DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.5.2

УДК 517.977
ББК 22.161.6

О НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Владимир Александрович Кыров

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и информатики,
Горно-Алтайский государственный университет
kyrovVA@yandex.ru
ул. Ленкина, 1, 649000 г. Горно-Алтайск, Российская Федерация

Аннотация. В этой статье выводятся и решаются функциональные уравнения, возникающие в геометрии. В процессе решения функциональные уравнения сначала сводятся к функционально-дифференциальным уравнениям, затем разделением переменных переходим к дифференциальным уравнениям. В конце решения дифференциальных уравнений подставляем в исходное функциональное уравнение.

Ключевые слова: функциональное уравнение, функционально-дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение.

Введение

Простым примером функционального уравнения является уравнение Коши

$$g(u+v) = g(u) + g(v),$$

где g — функция класса C^1, u и v — независимые переменные. Это уравнение решается так: сначала дифференцируем по переменным u и v: $g'(u+v) = g'(u)$, $g'(u+v) = g'(v)$. Далее вычитаем из первого уравнения второе и разделяем переменные: $g'(u) = g'(v) = a = \mathrm{const}$. Затем интегрируем и результат подставляем в исходное уравнение, после чего записываем ответ: $g(u) = au$. Этим же методом в данной работе решаются функциональные уравнения, которые появляются в задаче классификации геометрий локальной максимальной подвижности [1; 3; 4].

Геометрия локальной максимальной подвижности — это геометрия n-мерного пространства, задаваемая метрической функцией f, допускающая максимальную группу движений, то есть группу движений размерности $n(n+1)/2$. Только для таких геометрий по метрической функции однозначно находится локальная группа движений, а по этой группе движений восстанавливается метрическая функция. Примерами геометрий максимальной подвижности являются: геометрия Евклида, псевдоевклидова геометрия Минковского, симплектическая, геометрии постоянной кривизны, геометрии Терстона и др. Очевидна их актуальность в современной науке. На данный момент неизвестна полная классификация геометрий локальной максимальной подвижности.

Автором предложен метод классификации геометрий локальной максимальной подвижности, названный методом вложения. Суть этого метода состоит в следующем: по метрической функции

$$g = g(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$$

известной n-мерной геометрии локальной максимальной подвижности находим все метрические функции вида

$$f = f(g(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n), x^{n+1}, y^{n+1}),$$

задающие $n+1$-мерные геометрии локальной максимальной подвижности. Решение этой задачи сводится к решению специальных функционально-дифференциальных уравнений. Задача в данной постановке является новой, ранее не решаемой. Часть получаемых результатов известна, а часть нет. Проиллюстрируем на примере хорошо известной двумерной евклидовой геометрии [3], которая задается метрической функцией

$$g = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2.$$

Решая задачу вложения, получаем метрические функции трехмерных геометрий максимальной подвижности (размерность группы движений равна 6):

$$f = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2;$$
$$f = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2;$$
$$f = [(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2]e^{x^3 + y^3}.$$

Первые две геометрии — это хорошо известные трехмерные геометрии: евклидова и псевдоевклидова, а третья геометрия — новая, ранее неизвестная.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим дифференцируемую класса C^4 функцию $f : S_f \to R$, где $S_f \subset R^{n+1} \times R^{n+1}$ — открытая и плотная область определения. Пусть $U_0 \subset R^{n+1}$ — некоторая координатная окрестность, $x, y \in U_0$, причем $\langle x, y\rangle \in S_f$. Рассмотрим окрестности точек x и y: $U(x) \subset U_0$ и $U(y) \subset U_0$, причем $\forall x', y'$: $x' \in U(x)$, $y' \in U(y)$, $\langle x', y'\rangle \in S_f$. Обозначим через $U(\langle x, y\rangle) \subset R^{n+1} \times R^{n+1}$ — некоторую окрестность пары $\langle x, y\rangle$: $U(\langle x, y\rangle) \subset U(x) \times U(y)$. Пусть функция f имеет один из следующих видов:

$$f(x, y) = \sigma\left(\theta(x, y), w\right); \tag{1}$$

$$f(x, y) = \varkappa\left(\theta(x, y), z\right), \tag{2}$$

где θ, σ, $\varkappa$ — функции класса C^4 в этой окрестности, $\theta(x, y) = \theta(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$, $(x^1, \ldots, x^{n+1})$, $(y^1, \ldots, y^{n+1})$ — координаты точек x и y соответственно, $w = x^{n+1} - y^{n+1}$, $z = x^{n+1} + y^{n+1}$. Дополнительно потребуем, чтобы в любой точке из $U(\langle x, y\rangle)$ выполнялись неравенства [5]

$$\frac{\partial\theta}{\partial x^i} \neq 0,\ \frac{\partial\theta}{\partial y^i} \neq 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \neq 0,\ \frac{\partial\sigma}{\partial w} \neq 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta} \neq 0,\ \frac{\partial\varkappa}{\partial z} \neq 0. \tag{5}$$

Также будем предполагать, чтобы функция f была двухточечным инвариантом действия некоторой группы Ли в пространстве R^{n+1} [6]. Множество таких действий задает группу Ли преобразований пространства R^{n+1}. Произвольный оператор алгебры Ли этой группы преобразований в окрестности $U(x)$ имеет вид [5]:

$$X = X_1\partial_{x^1} + \cdots + X_n\partial_{x^n} + X_{n+1}\partial_{x^{n+1}}, \tag{6}$$

где $X_s = X_s(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1})$ — функции класса C^3 в окрестности $U(x) \subset U_0 \subset R^{n+1}$, $s = 1, \ldots, n+1$. Через операторы записывается критерий локальной инвариантности [6]:

$$X(x)f(x, y) + X(y)f(x, y) = 0. \tag{7}$$

Равенство (7) расписываем для функций (1) и (2), после простых преобразований получаем:

$$[X] = (X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y))\varphi(\theta, w), \tag{8}$$

$$[X] = (X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y))\lambda(\theta, z), \tag{9}$$

где введено сокращающее обозначение:

$$[X] = \sum_{k=1}^{n}\left(X_k(x)\frac{\partial\theta}{\partial x^k} + X_k(y)\frac{\partial\theta}{\partial y^k}\right),$$

причем $\varphi(\theta, w) = -\frac{\partial\sigma}{\partial w}/\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}$ и $\lambda(\theta, z) = -\frac{\partial\varkappa}{\partial z}/\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta}$ — функции класса C^3 в $U(\langle x, y\rangle)$, а также $\varphi \neq 0$, $\lambda \neq 0$, поскольку иное противоречит неравенствам (4) и (5). Уравнения (8) и (9) являются функционально-дифференциальными относительно неизвестных компонент оператора (6), а также функций σ и $\varkappa$, и выполняются тождественно по координатам точек x и y в окрестности $U(\langle x, y\rangle)$.

Дифференцируя уравнения (8) и (9) по переменным x^{n+1} и y^{n+1}, а также вводя сокращающее обозначение $Y = X_{n+1}$, получаем новые функционально-дифференциальные уравнения в окрестности $U(\langle x, y\rangle)$:

$$((Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}})\varphi'_w + (Y(x) - Y(y))\varphi''_{ww} = 0, \tag{10}$$

$$((Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}})\lambda'_z + (Y(x) + Y(y))\lambda''_{zz} = 0. \tag{11}$$

Основным содержанием данной работы является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *В окрестности $U(\langle x, y\rangle)$ функционально-дифференциальное уравнение* (10), *где $w = x^{n+1} - y^{n+1}$, $Y \neq \mathrm{const}$, $\varphi'_w \neq 0$, имеет решения:*

$$Y = C(x^1, \ldots, x^n),\ \varphi = a(\theta)w + b(\theta); \tag{12}$$

$$Y = rx^{n+1} + c,\ \varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta); \tag{13}$$

$$Y = r(x^{n+1})^2 + c,\ \varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta); \tag{14}$$

$$Y = r\cos(\omega x^{n+1} + \alpha) + c,\ \varphi = a(\theta)ctg\frac{\omega w}{2} + b(\theta); \tag{15}$$

$$Y = re^{\omega x^{n+1}} + c,\ \varphi = a(\theta)\frac{e^{\omega w}}{e^{\omega w} - 1} + b(\theta); \tag{16}$$

$$Y = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1} + \alpha) + c,\ \varphi = a(\theta)cth\frac{\omega w}{2} + b(\theta); \tag{17}$$

$$Y = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1} + \alpha) + c,\ \varphi = a(\theta)th\frac{\omega w}{2} + b(\theta), \tag{18}$$

где $r, c, \alpha = \mathrm{const}$, $C(x^1, \ldots, x^n) \neq \mathrm{const}$ — *функция класса* C^3, $a(\theta), b(\theta)$ — *функции класса* C^3, $a(\theta) \neq 0$.

Теорема 2. *В окрестности* $U(\langle x, y\rangle)$ *функционально-дифференциальное уравнение* (11), *где* $z = x^{n+1} + y^{n+1}$, $Y \neq 0$, $\lambda'_z \neq 0$, *имеет решения:*

$$Y = C(x^1, \ldots, x^n),\ \lambda(\theta, z) = a(\theta)z + b(\theta); \tag{19}$$

$$Y = rx^{n+1} + c,\ \lambda = a(\theta)\frac{1}{rz + 2c} + b(\theta); \tag{20}$$

$$Y = r\cos(\omega x^{n+1} + \alpha),\ \lambda = a(\theta)tg\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta); \tag{21}$$

$$Y = re^{\omega x^{n+1}},\ \lambda = a(\theta)e^{-\omega z} + b(\theta); \tag{22}$$

$$Y = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1} + \alpha),\ \lambda = a(\theta)th\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta); \tag{23}$$

$$Y = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1} + \alpha),\ \lambda = a(\theta)cth\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta), \tag{24}$$

где $r, c, \alpha = \mathrm{const}$, $C(x^1, \ldots, x^n) \neq \mathrm{const}$ — *функция класса* C^3, $a(\theta), b(\theta)$ — *функции класса* C^3, $a(\theta) \neq 0$.

Заметим, что теоремы 1 и 2 для скалярного произведения (евклидово или псевдоевклидово) доказаны в работе [2].

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *В окрестности* $U(\langle x, y\rangle)$ *функциональное уравнение*

$$C(x) - C(y) = \xi(\theta(x, y), w), \tag{25}$$

где $C(x) = C(x^1, \ldots, x^n)$ — *функция класса* C^3, ξ — *функция класса* C^1, *имеет решение*

$$C(x) = c = \mathrm{const}. \tag{26}$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (25) по координате x^{n+1}, получим $\xi'_w = 0$. Значит, $\xi(\theta(x, y), w) = \xi(\theta(x, y))$. Тогда уравнение (25) примет вид:

$$C(x) - C(y) = \xi(\theta(x, y)). \tag{27}$$

Далее выделяются два случая: $\xi'_\theta = 0$ и $\xi'_\theta \neq 0$.

1. Если в (27) $\xi'_\theta = 0$, то $C(x) - C(y) = \mathrm{const}$. Разделяя переменные, получаем (26).

2. Если же в (27) $\xi'_\theta \neq 0$ в $U(\langle x, y\rangle)$, то для некоторой координаты x^i: $\dfrac{\partial C(x)}{\partial x^i} = \xi'_\theta \dfrac{\partial \theta(x,y)}{\partial x^i} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Далее от координат x^i переходим к новым координатам x'^i по формулам: $x'^1 = x'^1, \ldots, x'^{i-1} = x'^{i-1}, x'^i = C(x^1, \ldots, x^n), x'^{i+1} = x'^{i+1}, \ldots, x'^n = x'^n$. Несложно доказать, что якобиан в данной замене координат равен $\dfrac{\partial C(x)}{\partial x^i}$ и поэтому отличен от нуля. Тогда в новых координатах уравнение (27) примет вид: $x'^i - y'^i = \xi(\theta(x, y))$, следовательно, по теореме о неявной функции, в $U(\langle x, y\rangle)$ будем иметь: $\theta = \eta(x'^i - y'^i)$, где η — некоторая функция класса C^1. Поэтому $\dfrac{\partial \theta}{\partial x'^j} = 0$, $j \neq i$, что противоречит неравенству из (3). Таким образом, справедлива формула (26).

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *В окрестности $U(\langle x, y\rangle)$ функциональное уравнение*

$$C(x) + C(y) = \xi(\theta(x, y), z),$$

где $C(x) = C(x^1, \ldots, x^n)$ — функция класса C^4, ξ — функция класса C^1, имеет решение

$$C(x) = c = \mathrm{const}.$$

3. Доказательство теоремы 1

При доказательстве «по умолчанию» все уравнения решаются в $U(\langle x, y\rangle)$. Вначале заметим, что $Y = \mathrm{const}$ тогда и только тогда, когда $Y(x) - Y(y) = 0$. В прямую сторону это очевидно. В обратную сторону применяем разделение переменных: $Y(x) = Y(y) = \mathrm{const}$. По условию теоремы $Y \neq \mathrm{const}$, следовательно $Y(x) - Y(y) \neq 0$. Тогда от уравнения (10) приходим к новому:

$$\frac{(Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}}}{Y(x) - Y(y)} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}. \tag{28}$$

Дифференцируя это уравнение сначала по x^{n+1}, а затем по y^{n+1}, после чего первый результат складываем со вторым, получаем равенство:

$$(Y(x))''_{x^{n+1}} + (Y(y))''_{y^{n+1}})(Y(x) - Y(y)) - ((Y(x))'_{x^{n+1}})^2 + ((Y(y))'_{y^{n+1}})^2 = 0. \tag{29}$$

Это равенство является функционально-дифференциальным уравнением, которое выполняется тождественно в окрестности $U(\langle x, y\rangle)$.

Возможны два случая: $(Y(x))'_{x^{n+1}} = 0$ и $(Y(x))'_{x^{n+1}} \neq 0$.

В первом случае из уравнения (10) получаем $\varphi''_{ww} = 0$, следовательно справедливо решение (12).

Во втором случае тождество (29) дифференцируем по переменным x^{n+1} и y^{n+1}, после чего делим на ненулевое произведение $(Y(x))'_{x^{n+1}}(Y(y))'_{y^{n+1}} \neq 0$ и разделяем переменные, затем получаем дифференциальное уравнение:

$$(Y(x))'''_{x^{n+1}} + \mu(Y(x))'_{x^{n+1}} = 0,\ \mu = \mathrm{const}. \tag{30}$$

Это уравнение имеет следующие решения:
при $\mu = 0$:

$$Y = A(x^1, \ldots, x^n)(x^{n+1})^2 + B(x^1, \ldots, x^n)x^{n+1} + C(x^1, \ldots, x^n);$$

при $\mu > 0$:

$$Y = A(x^1, \ldots, x^n)\cos\omega x^{n+1} + B(x^1, \ldots, x^n)\sin\omega x^{n+1} + C(x^1, \ldots, x^n),\ \omega = \sqrt{\mu};$$

при $\mu < 0$:

$$Y = A(x^1, \ldots, x^n)e^{\omega x^{n+1}} + B(x^1, \ldots, x^n)e^{-\omega x^{n+1}} + C(x^1, \ldots, x^n),\ \omega = \sqrt{-\mu}.$$

Затем найденное подставляем в (29) и получаем:
при $\mu = 0$:

$$Y = rx^{n+1} + C(x^1, \ldots, x^n); \tag{31}$$

$$Y = r(x^{n+1})^2 + c; \tag{32}$$

при $\mu > 0$:

$$Y = r\cos(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)) + c,\ \omega = \sqrt{\mu}; \tag{33}$$

при $\mu < 0$:

$$Y = A(x^1, \ldots, x^n)e^{\omega x^{n+1}} + c,\ \omega = \pm\sqrt{-\mu}; \tag{34}$$

$$Y = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)) + c,\ \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{35}$$

$$Y = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)) + c,\ \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{36}$$

причем $r, c = \mathrm{const}$, $r \neq 0$.

Далее функцию (31) подставляем в уравнение (28)

$$\frac{2r}{rw + C(x^1, \ldots, x^n) - C(y^1, \ldots, y^n)} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}. \tag{37}$$

К уравнению (37) применяем лемму (1), получаем $C(x^1, \ldots, x^n) = c = \mathrm{const}$. Значит уравнение (37) принимает более простой вид:

$$\frac{2}{w} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}.$$

Интегрируя последнее, получаем: $\varphi = a(\theta)\dfrac{1}{w} + b(\theta)$. Найденное объединяя с (31), имеем (13).

Функцию (32) подставляем в уравнение (28), в результате как и выше получаем: $\varphi = a(\theta)\dfrac{1}{w} + b(\theta)$. Найденное объединяя с (32), получаем (14).

Теперь функцию (33) подставляем в уравнение (28) и применяем тригонометрические свойства:

$$-\omega\frac{\sin(\omega x^{n+1} + p(x)) + \sin(\omega y^{n+1} + p(y))}{\cos(\omega x^{n+1} + p(x)) - \cos(\omega y^{n+1} + p(y))} =$$

$$= \omega \frac{\sin \dfrac{\omega z + p(x) + p(y)}{2} \cos \dfrac{\omega w + p(x) - p(y)}{2}}{\sin \dfrac{\omega z + p(x) + p(y)}{2} \sin \dfrac{\omega w + p(x) - p(y)}{2}} = \omega \mathrm{ctg} \frac{\omega w + p(x) - p(y)}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

где, например, $p(x) = p(x^1, \ldots, x^n)$, следовательно $p(x) - p(y) = -2\omega w - 2\mathrm{arcctg}\dfrac{\varphi''_{ww}}{\omega\varphi'_w}$. Применяя к этому равенству лемму (1), получаем $p(x^1, \ldots, x^n) = \alpha = \mathrm{const}$. В результате имеем уравнение:

$$\omega \mathrm{ctg} \frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

интегрируя которое, получаем: $\varphi = a(\theta)\mathrm{ctg}\dfrac{\omega w}{2} + b(\theta)$. В итоге приходим к (15).

(34) подставляем в (28):

$$\omega \frac{A(x)e^{\omega x^{n+1}} + A(y)e^{\omega y^{n+1}}}{A(x)e^{\omega x^{n+1}} - A(y)e^{\omega y^{n+1}}} = \omega \frac{A(x)/A(y) + e^{-\omega w}}{A(x)/A(y) - e^{-\omega w}} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

где, например, $A(x) = A(x^1, \ldots, x^n)$, следовательно $A(x)/A(y) = e^{-\omega w}\dfrac{\varphi''_{ww} - \omega\varphi'_w}{\varphi''_{ww} + \omega\varphi'_w}$. Логарифмируя последнее выражение и применяя лемму (2), получаем $A(x^1, \ldots, x^n) = r = \mathrm{const}$. Тогда будем иметь дифференциальное уравнение:

$$\omega \frac{1 + e^{-\omega w}}{1 - e^{-\omega w}} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

интегрируя которое, получаем: $\varphi = a(\theta)\dfrac{1}{1 - e^{-\omega w}} + b(\theta)$. Найденное объединяя с (28), получаем (16).

И, наконец, функции (35) и (36) подставляем в уравнение (28) и применяем свойства гиперболических функций, потом, как и выше с тригонометрическими функциями, устанавливаем, что $p(x^1, \ldots, x^n) = \alpha = \mathrm{const}$. В итоге приходим к уравнениям:

$$\omega \mathrm{cth} \frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}, \ \omega \mathrm{th} \frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}.$$

Интегрируя последние уравнения, получаем: $\varphi = a(\theta)(\mathrm{c})\mathrm{th}\dfrac{\omega w}{2} + b(\theta)$. Найденное объединяя с (35) и (36), имеем (17) и (18). Теорема 1 доказана полностью.

4. Доказательство теоремы 2

Эта теорема доказывается как и теорема 1, поэтому некоторые рассуждения будут упускаться. Как и выше, «по умолчанию» все уравнения решаются в $U(\langle x, y \rangle)$. Вначале заметим, что $Y = 0$ тогда и только тогда, когда $Y(x) + Y(y) = 0$. В прямую сторону это очевидно. В обратную сторону применяем разделение переменных: $Y(x) = -Y(y) = \mathrm{const} = 0$. По условию теоремы $Y \neq 0$, следовательно $Y(x) + Y(y) \neq 0$. Тогда от уравнения (11) приходим к новому:

$$\frac{(Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}}}{Y(x) + Y(y)} = -\frac{\lambda''_{zz}}{\lambda'_z}. \tag{38}$$

Дифференцируя это уравнение сначала по x^{n+1}, а затем по y^{n+1}, после чего из первого равенства вычитаем второе:

$$(Y(x))''_{x^{n+1}} - (Y(y))''_{y^{n+1}})(Y(x) + Y(y)) - ((Y(x))'_{x^{n+1}})^2 + ((Y(y))'_{y^{n+1}})^2 = 0. \qquad (39)$$

Возможны два случая: $(Y(x))'_{x^{n+1}} = 0$ и $(Y(x))'_{x^{n+1}} \neq 0$.

В первом случае уравнение (11) имеет решение (19).

Во втором случае тождество (39) дифференцируем по переменным x^{n+1} и y^{n+1}, после чего делим на ненулевое произведение $(Y(x))'_{x^{n+1}}(Y(y))'_{y^{n+1}} \neq 0$ и разделяем переменные, затем получаем дифференциальное уравнение (30). Решения этого уравнения, найденные в теореме 1, подставляем в (39):

при $\mu = 0$:

$$Y = rx^{n+1} + C(x^1, \ldots, x^n); \qquad (40)$$

при $\mu > 0$:

$$Y = r\cos(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)),\ \omega = \sqrt{\mu}; \qquad (41)$$

при $\mu < 0$:

$$Y = A(x^1, \ldots, x^n)e^{\omega x^{n+1}},\ \omega = \pm\sqrt{-\mu}; \qquad (42)$$

$$Y = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)),\ \omega = \sqrt{-\mu}; \qquad (43)$$

$$Y = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)),\ \omega = \sqrt{-\mu}; \qquad (44)$$

причем $r, c = \mathrm{const}$, $r \neq 0$.

Далее поступаем как и при доказательстве теоремы (1), то есть функции (40)–(44) подставляем в уравнение (38) и применяем лемму 2, а затем решаем. В итоге получаем (20)–(24). Теорема 2 доказана полностью.

Заключение

Условия (3) дают существенные ограничения на выбор функции θ. Так, на плоскости R^2 функцию θ можно брать в виде:

$$\theta(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2,$$

$$\theta(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2,$$

$$\theta(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^3,$$

$$\theta(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1,$$

$$\theta(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]e^{2\gamma \mathrm{arctg}\dfrac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}},$$

$$\theta(x, y) = \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1},$$

то есть для этих функций доказанные здесь результаты верны. А, например, для функций

$$\theta(x, y) = x^1y^1 + x^2,$$

$$\theta(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (y_2)^2$$

доказанное выше несправедливо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кыров, В. А. Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений / В. А. Кыров // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2012. — № 1 (26). — С. 31–38. — DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu986.

2. Кыров, В. А. Решение функциональных уравнений, связанных со скалярным произведением / В. А. Кыров // Челябин. физ.-мат. журн. — 2017. — № 1 (2). — С. 30–45.

3. Кыров, В. А. Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии / В. А. Кыров // Сиб. журн. индустр. математики. — 2010. — № 4 (13). — С. 38–51.

4. Кыров, В. А. Функциональные уравнения в симплектической геометрии / В. А. Кыров // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — № 2 (16). — С. 149–153.

5. Михайличенко, Г. Г. Математические основы и результаты теории физических структур / Г. Г. Михайличенко. — Горно-Алтайск : Изд-во Горно-Алтайского гос. ун-та, 2016. — 297 с.

6. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.

REFERENCES

1. Kyrov V.A. Ob odnom klasse funktsionalno-differentsialnykh uravneniy [On a Class of Functional-Differential Equations]. *Vestn. Samar. gos. tekhn. un-ta. Ser.: Fiz.-mat. nauki*, 2012, no. 1 (26), pp. 31-38. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu986.

2. Kyrov V.A. Reshenie funktsionalnykh uravneniy, svyazannykh so skalyarnym proizvedeniem [Solution of Functional Equations Associated with the Scalar Product]. *Chelyabin. fiz.-mat. zhurn.*, 2017, no. 1 (2), pp. 30-45.

3. Kyrov V.A. Funktsionalnye uravneniya v psevdoevklidovoy geometrii [Functional Equations in Pseudo-Euclidean Geometry]. *Sib. zhurn. industr. matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2010, no. 4 (13), pp. 38-51.

4. Kyrov V.A. Funktsionalnye uravneniya v simplekticheskoy geometrii [Functional Equations in Symplectic Geometry]. *Tr. IMM UrO RAN* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)], 2010, no. 2 (16), pp. 149-153.

5. Mikhaylichenko G.G. *Matematicheskie osnovy i rezultaty teorii fizicheskikh struktur* [Generalized Analytic Functions]. Gorno-Altaisk, Gorno-Altai State University Publ., 2016. 297 p.

6. Ovsyannikov L.V. *Gruppovoy analiz differentsialnykh uravneniy* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 400 p.

ON A CLASS OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Vladimir Aleksandrovich Kyrov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Physics and Informatics,
Gorno-Altai State University
kyrovVA@yandex.ru
Lenkina St., 1, 649000 Gorno-Altaisk, Russian Federation

Abstract. Differentiable considered class C^4 function $f_{1,2} : S_f \to R$, $S_f \subset \subset R^{n+1} \times R^{n+1}$:

$$f_1(x, y) = \sigma(\theta(x, y), w), \; f_2(x, y) = \varkappa(\theta(x, y), z),$$

where θ, σ, ϰ — are functions of class C^4, $\theta(x,y) = \theta(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)$, $w = x^{n+1} - y^{n+1}$, $z = x^{n+1} + y^{n+1}$, and the following inequalities hold:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x^i} \neq 0,\ \frac{\partial\theta}{\partial y^i} \neq 0,\ \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \neq 0,\ \frac{\partial\sigma}{\partial w} \neq 0,\ \frac{\partial\varkappa}{\partial\theta} \neq 0,\ \frac{\partial\varkappa}{\partial z} \neq 0.$$

The functions $f_{1,2}$ are two-point invariants of the action of some Lie group in the space R^{n+1}. The criterion of local invariance of such an action for these functions leads to functional differential equations:

$$((Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}})\varphi'_w + (Y(x) - Y(y))\varphi''_{ww} = 0, \tag{1}$$

$$((Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}})\lambda'_z + (Y(x) + Y(y))\lambda''_{zz} = 0, \tag{2}$$

where $\varphi(\theta,w) = -\frac{\partial\sigma}{\partial w}/\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}$ and $\lambda(\theta,z) = -\frac{\partial\varkappa}{\partial z}/\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta}$.

Theorem 1. *In the neighborhood* $U(\langle x,y\rangle)$ *the equation* (1)*, where* $w = x^{n+1} - y^{n+1}$, $Y \neq \mathrm{const}$, $\varphi'_w \neq 0$, *has the following solutions:*

$$Y = C(x^1,\ldots,x^n),\ \varphi = a(\theta)w + b(\theta);$$

$$Y = rx^{n+1} + c,\ \varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta);$$

$$Y = r(x^{n+1})^2 + c,\ \varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta);$$

$$Y = r\cos(\omega x^{n+1} + \alpha) + c,\ \varphi = a(\theta)ctg\frac{\omega w}{2} + b(\theta);$$

$$Y = re^{\omega x^{n+1}} + c,\ \varphi = a(\theta)\frac{e^{\omega w}}{e^{\omega w} - 1} + b(\theta);$$

$$Y = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1} + \alpha) + c,\ \varphi = a(\theta)cth\frac{\omega w}{2} + b(\theta);$$

$$Y = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1} + \alpha) + c,\ \varphi = a(\theta)th\frac{\omega w}{2} + b(\theta),$$

where $r, c, \alpha = \mathrm{const}$, $C(x^1,\ldots,x^n) \neq \mathrm{const}$, $a(\theta), b(\theta)$ *— are functions of class* C^3, $a(\theta) \neq 0$.

Theorem 2. *In the neighborhood* $U(\langle x,y\rangle)$ *the equation* (2)*, where* $z = x^{n+1} + y^{n+1}$, $Y \neq 0$, $\lambda'_z \neq 0$, *has the following solutions:*

$$Y = C(x^1,\ldots,x^n),\ \lambda(\theta,z) = a(\theta)z + b(\theta);$$

$$Y = rx^{n+1} + c,\ \lambda = a(\theta)\frac{1}{rz + 2c} + b(\theta);$$

$$Y = r\cos(\omega x^{n+1} + \alpha),\ \lambda = a(\theta)tg\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta);$$

$$Y = re^{\omega x^{n+1}},\ \lambda = a(\theta)e^{-\omega z} + b(\theta);$$

$$Y = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1} + \alpha),\ \lambda = a(\theta)th\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta);$$

$$Y = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1} + \alpha),\ \lambda = a(\theta)cth\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta),$$

где $r, c, \alpha = \mathrm{const}$, $C(x^1,\ldots,x^n) \neq \mathrm{const}$, $a(\theta), b(\theta)$ *— are functions of class* C^3, $a(\theta) \neq 0$.

Key words: functional equation, functional differential equation, differential equation.