое косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую [2], то предыдущую теорему можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 3. Интегрируемая NC_{10}-структура локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Известно [5], что задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, а именно:

$$N^{(1)}(X,Y) = N(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi;\ N^{(2)}(X,Y) = (L_{\Phi X}\eta)(Y) - (L_{\Phi Y}\eta)(X);$$
$$N^{(3)}(X) = (L_{\xi}\Phi)(X);\ N^{(4)}(X) = (L_{\xi}\eta)(X);\ X,Y \in X(M), \tag{5}$$

где L_X – производная Ли в направлении векторного поля X.

Вычислим компоненты этих тензоров на пространстве присоединенной G-структуры.

Учитывая, что $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, где π – естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на многообразие M, а также то обстоятельство, что на пространстве присоединенной G-структуры $\xi^a = \xi_a = 0, \xi^0 = 1$, согласно (2:1) находим, что на этом пространстве:

$$\begin{aligned} &1)\ (d\eta\otimes\xi)^a_{ij} = (d\eta\otimes\xi)^{\hat a}_{ij} = 0;\ 2)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{ab} = F_{ab};\ 3)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{\hat a\hat b} = F^{ab};\\ &4)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{\hat a b} = (d\eta\otimes\xi)^0_{a\hat b} = 0;\ 5)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{0a} = (d\eta\otimes\xi)^0_{a0} = 0;\\ &6)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{0\hat a} = (d\eta\otimes\xi)^0_{\hat a0} = 0;\ 7)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{00} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

С учетом соотношений (4) и (6) получим, что на пространстве присоединенной G-структуры тензор $N^{(1)}(X,Y) = N(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi$ имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} &1)\ \left(N^{(1)}\right)^0_{ab} = \frac{5}{2}F_{ab};\ 2)\ \left(N^{(1)}\right)^0_{\hat a\hat b} = \frac{5}{2}F^{ab};\ 3)\ \left(N^{(1)}\right)^a_{\hat b0} = -\left(N^{(1)}\right)^a_{0\hat b} = \frac{1}{2}F^{ab};\\ &4)\ \left(N^{(1)}\right)^{\hat a}_{b0} = -\left(N^{(1)}\right)^{\hat a}_{0b} = \frac{1}{2}F_{ab};\ 5)\ \left(N^{(1)}\right)^a_{\hat b\hat c} = 2C^{abc};\ 6)\ \left(N^{(1)}\right)^{\hat a}_{bc} = 2C_{abc}, \end{aligned} \tag{7}$$

а остальные компоненты нулевые.

Определение 3 [2; 6]. Почти контактная метрическая структура называется ***нормальной***, если $N(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0$.

Понятие нормальности было введено Сасаки и Хатакеямой [7] и является одним из наиболее фундаментальных понятий контактной геометрии, тесно связанных с понятием интегрируемости структуры.

Теорема 4. Нормальная NC_{10}-структура является косимплектической, а значит, локально эквивалентной произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Доказательство. Из определения 3 и (7) следует, что NC_{10}-структура является нормальной тогда и только тогда, когда $F_{ab} = F^{a} = 0, C^{abc} = C_{abc} = 0$. Согласно Предложения 1 NC_{10}-структура является косимплектической. А так как всякое косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую [2], и поскольку в случае односвязности многообразия эти локальные эквивалентности можно выбрать глобальными, то это завершает доказательство. □

Из теорем 2–4 имеем следующую теорему.

Теорема 5. Пусть $S=(\xi,\eta,\Phi,g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – AC-структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $S=(\xi,\eta,\Phi,g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – интегрируемая NC_{10}-структура;
2) $S=(\xi,\eta,\Phi,g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – нормальная NC_{10}-структура;
3) $S=(\xi,\eta,\Phi,g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – косимплектическая структура.

Теперь вычислим компоненты тензора $N^{(2)}(X,Y)=(L_{\Phi X}\eta)(Y)-(L_{\Phi Y}\eta)(X)$, где L_X – производная Ли в направлении векторного поля X.

Определение 4 [2]. Пусть M – гладкое многообразие; X – векторное поле на M; $\{F_t\}$ – соответствующая ему локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия; T – тензорное поле типа (r,s) на M. ***Производной Ли*** тензорного поля T в направлении векторного поля X называется тензорное поле L_XT на M, в каждой точке $p\in M$ определяемое формулой

$$(L_XT)_p=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((F_{-t})_*T_{F_t(p)}-T_p\right). \tag{8}$$

Оператор $L_X:T(M)\to T(M)$, сопоставляющий тензорному полю $T\in T(M)$ тензорное поле L_XT, называется ***оператором дифференцирования Ли*** в направлении векторного поля X.

Оператор дифференцирования Ли обладает следующими свойствами [2]:

1) оператор L_X является дифференцированием тензорной алгебры $T(M)$ многообразия, сохраняющим тип тензоров и перестановочным с операторами свертки;
2) $L_Xf=X(f),\ \forall f\in C^\infty(M)$;
3) $L_XY=[X,Y],\ X,Y\in X(M)$.

Замечательным обстоятельством является то, что перечисленные свойства оператора дифференцирования Ли однозначно определяют этот оператор.

Замечание [2]. Пусть t – произвольный тензор типа (r,s) на M. Выражение $L_X(t)(X_1,...,X_r,u^1,...,u^s)$, будучи линейным по аргументам $X_1,...,X_r,u^1,...,u^s$, не является линейным по аргументу X.

С учетом перечисленных свойств имеем:

$$L_{\Phi X}(\eta(Y))=L_{\Phi X}\left(C_{(1)}^{(1)}\eta\otimes Y\right)=C_{(1)}^{(1)}L_{\Phi X}(\eta\otimes Y)=C_{(1)}^{(1)}L_{\Phi X}(\eta)\otimes Y+C_{(1)}^{(1)}\eta\otimes L_{\Phi X}(Y)=L_{\Phi X}(\eta)\otimes Y+\eta\otimes L_{\Phi X}(Y),$$

то есть $L_{\Phi X}(\eta(Y))=L_{\Phi X}(\eta)\otimes Y+\eta\otimes L_{\Phi X}(Y)$.

С учетом тождества $[X,Y]=\nabla_XY-\nabla_YX$ и свойств оператора дифференцирования Ли, из полученного равенства имеем:

$$\begin{gathered}L_{\Phi X}(\eta)(Y)=L_{\Phi X}(\eta(Y))-\eta(L_{\Phi X}Y)=(\Phi X)(\eta(Y))-\eta([\Phi X,Y])=\\=(\Phi X)(\eta(Y))-\eta(\nabla_{\Phi X}Y)+\eta(\nabla_Y(\Phi X))=\{(\Phi X)(\eta(Y))-\eta(\nabla_{\Phi X}Y)\}+\\+\eta\{\nabla_Y(\Phi)X+\Phi\nabla_YX\}=\nabla_{\Phi X}(\eta)(Y)+\eta\{\nabla_Y(\Phi)X\}+\eta\{\Phi\nabla_YX\}=\\=\nabla_{\Phi X}(\eta)(Y)+\eta\{\nabla_Y(\Phi)X\},\end{gathered}$$

то есть

$$L_{\Phi X}(\eta)(Y)=\nabla_{\Phi X}(\eta)(Y)+\eta\{\nabla_Y(\Phi)X\};\ \forall X,Y\in X(M). \tag{9}$$

Рассмотрим характеристический вектор NC_{10}-многообразия. Поскольку ξ является тензором типа (0,1), то его компоненты $\{\xi^i\}$ на главном расслоении $B(M)$ реперов над M удовлетворяют дифференциальным уравнениям [2]:

$$d\xi^i-\xi^k\theta_k^i=\xi_{,j}^i\theta^j, \tag{10}$$

где $\{\xi^i_{,j}\}$ – система функций, служащая компонентами ковариантного дифференциала вектора ξ в связности ∇. Расписывая (10) на пространстве присоединенной G-структуры, с учетом соотношений $\xi^a = \xi^{\hat{a}} = 0, \xi^0 = 1$ и вида тензорных компонент формы римановой связности [3]:

$$\begin{gathered} 1)\,\theta^a_{\hat{b}} = C^{abc}\omega_c;\ 2)\,\theta^{\hat{a}}_b = C_{abc}\omega^c;\ 3)\,\theta^a_0 = -F^{ab}\omega_b;\ 4)\,\theta^{\hat{a}}_0 = -F_{ab}\omega^b; \\ 5)\,\theta^0_a = F_{ab}\omega^b;\ 6)\,\theta^0_{\hat{a}} = F^{ab}\omega_b;\ 7)\,\theta^0_0 = 0;\ 8)\,\theta^i_j + \theta^{\hat{i}}_{\hat{j}} = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

получим:

$$1)\,\xi^a_{,\hat{b}} = -F^{ab};\ 2)\,\xi^{\hat{a}}_{,b} = -F_{ab}, \tag{12}$$

а остальные компоненты нулевые.

Теорема 6. Характеристический вектор ξ NC_{10}-структуры является вектором Киллинга.

Доказательство. Поскольку $F^{ab} + F^{ba} = 0, F_{ab} + F_{ba} = 0$, то $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0$, то есть $\langle \nabla_X \xi, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y \xi\rangle = 0, \forall X, Y \in X(M)$, то есть ξ – вектор Киллинга. □

Аналогично для контактной формы η NC_{10}-многообразия:

$$1)\,\eta_{a,b} = -F_{ab};\ 2)\,\eta_{\hat{a},\hat{b}} = -F^{ab}, \tag{13}$$

а остальные компоненты нулевые.

Теорема 7. Контактная форма η NC_{10}-структуры является формой Киллинга.

Согласно соотношению (9), имеем:

$$\begin{gathered} N^{(2)}(X,Y) = L_{\Phi X}(\eta)(Y) - L_{\Phi Y}(\eta)(X) = \\ = \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} - \nabla_{\Phi Y}(\eta)(X) - \eta\{\nabla_X(\Phi)Y\}, \forall X, Y \in X(M), \end{gathered}$$

то есть

$$N^{(2)}(X,Y) = \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} - \nabla_{\Phi Y}(\eta)(X) - \eta\{\nabla_X(\Phi)Y\}, \forall X, Y \in X(M). \tag{14}$$

Из (14) следует, что $N^{(2)}(X,Y) = -N^{(2)}(Y,X)$, то есть тензор $N^{(2)}(X,Y)$ кососимметричен, то есть является 2-формой.

На пространстве присоединенной G-структуры тождество (14) примет вид:

$$N^{(2)}_{ij} = \eta_{j,k}\Phi^k_i - \eta_{i,k}\Phi^k_j + \eta_k\Phi^k_{i,j} - \eta_k\Phi^k_{j,i}\,. \tag{15}$$

С учетом соотношений $\eta_{\hat{a}} = \eta_a = 0, \eta_0 = 1$ и вида матрицы Φ, из (15) имеем:

$$1)\,N^{(2)}_{ab} = 4\sqrt{-1}F_{ab};\ 2)\,N^{(2)}_{\hat{a}\hat{b}} = -4\sqrt{-1}F^{ab}, \tag{16}$$

остальные компоненты нулевые.

Из (16) непосредственно имеем следующую теорему.

Теорема 8. На NC_{10}-многообразии $N^{(2)}(X,Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $F^{ab} = F_{ab} = 0$.

Из Предложения 1 и теоремы 8 следует теорема 9.

Теорема 9. NC_{10}-многообразие с $N^{(2)}(X,Y) = 0$ является точнейше косимплектическим многообразием.

Используя локальное строение точнейшее косимплектического многообразия [2], теорему 9 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 10. NC_{10}-многообразие с $N^{(2)}(X,Y) = 0$ локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Рассмотрим теперь тензор

$$N^{(3)}(X)=L_\xi(\Phi)(X)=L_\xi(\Phi X)-\Phi L_\xi X=[\xi,\Phi X]-\Phi[\xi,X]=$$
$$=\nabla_\xi(\Phi X)-\nabla_{\Phi X}\xi-\Phi(\nabla_\xi X-\nabla_X\xi)=\nabla_\xi(\Phi)X+\Phi\nabla_X\xi-$$
$$-\nabla_{\Phi X}\xi-\Phi\nabla_\xi X+\Phi\nabla_X\xi=\nabla_\xi(\Phi)X-\nabla_{\Phi X}\xi+\Phi\nabla_X\xi.$$

Таким образом, на NC_{10}-многообразии:

$$N^{(3)}(X)=\nabla_\xi(\Phi)X-\nabla_{\Phi X}\xi+\Phi\nabla_X\xi,\ \forall X\in X(M). \qquad (17)$$

На пространстве присоединенной G-структуры тождество (17) равносильно соотношениям:

$$1)\ \left(N^{(3)}\right)^a_{\hat{b}}=-2\sqrt{-1}F^{ab};\ 2)\ \left(N^{(3)}\right)^{\hat{a}}_b=2\sqrt{-1}F_{ab}, \qquad (18)$$

остальные компоненты нулевые.

Из (18) и Предложения 1 следует теорема 11.

Теорема 11. На NC_{10}-многообразии $N^{(3)}(X)=0$ тогда и только тогда, когда $F^{ab}=F_{ab}=0$, то есть когда многообразие является точнейше косимплектическим многообразием.

Используя локальное строение точнейше косимплектического многообразия [2], теорему 11 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 12. NC_{10}-многообразие с $N^{(3)}(X)=0$ локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

И, наконец, рассмотрим тензор $N^{(4)}(X)=(L_\xi\eta)(X);\forall X\in X(M)$. Имеем

$$N^{(4)}(X)=(L_\xi\eta)(X)=L_\xi(\eta(X))-\eta(L_\xi X)=\xi(\eta(X))-\eta([\xi,X])=$$
$$=\nabla_\xi(\eta(X))-\eta(\nabla_\xi X)+\eta(\nabla_\xi X)=\nabla_\xi(\eta)(X)+\eta(\nabla_\xi X)=\nabla_\xi(\eta)(X),$$

то есть

$$N^{(4)}(X)=\nabla_\xi(\eta)(X);\forall X\in X(M). \qquad (19)$$

С учетом (13), тождество (19) на пространстве присоединенной G-структуры равносильно соотношениям: $\left(N^{(4)}\right)_i=0$, то есть $N^{(4)}(X)=0$. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 13. На NC_{10}-многообразии $N^{(4)}(X)=0$.

Результаты теорем 1, 7–12 можно сформулировать в виде следующей основной теоремы.

Основная теорема. Пусть M – NC_{10}-многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) NC_{10}-многообразие имеет замкнутую контактную форму;
2) $F^{ab}=F_{ab}=0$;
3) $N^{(2)}(X,Y)=0$;
4) $N^{(3)}(X)=0$;
5) M – точнейше косимплектическое многообразие;
6) локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириченко, В. Ф. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий / В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов // Математический сборник. – 2002. – Т. 193, № 8. – С. 71–100.
2. Кириченко, В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В. Ф. Кириченко. – Изд. 2-е, доп. – Одесса : Печатный дом, 2013. – 495 с.

3. Рустанов, А. Р. Многообразия класса NC_{10} / А. Р. Рустанов // Преподаватель XXI век. – 2014. – № 3. – С. 209–218.

4. Рустанов, А. Р. NC_{10}-многообразия класса R_1 / А. Р. Рустанов, С. В. Харитонова // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия «Естественно-математические и технические науки». – 2016. – № 2. – С. 48–54.

5. Рустанов, А. Р. NC_{10}-многообразия класса R_2 / А. Р. Рустанов // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия «Естественно-математические и технические науки». – 2016. – № 4. – С. 43–48.

6. Blair, D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry / D. E. Blair // Lect. Notesin Math. – 1976. – Vol. 509. – P. 1–146.

7. Sasaki, S. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II / S. Sasaki, J. Hatakeyama // Tohoku Math. J. – 1961. – Vol. 13, № 2. – P. 281–294.

REFERENCES

1. Kirichenko V.F., Rustanov A.R. Differentsialnaya geometriya kvazi-sasakievykh mnogoobraziy [Differential Geometry of Quasi-Sasakian Manifolds]. *Matematicheskiy sbornik*, 2002, vol. 193, no. 8, pp. 71-100.

2. Kirichenko V.F. *Differentsialno-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh* [Differential-Geometric Structures on Manifolds]. Odessa, Pechatnyy dom, 2013. 495 p.

3. Rustanov A.R. Mnogoobraziya klassa NC_{10} [NC_{10}-Manifolds]. *Prepodavatel XXI veka*, 2014, no. 3, pp. 209-218.

4. Rustanov A.R., Kharitonova S.V. NC_{10}-mnogoobraziya klassa R_1 [NC_{10}-Manifolds of R_1 Class]. *Vestnik Adygeyskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki»*, 2016, no. 2, pp. 48-54.

5. Rustanov A.R. NC_{10}-mnogoobraziya klassa R_2 [NC_{10}-Manifolds of R_2 Class]. *Vestnik Adygeyskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki»*, 2016, no. 4, 2016, pp. 43-48.

6. Blair D.E. Contact manifolds in Riemannian geometry. *Lect. Notes in Math.*, 1976, vol. 509, pp. 1-146.

7. Sasaki S., Hatakeyama J. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II. *Tohoku Math. J.*, 1961, vol. 13, no. 2, pp. 281-294.

INTEGRABILITY PROPERTIES OF NC_{10}-MANIFOLDS

Aligadzhi Rabadanovich Rustanov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Theoretical and Special Sociology, Institute of Socio-Humanitarian Education,
Moscow State Pedagogical University
aligadzhi@yandex.ru
Prosp. Vernadsky, 88, 119571 Moscow, Russian Federation

Abstract. In this paper we investigate the integrability properties of NC_{10}-manifolds. In particular, it is shown that the integrable NC_{10}-structure, and also the normal NC_{10}-structure, is cosymplectic. It is shown that NC_{10}-structure with a closed contact form is finer than cosymplectic. Local structures of investigated manifolds are given.

Key words: cosymplectic structure, integrable structure, approximately Kähler manifold, finitely cosymplectic structure, Nijenhuis tensor, normal structure, NC_{10}-manifold.